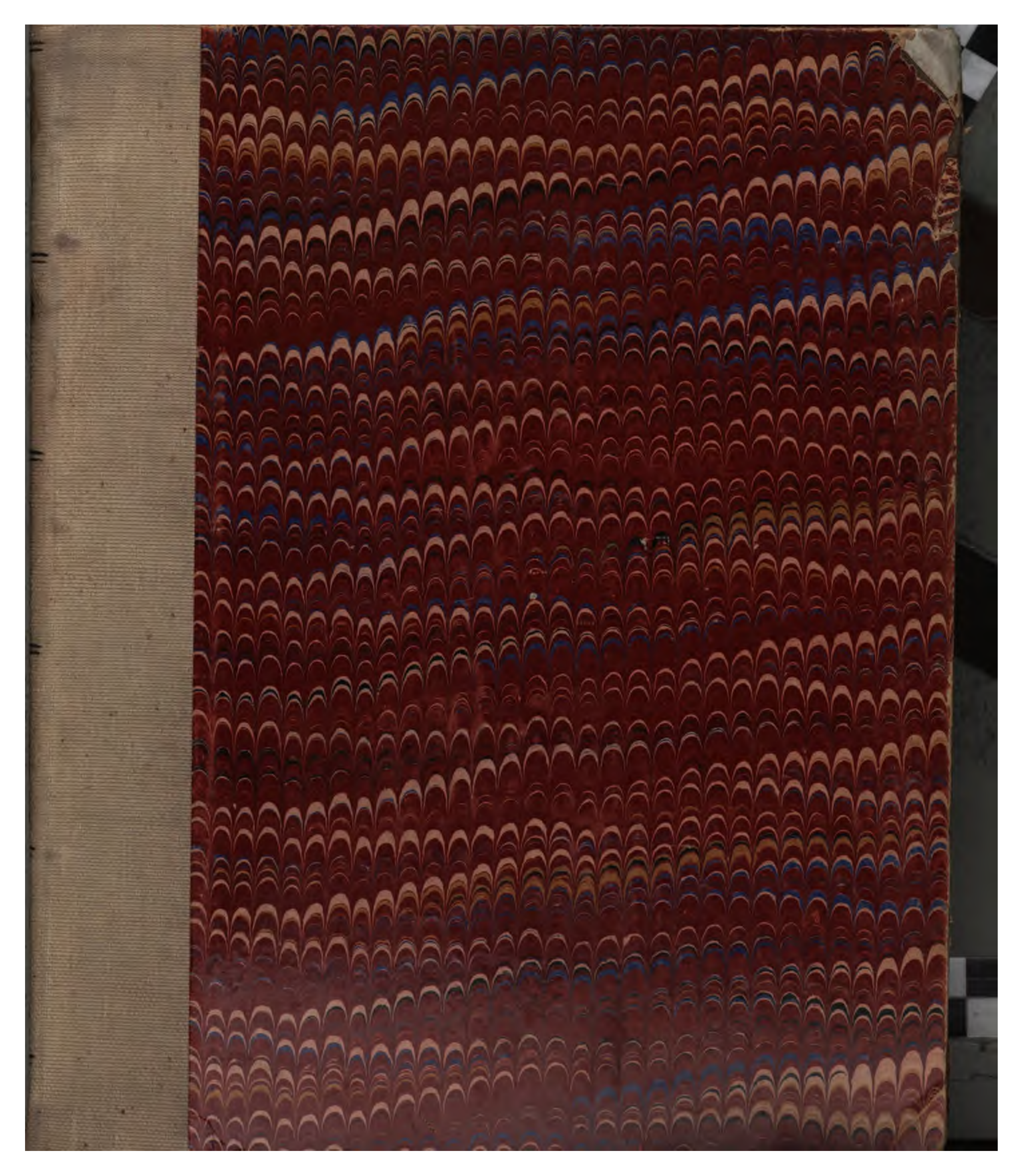






ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1904.

PARIS.
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE.
ED. PRIVAT,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1904

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

Premier fascicule.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

COMITÉ DE RÉDACTION.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1904.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS,

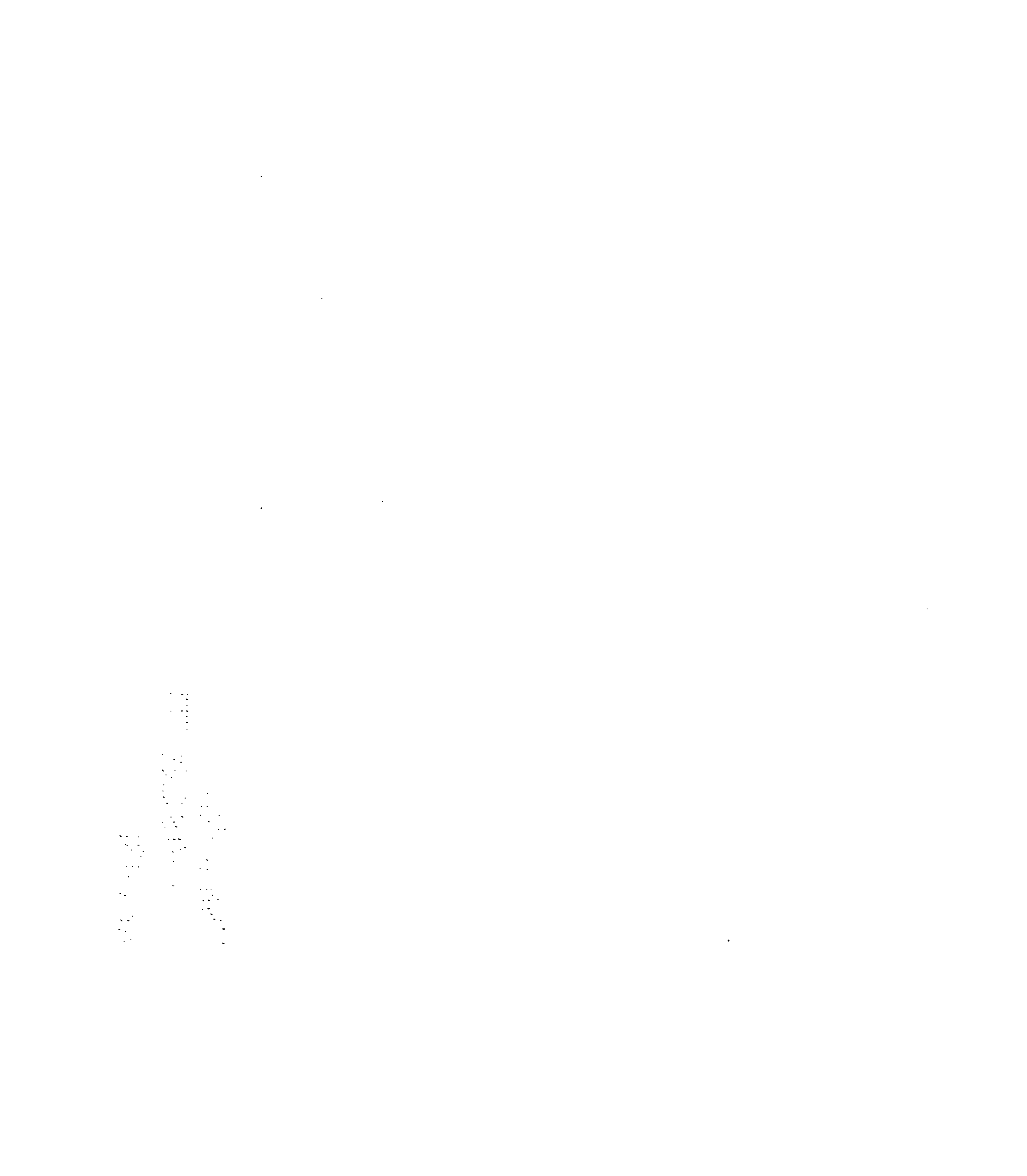
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE,

ED. PRIVAT,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1904



ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LA STABILITÉ

DES FIGURES ELLIPSOIDALES D'ÉQUILIBRE

D'UN LIQUIDE ANIMÉ D'UN MOUVEMENT DE ROTATION,

PAR M. A. LIAPOUNOFF.

Traduit du russe par M. Édouard DAVAUX,
Ingénieur de la Marine, à Toulon (1).

INTRODUCTION.

Dans ce travail, j'étudie la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, dont les molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, en partant d'un principe représentant une généralisation du principe connu de Lagrange, d'après lequel l'étude de la stabilité se ramène à la recherche du minimum du potentiel.

Avant de parler de la méthode que j'ai suivie et des résultats auxquels je suis

---

(1) M. Liapounoff a très gracieusement autorisé la publication en langue française de sa thèse : Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости, 1884; pendant l'impression de cette traduction, l'auteur a modifié, en quelques points, la rédaction primitive de son travail, et y a ajouté des notes qui seront signalées par la lettre L (mars 1904).

arrivé, ce qui sera fait plus loin, je dois indiquer les recherches qui ont quelques rapports avec les miennes.

Liouville s'est occupé de la question, il y a 30 ans. Malheureusement, il n'a pas publié ses travaux. Tout ce que nous en connaissons est contenu dans un Mémoire publié dans les *Additions à la Connaissance des Temps* de 1855, et réimprimé ensuite dans le Tome XX (année 1855) de son journal, sous le titre : *Formules générales relatives à la question de la stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe*. Dans ce Mémoire, Liouville donne des formules générales pour la résolution de la question de la stabilité d'une figure d'équilibre quelconque d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, mais il ne les applique pas à des cas particuliers. Il fait la remarque que son travail n'est qu'un extrait du premier Paragraphe d'un Mémoire ayant pour titre : *Sur la stabilité de l'équilibre des mers*. Mais nous ne connaissons de ce dernier qu'un compte rendu succinct présenté par Liouville à l'Académie et inséré au Tome XV des *Comptes rendus*, p. 903, et, d'après ce qu'y dit l'auteur, on ne peut pas juger des résultats qu'il a obtenus; tout ce qui se rapporte à la question que nous considérons est contenu seulement dans le passage suivant :

« ... Et... qu'arriverait-il à une masse liquide, homogène, douée d'une quelconque des formes ellipsoïdales d'équilibre, à deux ou même à trois axes inégaux? Ces questions intéressantes, et qui me semblent entièrement neuves, je les ai aussi traitées; mais l'exposition de mes recherches exigerait de longs développements, que je remets à une autre séance pour ne pas abuser des moments de l'Académie. Toutefois, je dirai dès à présent que j'ai dû avoir recours à certaines fonctions heureusement introduites en analyse par M. Lamé, à l'occasion d'un problème relatif au mouvement de la chaleur. En complétant, à quelques égards, les formules de cet habile géomètre, et aussi en les combinant avec d'autres formules qui m'appartiennent, j'ai réussi en quelque sorte à ajouter un nouveau Chapitre à la *Mécanique céleste*, etc. ».

Du reste, dans le Tome XVI des *Comptes rendus*, p. 363, se trouve une courte Note, dans laquelle il est parlé de l'un des résultats obtenus par Liouville. Nous y rencontrons ce qui suit :

« M. Liouville lit une Note ayant pour titre : *Recherches sur la stabilité de l'équilibre des fluides*. Il a essayé de résoudre, pour le cas d'une figure elliptique quelconque, les questions de stabilité que Laplace, en s'occupant de l'équilibre des mers, a résolues seulement pour des corps à très peu près sphériques. Le théorème le plus remarquable est relatif aux ellipsoïdes à trois axes inégaux de M. Jacobi. L'état d'équilibre de ces ellipsoïdes est toujours un état stable. Nous reviendrons sur cette Communication quand M. Liouville aura présenté son travail complet à l'Académie. »

Le résultat relatif aux ellipsoïdes de M. Jacobi a été obtenu par Liouville, comme le lecteur le verra plus loin, probablement pour une hypothèse particulière en ce qui concerne les troubles.

Je n'ai pu trouver aucune autre indication sur les recherches de Liouville dans cette voie, et, d'une façon générale, dans l'intervalle de temps entre l'année 1855, où parut le Mémoire de Liouville *Formules générales*, etc., et l'année 1883, où fut publiée la nouvelle édition de la seconde Partie de la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait, je ne sache pas, à l'exception d'un travail de Riemann, que l'on ait parlé quelque part de la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre.

Dans son Mémoire connu ([1]), sur le cas du mouvement d'un ellipsoïde liquide découvert par Dirichlet, publié en 1861 au Tome IX des *Abhandl. der König. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Riemann résout entre autres la question de la stabilité des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi *relativement à des déplacements et des vitesses à l'instant initial, satisfaisant aux hypothèses de Dirichlet*. Riemann trouve que les ellipsoïdes de Maclaurin sont stables ou instables, selon que les rapports entre leurs axes sont supérieurs ou inférieurs à 0,303327..., et, par conséquent, suivant que leurs excentricités sont inférieures ou supérieures à 0,952886..., et que les ellipsoïdes de Jacobi sont toujours stables. On ne trouve donc, relativement à des troubles arbitraires, qu'un résultat dans le Mémoire de Riemann, savoir que les ellipsoïdes de révolution sont instables, si les rapports entre leurs axes sont inférieurs à 0,303327....

Dans la nouvelle édition de la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait, dont je n'ai pris connaissance qu'après que ce Mémoire était écrit, on trouve ([2]) quelques remarques assez intéressantes sur la question des figures d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, envisagée d'une manière générale. Suivant la remarque des auteurs, ils n'ont pas cessé de s'occuper de cette question pendant les quinze années qui se sont écoulées à partir de la première édition de leur livre, et sont arrivés à des résultats qui l'éclairent beaucoup ; mais ils n'en ont fait connaître que quelques-uns, et en outre sans démonstration, promettant de revenir sur ce sujet dans le second Volume de leur Ouvrage. De ces résultats, je ne citerai que ceux qui se rapportent à la question de la stabilité des figures d'équilibre ellipsoïdales :

Si l'on impose la condition que la figure du liquide reste toujours un ellipsoïde de révolution, tous les ellipsoïdes de révolution planétaires sont des figures d'équilibre stables. Si l'on impose la condition que le liquide conserve toujours

---

([1]) *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides* (*B. Riemann's Werke*, herausg. v. Weber, 1876).

([2]) THOMSON et TAIT, *Treatise on natural Philosophy*, Vol. I, Part. II, 1883, § 778", p. 332-335.

la forme d'un ellipsoïde, les ellipsoïdes de révolution sont stables ou *instables* suivant que leur excentricité est inférieure ou *supérieure* à 0,8126... (excentricité de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi) (¹), et les ellipsoïdes à trois axes sont toujours stables. *Si enfin aucune condition n'est imposée, aussi bien les ellipsoïdes de révolution que les ellipsoïdes à trois axes sont instables pour des moments des quantités de mouvement suffisamment grands* (²).

En outre, Thomson et Tait énoncent le principe, sur lequel ils ont basé leurs recherches, sous la forme suivante :

« When the energy with given moment of momentum is either a minimum or a maximum, the kinetic equilibrium is clearly stable, if the liquid is perfectly inviscid. »

Ils ajoutent :

« It seems probable that it is essentially unstable, when the energy is a minimax; but we do not know that this proposition has been ever proved. »

A ce qu'il paraît, c'est d'après ce complément de leur principe que Thomson et Tait donnent leur appréciation sur l'*instabilité* indiquée plus haut.

Conformément au principe de Thomson et Tait, je commence mon étude par la recherche des conditions sous lesquelles, pour un moment donné des quantités de mouvement, l'énergie totale d'un liquide, soumis à l'action de forces newtoniennes entre ses molécules et à une pression constante sur sa surface, est minimum, maximum ou minimum-maximum. Après avoir démontré que ces conditions sont remplies pour toute figure d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, et qu'en outre un maximum pour l'énergie est en général impossible, je ramène la question du minimum d'énergie à celle du minimum d'une certaine expression Π, dépendant de la forme du liquide et du moment des quantités de mouvement correspondant à la figure d'équilibre considérée. En vertu du principe énoncé plus haut, la question de la stabilité se ramène donc à un problème du calcul des variations.

Il est à propos de remarquer ici que l'application de la méthode du calcul des variations à la résolution des questions de stabilité d'équilibre pour un liquide n'est pas nouvelle. Giesen (³) et Hagen (⁴), en se basant sur le principe de

(¹) Ce résultat ne contredit pas Riemann, parce que Riemann fait certaines hypothèses particulières relativement *aux vitesses*.

(²) Thomson et Tait ne donnent pas de limite inférieure pour ces moments de quantités de mouvement.

(³) A. Giesen, *Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit* (*Jahresbericht über die höhere Schule in Opladen*, f. 1872-1873, S. J.).

(⁴) J. Hagen, *Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer auf einem dreiaxigen Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten ausgebreiteten Flüssigkeit*... (*O. Schlömilch's Zeitschrift für Math. und Ph.*, Bd. XXII, 1877).

Lagrange, se sont servis de cette méthode pour l'étude de la stabilité de l'équilibre d'un liquide couvrant un noyau solide fixe de forme ellipsoïdale avec excentricités très petites. Mais, avant eux, Liouville avait pensé à appliquer le principe de Lagrange à la même question, ainsi qu'à la question de la stabilité des figures ellipsoïdales (en considérant le mouvement comme un repos relatif). Du moins, à l'endroit du Tome XV des *Comptes rendus* indiqué plus haut, il parle des positions d'un système quelconque de points (sans exclure un liquide), dans lesquelles la force vive du système prend les plus grandes valeurs, comme de positions d'équilibre stable, et dans son Mémoire *Formules générales,* etc., on trouve tout ce qui est nécessaire pour déterminer les conditions du maximum de force vive, en vue de l'étude de la stabilité des deux cas considérés d'équilibre d'un liquide.

Autant que je sache, le principe de Lagrange n'a été démontré nulle part d'une manière directe pour un liquide; on rencontre cependant pour cette démonstration les mêmes difficultés que pour celle du principe de Thomson et Tait cité plus haut, lequel représente une généralisation du principe de Lagrange.

Primitivement, en entreprenant l'étude du problème que je m'étais posé, je considérais la question au même point de vue que Liouville, c'est-à-dire que je la ramenais à la recherche de la stabilité d'un repos relatif du liquide. Quand, ensuite, j'ai pris connaissance de la nouvelle édition de la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait, j'ai remarqué que le principe énoncé par eux offrait quelque avantage sur celui de Lagrange, et, voulant le prendre pour point de départ, j'ai entrepris la transformation du Chapitre I de mon Travail, où étaient exposés les éléments sur lesquels, à mon avis, pouvait être basée l'application du principe de Lagrange à la résolution de mon problème. Mais, par cela, seul, mon point de vue était changé; le fond même de la question restait ce qu'il était primitivement. D'ailleurs je ne regardais pas comme possible de prendre sans démonstration le principe de Thomson et Tait, que je voulais poser comme base de mes recherches.

Il fallait convenir avant tout de ce que l'on entendait par *figure d'équilibre stable*. Par analogie avec ce que l'on appelle, en mécanique, stabilité d'un système de points isolés, on était porté à entendre, par figure d'équilibre stable, une figure du liquide telle que, après que l'on a communiqué aux molécules des déplacements et des vitesses suffisamment petits, elle reste, pendant toute la durée du mouvement, aussi peu différente qu'on le veut de la figure d'équilibre. Mais l'équation de la force vive, qui forme la base de l'étude de la stabilité de l'équilibre des systèmes conservatifs, dans la mécanique des systèmes de points isolés, se trouve en général insuffisante pour découvrir, dans un liquide, après que son repos (absolu ou relatif) a été troublé, le caractère du mouvement choisi comme signe de l'équilibre stable. Il me fallait donc, ou renoncer à la possibilité de

résoudre le problème que je m'étais posé, en m'appuyant sur le principe du minimum d'énergie, ou donner, pour un liquide, une définition plus générale de la stabilité. C'est ce qu'il m'a paru possible de faire, pourvu que la nouvelle définition ne contredise pas l'idée existante sur la stabilité. Or un examen attentif de la question me montra que toute difficulté disparaissait, à condition de définir une figure stable d'équilibre comme une figure telle que, après communication au mouvement du liquide de troubles suffisamment petits, la figure du liquide demeure aussi peu différente que l'on veut de la figure d'équilibre, *au moins tant qu'il ne se forme pas à la surface du liquide des saillies en forme de fils ou de feuillets assez minces*.

Cette définition, exprimée sous une forme précise, constitue la base de toutes mes recherches. En l'adoptant, et en faisant certaines hypothèses relativement à la continuité du mouvement, je me sers ensuite de la méthode de Lejeune-Dirichlet pour la démonstration du théorème fondamental. D'après ce théorème, toute figure d'équilibre, pour laquelle a lieu un minimum de Π (sous certaines conditions), est stable. Après cela, je passe à la recherche des formules servant pour l'examen du signe d'un accroissement infiniment petit de Π, et je me borne à l'expression de la variation seconde de Π. Je termine le Chapitre I par l'étude du signe de cette variation, dans deux hypothèses particulières relativement aux déplacements : 1° quand le liquide se déplace comme un système invariable; 2° quand une figure donnée d'équilibre se change en une autre figure d'équilibre qui en est infiniment voisine. Cette seconde étude conduit à un résultat dans lequel est contenu, comme cas particulier, le premier des résultats de Thomson et Tait énoncés plus haut, et qui, dans la suite, facilite considérablement l'étude de la stabilité des ellipsoïdes, surtout des ellipsoïdes de Jacobi.

On doit remarquer ici que j'ai seulement en vue de trouver tous les ellipsoïdes qui doivent être appelés stables, d'après le théorème fondamental indiqué plus haut, ne désirant nullement affirmer que tous les autres ellipsoïdes (c'est-à-dire ceux pour lesquels Π n'est pas minimum) sont instables, comme cela résulterait du complément, cité plus haut, au principe de Thomson et Tait, lequel reste sans démonstration. En parlant de *limites*, par exemple pour l'excentricité des ellipsoïdes stables de révolution, j'entendrai donc par là simplement des nombres tels que tout nombre intermédiaire est l'excentricité d'un ellipsoïde sûrement stable.

Pour ce qui concerne la résolution complète du problème, on ne peut l'espérer que du seul procédé général de recherche de la stabilité, qui consiste en une étude effective du mouvement troublé. Cette étude n'entrait pas dans le plan de mon travail, où je désirais seulement montrer *à quels résultats, relativement à la stabilité des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi, conduit la loi de la conservation de l'énergie*.

J'indiquerai maintenant les points essentiels des autres parties de mon travail.

Dans le Chapitre II, je transforme, pour la sphère, l'expression générale de la variation seconde de Π trouvée au Chapitre I, en me servant du développement de la variation du déplacement normal d'un point de la surface du liquide en série de fonctions sphériques. Giesen et Hagen se sont servis, avant moi, du même procédé pour la transformation d'une expression semblable, dans les recherches mentionnées plus haut sur la stabilité de l'équilibre d'un liquide sur un noyau solide de forme ellipsoïdale, dont les excentricités sont très petites. La transformée de l'expression de la variation seconde de Π se présente sous la forme d'une série dont tous les termes sont positifs. J'obtiens ainsi le résultat, qui du reste n'est pas nouveau, que *la sphère est une figure d'équilibre stable.*

Dans le Chapitre III, je me sers du même procédé de transformation de la variation seconde de Π, pour les ellipsoïdes de révolution. Mais l'expression que j'obtiens ne donne pas (comme pour la sphère) la possibilité de dire, sans une recherche préliminaire, quelque chose sur son signe : il m'a été pour cela nécessaire de démontrer quelques propriétés de croissance et de décroissance d'expressions dépendant de fonctions que je désigne par $p_k^m(x)$ et $q_k^m(x)$ et qui sont liées aux fonctions sphériques ordinaires de première et de seconde espèce, de la même façon que la fonction $\sinh yp\, x$ est liée à $\sin x$. En m'appuyant sur ces propriétés, je démontre que *les ellipsoïdes de révolution sont stables, tant que leur excentricité reste inférieure à l'excentricité* (0,8126...) *de l'ellipsoïde de révolution avec lequel se confondent les ellipsoïdes de Jacobi pour la limite supérieure de la vitesse angulaire.* Puis j'appelle l'attention sur ce fait que, dans le cas particulier où la surface du liquide est supposée rester ellipsoïdale pendant toute la durée du mouvement, la limite supérieure de l'excentricité des ellipsoïdes de révolution stables demeure la même, et par conséquent inférieure à celle que trouve Riemann. La raison de cette diversité de résultats devient tout à fait claire, si l'on tient compte de ce qui a été dit plus haut relativement à la signification des limites que j'ai obtenues, et aussi de ce que Riemann n'étudie la stabilité que pour des vitesses initiales satisfaisant aux hypothèses de Dirichlet. Je considère, en outre, encore deux cas particuliers : celui où l'ellipsoïde d'inertie de la masse liquide demeure toujours un ellipsoïde de révolution, et celui où la surface du liquide demeure toujours une surface de révolution. Dans le premier cas, on obtient pour limite supérieure de l'excentricité des ellipsoïdes stables le nombre 0,89..., et, dans le second, le nombre 0,985....

Je consacre le Chapitre IV à l'exposé des propriétés des fonctions de Lamé, sur lesquelles est basée, dans le Chapitre suivant, la transformation de la variation

seconde de Π et la recherche de son signe pour les ellipsoïdes à trois axes. Ici je démontre, entre autres, un théorème sur le nombre des racines de l'équation

$$\mathbf{E}_k^m(x) = 0$$

comprises entre certaines limites. Ce théorème complète celui que Klein a démontré dans son Mémoire *Ueber Lamé'sche Functionen* dans le Tome XVIII des *Mathematische Annalen*. Puis j'attire l'attention sur quelques propriétés des constantes τ_k^m, qui entrent dans l'équation différentielle des fonctions de Lamé, et qui sont définies par la condition que les fonctions d'un certain type satisfassent à cette équation ; en m'appuyant sur ces résultats, je démontre quelques propriétés de croissance et de décroissance de certaines expressions dépendant des fonctions de Lamé, ou de fonctions qui leur sont liées de la même façon que $p_k^m(x)$ et $q_k^m(x)$ mentionnées plus haut sont liées aux fonctions sphériques ordinaires. J'introduis pour ces fonctions les notations $\mathbf{E}_k^m(x)$ et $\mathbf{F}_k^m(x)$, en conservant pour les fonctions de Lamé ordinaires les notations habituellement usitées $E_k^m(x)$ et $F_k^m(x)$.

Dans le Chapitre V, je me sers des propositions signalées au Chapitre précédent pour transformer la variation seconde de Π relative aux ellipsoïdes à trois axes. L'examen de son signe, basé sur les propriétés trouvées des fonctions de Lamé, montre que *les ellipsoïdes à trois axes sont stables tant qu'ils restent suffisamment voisins des ellipsoïdes de révolution*. On obtient toutefois des limites assez resserrées pour la vitesse angulaire relative aux ellipsoïdes stables ; on démontre qu'elle doit être comprise entre des limites dont le rapport est égal à 0,87.... J'expose ensuite avec quelque détail l'analyse d'après laquelle je résous les équations déterminant les limites des ellipsoïdes stables. Je démontre aussi, dans ce Chapitre, que, pour le cas particulier considéré par Riemann, mes formules donnent le même résultat que celui auquel arrive Riemann relativement aux ellipsoïdes à trois axes de Jacobi.

Comme on le voit par ce qui précède, je me borne partout à la recherche de la variation seconde de Π. Dans mon étude subsiste donc une lacune : pour résoudre la question de la stabilité des ellipsoïdes qui servent de limites aux ellipsoïdes stables, il est nécessaire de tenir compte des termes de l'accroissement de Π qui suivent le terme relatif à la variation seconde. Mais la recherche de ces termes, dans le cas général, offre d'assez grandes difficultés, et, pour les écarter, je n'ai pas encore trouvé jusqu'ici de procédé quelque peu rigoureux.

Ce que je dis ici ne s'applique pas à l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, servant d'une des *limites* pour les ellipsoïdes stables à deux, aussi bien qu'à trois axes inégaux. Pour l'étude de la stabilité de cet ellipsoïde, on peut se servir d'un procédé

particulier, au moyen duquel la question est ramenée à la recherche du signe d'une certaine forme quadratique. La résolution de ce problème fait l'objet du Chapitre VI, dans lequel je démontre que l'*ellipsoïde de révolution de Jacobi est une figure d'équilibre stable.*

Je remarquerai en terminant que la question de la stabilité des ellipsoïdes *limites* se trouve en relation étroite avec un problème de Tchebychef, celui des figures d'équilibre infiniment voisines des figures ellipsoïdales ([1]). Les essais que j'ai faits pour arriver à quelque résultat touchant cette dernière question, m'ont donné en partie la matière du présent travail.

A. L.

Septembre 1883 — Octobre 1884.

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LE PROBLÈME DE LA STABILITÉ DES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UN LIQUIDE EN ROTATION.

1. Considérons un liquide parfait homogène, et supposons que les seules forces qui agissent sur lui sont les attractions mutuelles des molécules, soumises à la loi newtonienne de la proportionnalité à l'inverse du carré des distances, et une pression constante s'exerçant à la surface.

Supposons que le liquide, qui se trouve sous l'action de ces forces, tourne d'un mouvement uniforme, comme un corps solide, autour d'un axe qui se meut d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. En introduisant un milieu invariable animé d'un mouvement convenable, nous pouvons considérer ce cas

([1]) Ce problème fut proposé à l'auteur en 1882 par Tchebychef, et l'auteur a énoncé les résultats auxquels il est arrivé en cherchant à le résoudre, en une thèse, à la fin du présent travail. Dans le Mémoire connu, qui parut en 1885 dans les *Acta mathematica,* M. Poincaré est arrivé aux mêmes résultats, sans connaître les recherches de l'auteur. Toutefois la question des nouvelles figures d'équilibre, peu différentes des figures ellipsoïdales, ne peut encore être considérée comme résolue; car le calcul n'a donné qu'une première approximation, et cela seulement au point de vue formel. Donc, rien ne prouve que les nouvelles figures d'équilibre existent réellement. Après 20 années écoulées depuis l'époque où le présent travail fut publié, l'auteur a repris la question, dont il s'occupe en ce moment. Il a réussi à trouver une méthode qui permet de pousser l'approximation, dans cette question difficile, aussi loin qu'on veut, et bientôt il se propose de publier les résultats de ses recherches. L.

du mouvement d'un liquide comme un repos relatif résultant de l'équilibre entre toutes les forces qui agissent sur lui et la force centrifuge. D'après cela, nous appellerons, suivant l'usage, la figure que conserve le liquide dans ce mouvement, sa *figure d'équilibre*. La stabilité de ce cas du mouvement d'un liquide, dans un certain sens de ce mot, fera l'objet de nos recherches. Nous considérerons aussi le cas particulier où la vitesse angulaire de rotation est nulle; mais, au point de vue de l'étude de la stabilité, il faut distinguer ce cas particulier du cas général. Nous distinguerons donc *une figure d'équilibre du liquide animé d'un mouvement de rotation, et une figure d'équilibre du liquide non animé d'un mouvement de rotation*.

Dans les travaux consacrés à la stabilité du mouvement, on distingue, comme on sait, deux sortes de stabilité : la *stabilité dans le temps* et la *stabilité dans l'espace*. Dans l'étude de la stabilité dans le temps, on compare, pour un seul et même instant, les coordonnées du système et leurs dérivées par rapport au temps, dans le mouvement troublé et dans le mouvement non troublé. Au contraire, dans l'étude de la stabilité dans l'espace, toutes les coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps sont supposées exprimées, par élimination du temps, en fonction d'une des coordonnées, et l'on se contente ainsi de la comparaison des coordonnées restantes et de leurs dérivées par rapport au temps, pour une seule et même valeur de la coordonnée prise pour variable indépendante.

Dans le cas d'un mouvement du liquide tel que celui que nous avons défini plus haut, la stabilité qui fera l'objet de notre étude n'appartiendra ni à l'un, ni à l'autre de ces deux cas de stabilité. En considérant une figure d'équilibre quelconque, nous comparerons la figure du liquide à un moment quelconque de son mouvement troublé avec la figure qu'il conserve dans le mouvement non troublé, en faisant abstraction du mouvement des molécules. Si, de plus, la vitesse angulaire correspondant à la figure d'équilibre considérée n'est pas nulle, nous tiendrons compte aussi de la position de la surface du liquide, dans le mouvement troublé, relativement à un axe passant par le centre d'inertie du liquide, et parallèle à l'axe de rotation dans le mouvement non troublé. Nous envisagerons en outre également la force vive du mouvement du liquide.

C'est dans cet ordre d'idées que l'objet de nos recherches sera la *stabilité de la figure d'équilibre*. La définition précise de ce que nous entendons par figure stable d'équilibre sera donnée dans un des numéros suivants.

2. Dans tout mouvement d'un liquide, suivant les conditions ici considérées, ont lieu la loi de la conservation du mouvement du centre d'inertie et la loi de la conservation des aires dans tout plan se mouvant d'un mouvement de translation uniforme et rectiligne et pour tout point de ce plan.

La constance supposée de la pression sur la surface du liquide est une condi-

tion essentielle pour que le mouvement du liquide satisfasse à ces lois. D'après cette condition, on démontre facilement que les équations différentielles du mouvement du liquide admettent aussi une intégrale exprimant la loi de la conservation de l'énergie, pourvu que l'on fasse l'hypothèse que les vitesses des points du liquide sont des fonctions continues des coordonnées. Nous aurons toujours cette hypothèse en vue, et, d'une façon générale, nous supposerons que le mouvement du liquide se fait d'une manière continue, de sorte que les coordonnées de tout point du liquide seront supposées des fonctions continues de leurs valeurs initiales et du temps, et le mouvement intérieur de chaque élément du liquide sera supposé s'opérant suivant les lois d'une déformation homogène. Nous supposerons d'ailleurs que tous les points de la surface du liquide restent toujours à des distances finies du centre d'inertie du liquide.

Imaginons un milieu invariable en mouvement de translation, avec une vitesse égale et parallèle à celle du centre d'inertie du liquide, et considérons le mouvement relatif du liquide par rapport à ce milieu. En appelant ρ la densité du liquide, nous désignerons par $J\rho$ le moment des quantités de mouvement du liquide, pris par rapport à son centre d'inertie ([1]). Nous prendrons ce dernier point pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires x, y, z dont les axes seront supposés avoir des directions invariables, et nous prendrons pour direction de l'axe des z celle du moment des quantités de mouvement $J\rho$, de sorte que, si u, v et w sont les projections sur les axes des x, des y et des z de la vitesse relative d'un point (x, y, z) du liquide, nous aurons les équations suivantes :

$$(1) \qquad \int x\,d\tau = 0, \qquad \int y\,d\tau = 0, \qquad \int z\,d\tau = 0,$$

$$(2) \qquad \int u\,d\tau = 0, \qquad \int v\,d\tau = 0, \qquad \int w\,d\tau = 0,$$

$$(3) \qquad \int (wy - vz)\,d\tau = 0, \qquad \int (uz - wx)\,d\tau = 0, \qquad \int (vx - uy)\,d\tau = J,$$

où $d\tau$ est un élément de volume, et où les intégrations s'étendent à tout le volume du liquide.

D'une façon générale, nons entendrons toujours par

$$\int F(x, y, z)\,d\tau \quad \text{ou} \quad \int F(x', y', z')\,d\tau' \quad (^2)$$

une intégrale s'étendant à tout le volume du liquide.

([1]) Dans la suite, en parlant du moment des quantités de mouvement, nous sous-entendrons toujours qu'il doit être pris par rapport au centre d'inertie.

([2]) D'une façon générale, nous désignerons toutes les quantités se rapportant au point (x', y', z') par les mêmes lettres que pour le point (x, y, z), mais avec des accents.

Désignons ensuite par $T\rho$ la force vive du mouvement relatif du liquide, de sorte que

$$T = \frac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau,$$

et par V la fonction potentielle de la masse liquide au point (x, y, z), de sorte que si f est une certaine constante positive, dépendant de l'attraction de l'unité de masse par l'unité de masse à l'unité de distance, et r la distance entre les points (x, y, z) et (x', y', z'), ce dernier appartenant à l'élément de volume du liquide $d\tau'$, on aura

$$V = f\rho \int \frac{d\tau'}{r}.$$

Avec les notations adoptées, l'équation qui exprime la loi de la conservation de l'énergie prend la forme suivante :

$$T - \frac{1}{2}\int V\, d\tau = H, \tag{4}$$

où H est une constante représentant la valeur initiale de l'énergie totale du liquide rapportée à l'unité de densité, dans son mouvement par rapport au centre d'inertie ([1]).

Comme, d'après la loi de conservation de l'énergie, cette dernière ne dépend que de la figure et de la position du liquide, ainsi que des vitesses de ses points à l'instant initial, on peut parler de la recherche des mouvements, c'est-à-dire des données initiales, pour lesquels l'énergie totale, pour un moment donné des quantités de mouvement, est minimum, maximum ou minimum-maximum ([2]). Arrivons maintenant à la résolution de ce problème, qui consistera, par conséquent, à rechercher parmi toutes les surfaces délimitant un volume donné et satisfaisant aux conditions (1), et parmi tous les u, v, w satisfaisant aux conditions (2) et (3) et à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

que l'on doit toujours avoir en vue, ceux pour lesquels la variation du premier

---

([1]) En parlant, dans la suite, de l'énergie totale, nous supposerons toujours qu'il s'agit de l'énergie dans ce mouvement relatif. D'une façon générale, nous entendrons, par le mot *mouvement*, ce mouvement relatif.

([2]) Pour éviter tout malentendu, nous croyons nécessaire de faire remarquer que, quand pour un système donné de valeurs des variables annulant la première différentielle d'une fonction, cette dernière n'est ni minimum, ni maximum, nous dirons qu'elle est minimum-maximum.

ordre de l'expression H, définie par l'équation (4), s'annule pour toutes les déformations infiniment petites possibles de la surface, dans lesquelles le volume délimité ne change pas, et dans lesquelles les équations (1) ne sont pas troublées, et pour toutes les variations infiniment petites possibles de u, v, w ne troublant pas les équations (2), (3) et (5).

En nous servant du procédé connu du calcul des variations, nous trouvons les équations suivantes, pour la détermination des données initiales cherchées :

$$u = a_1 + \omega_y z - \omega_z y + \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$v = b_1 + \omega_z x - \omega_x z + \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$w = c_1 + \omega_x y - \omega_y x + \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

et

$$\begin{aligned}(6)\qquad & V + \omega_x(wy - vz) + \omega_y(uz - wx) + \omega_z(vx - uy) \\ & - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + a_1 u + b_1 v + c_1 w + ax + by + cz = \lambda,\end{aligned}$$

parmi lesquelles la dernière doit devenir une identité sur la surface cherchée.

Dans ces équations, ω_x, ω_y, ω_z, a, b, c, a_1, b_1, c_1 et λ sont des constantes, et φ une fonction de x, y, z, assujettie à la condition de devenir constante sur la surface. De cette condition et de l'équation (5), nous déduisons, en tenant compte de la continuité supposée de u, v, w,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

dans tout le volume occupé par le liquide; les conditions (1) et (2) donnent donc $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, et, par conséquent, nous obtenons pour u, v, w les expressions

$$u = \omega_y z - \omega_z y, \qquad v = \omega_z x - \omega_x z, \qquad w = \omega_x y - \omega_y x,$$

dans lesquelles ω_x, ω_y et ω_z, en vertu des conditions (3), doivent satisfaire aux relations

$$(7)\qquad \begin{cases} S_x\omega_x - P_z\omega_y - P_y\omega_z = 0, \\ -P_z\omega_x + S_y\omega_y - P_x\omega_z = 0, \\ -P_y\omega_x - P_x\omega_y + S_z\omega_z = J, \end{cases}$$

où

$$S_x = \int (y^2 + z^2)\, d\tau, \qquad S_y = \int (z^2 + x^2)\, d\tau, \qquad S_z = \int (x^2 + y^2)\, d\tau,$$

$$P_x = \int yz\, d\tau, \qquad P_y = \int zx\, d\tau, \qquad P_z = \int xy\, d\tau.$$

L'équation (6) prend donc la forme suivante :

$$V + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + ax + by + cz = \lambda. \tag{8}$$

Désignons par n la direction de la normale intérieure à la surface du liquide en un des points de son élément ds, multiplions les deux membres de l'équation (8) par $\cos(nx)\,ds$ et intégrons sur toute la surface. En remarquant que

$$\int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau = 0,$$

nous trouvons, en vertu des conditions (1), $a = 0$. On démontrerait de même que $b = c = 0$. Si, d'autre part, nous multiplions les deux membres de l'équation (8) par $[x\cos(nz) - z\cos(nx)]\,ds$, et si nous intégrons sur toute la surface, en remarquant que

$$\int \left(x\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial x}\right) d\tau = 0,$$

nous obtenons l'équation

$$\omega_x(S_z\omega_z - P_x\omega_y - P_y\omega_x) - \omega_z(S_x\omega_x - P_z\omega_y - P_y\omega_z) = 0,$$

laquelle, en vertu des équations (7), donne $\omega_x = 0$, à moins que J ne soit nul. On trouverait exactement de la même manière, pour J non nul, $\omega_y = 0$, et les équations (7) donnent

$$P_x = 0, \qquad P_y = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_z = \frac{J}{S_z}.$$

Les valeurs trouvées pour ω_x, ω_y et ω_z restent évidemment légitimes dans le cas [redacted] $J = 0$. L'équation (8) se ramène donc, dans tous les cas, à la forme

[redacted] $$V + \frac{1}{2}\frac{J^2}{S_z^2}(x^2 + y^2) = \lambda,$$

[redacted] la condition connue, nécessaire et suffisante, pour que le liquide, sous [redacted] considérées ici, puisse tourner comme un corps solide autour de l'axe [redacted] vitesse angulaire $\frac{J}{S_z}$.

[redacted] du liquide, l'axe de rotation, comme on sait, est toujours [redacted] principaux d'inertie du volume occupé par le liquide. Par [redacted] conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$, obtenues plus haut, sont déjà con[redacted] (9) (bien entendu si J n'est pas nul).

[redacted] la constante λ, qui entre dans l'équation (9), on obtient [redacted] par le même procédé qui a servi à démontrer plus haut les éga-

lités $a = 0$ et $\omega_x = 0$, l'expression suivante

$$\lambda = \frac{5}{6} \frac{\omega J + \int V\, d\tau}{Q},$$

Q étant le volume du liquide et $\omega = \frac{J}{S_z}$. Nous désignerons d'une façon générale par ω la vitesse angulaire correspondant à une figure d'équilibre quelconque.

Nous pouvons exprimer le résultat que nous avons obtenu sous la forme suivante :

Pour que la première variation de l'énergie totale s'annule, pour un moment donné des quantités de mouvement $J\rho$, *il est nécessaire et suffisant de donner au liquide une figure telle qu'il puisse tourner, comme un corps solide, autour d'un certain axe, avec la vitesse angulaire* $\frac{J}{S}$, S *étant le moment d'inertie du volume occupé par le liquide par rapport à l'axe de rotation, et de lui communiquer effectivement ce mouvement.*

Il est évident que, sans tenir compte des conditions (1), (2) et (5), nous obtiendrions la même solution pour le problème que nous considérons.

3. En supposant la figure du liquide arbitraire, nous trouvons, par la résolution des équations (7), les valeurs suivantes, pour ω_x, ω_y, ω_z,

$$(10) \qquad \omega_x = J\frac{P_x P_z + S_y P_y}{D}, \qquad \omega_y = J\frac{P_y P_z + S_x P_x}{D}, \qquad \omega_z = J\frac{S_x S_y - P_z^2}{D}$$

où

$$(11) \qquad D = S_x S_y S_z - S_x P_x^2 - S_y P_y^2 - S_z P_z^2 - 2 P_x P_y P_z.$$

Partout, dans la suite, nous entendrons par ω_x, ω_y et ω_z, précisément ces valeurs.

Posons, dans un mouvement quelconque du liquide satisfaisant aux conditions (3),

$$u = \omega_y z - \omega_z y + u_1, \qquad v = \omega_z x - \omega_x z + v_1, \qquad w = \omega_x y - \omega_y x + w_1.$$

Nous aurons, d'après cela,

$$T = \tfrac{1}{2} J\omega_z + \tfrac{1}{2}\int (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\, d\tau$$

et l'équation (4) prendra la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\int(u_1^2+v_1^2+w_1^2)\,d\tau+\Pi=H, \tag{12}$$

où Π est une expression dépendant seulement de la figure du liquide et de la position qu'il occupe, savoir :

$$\Pi=\frac{1}{2}\left(J^2\frac{S_x S_y-P_z^2}{D}-\int V\,d\tau\right). \tag{13}$$

Il est important, pour ce qui suit, d'appeler l'attention sur ce fait que cette expression ne change pas de valeur pour une rotation du liquide autour de l'axe des z, et quand $J=0$, pour un déplacement d'ensemble arbitraire. Ce dernier point est évident; pour ce qui concerne le premier, nous nous convainquons de son exactitude en remarquant que l'expression (11), comme on le sait par la théorie des moments d'inertie, conserve sa valeur après une rotation quelconque du liquide autour de l'origine des coordonnées, et que l'expression $S_x S_y - P_z^2$ se comporte de la même manière pour une rotation autour de l'axe des z. Ainsi Π n'a qu'une seule valeur entièrement déterminée pour toute figure donnée du liquide, pour toute position donnée de celui-ci par rapport à l'axe des z, et pour tout J donné.

Comme toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire u_1, v_1 et w_1 sont remplies, pour toute figure du liquide, par les valeurs $u_1=v_1=w_1=0$, l'équation (12) conduit à la conclusion que, pour que l'on puisse communiquer au liquide un mouvement annulant la première variation de H, pour un moment donné des quantités de mouvement $J\rho$, dont la direction est prise pour axe des z, il est nécessaire et suffisant de donner au liquide une figure et une position par rapport à l'axe des z, telles que la première variation de Π s'annule, sous la condition de l'invariabilité du volume (que nous sous-entendrons toujours) et sous les conditions (1) (dont on peut d'ailleurs ne pas tenir compte). D'après cela, l'équation

$$\delta\Pi=0$$

est équivalente à celle (9).

Nous arrivons ainsi à cette conclusion que, pour toute figure d'équilibre, correspondant au moment des quantités du mouvement $J\rho$, pour laquelle l'axe des z sert d'axe de rotation au liquide, Π, sous les conditions (1), est minimum, maximum ou minimum-maximum; quand Π est minimum, H ne peut être aussi que minimum; mais quand Π n'est pas minimum, H ne peut être que minimum-maximum, le cas où H est maximum étant évidemment impossible.

Dans les numéros suivants, nous nous proposons de montrer que le minimum de Π correspond à une figure d'équilibre stable, et dans ce qui précède nous avons voulu seulement montrer le lien qui existe entre notre recherche et la

théorie générale de la stabilité du mouvement, dans laquelle on est conduit au principe énoncé dans la nouvelle édition de la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait ([1]), pour le cas du mouvement d'un liquide que nous considérons, sous la forme suivante :

« When the energy with given moment of momentum is either a minimum or a maximum, the kinetic equilibrium is clearly stable, if the liquid is perfectly inviscid. It seems probable that it is essentially unstable, when the energy is a minimax ([2]). »

4. Il est nécessaire avant tout de donner une définition précise de ce que nous entendrons par *figure d'équilibre stable*. Pour cela, nous devons convenir d'abord des termes dont nous nous servirons et indiquer les hypothèses que nous ferons.

Imaginons une surface, invariablement liée au centre d'inertie du liquide (ou, ce qui est la même chose, à l'origine des coordonnées x, y, z), que nous supposerons telle qu'elle puisse servir de surface au liquide, tournant comme un corps solide autour de l'axe des z, avec une vitesse angulaire ω. Nous supposerons que cette surface peut tourner autour de l'origine des coordonnées, mais, pour ω non nul, nous ne considérerons comme *possibles* que des rotations autour de l'axe des z, tandis que, pour $\omega = 0$, toutes les rotations autour de l'origine seront supposées possibles. Nous appellerons, dans la suite, cette surface invariable de forme, mais variable en position, une *surface d'équilibre*.

Nous supposerons toujours la surface d'équilibre, que nous aurons à considérer, telle qu'en un quelconque de ses points la direction de la normale change d'une manière continue, pour un déplacement continu de ce point sur la surface, et telle que les courbures de ses sections normales restent partout finies. En outre, nous supposerons que cette surface n'ait pas de points à distance infinie du centre d'inertie du liquide.

Supposons que l'on trouble le mouvement du liquide qui conservait une certaine figure d'équilibre, et considérons la surface du liquide à un instant quelconque du mouvement troublé. Envisageons les droites qui joignent un point quelconque de cette surface à tous les points de la surface d'équilibre dans une quelconque de ses positions *possibles*, et choisissons le plus petit de tous les segments de ces droites entre le point pris sur la surface du liquide et un point quelconque de la

---

([1]) W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural Philosophy*. Vol. I, Part. II, 1883, p. 335.

([2]) « Quand l'énergie, pour un moment donné des quantités de mouvement, est minimum ou maximum, l'équilibre cinétique d'un liquide parfait est évidemment stable. Il paraît probable qu'il est essentiellement instable, quand l'énergie est minimum-maximum. »

surface d'équilibre. Ce segment représentera la normale la plus courte abaissée, du point considéré de la surface du liquide, sur la surface d'équilibre. Nous appellerons le point de la surface d'équilibre où cette normale rencontre pour la *première fois* cette surface, *la base* de la normale, et le point correspondant pris sur la surface du liquide, le *sommet* de la normale. Nous désignerons par n le segment considéré, et nous le regarderons comme positif, ou comme négatif, selon que son sommet se trouve du côté intérieur ou du côté extérieur de la surface d'équilibre, en appelant, cela s'entend, côté intérieur celui où se trouve le liquide dans le mouvement non troublé. En considérant *tous* les points de la surface du liquide, nous trouverons la plus grande des valeurs numériques de tous les n. Nous désignerons cette quantité positive par N et nous l'appellerons *l'écart entre la surface du liquide et la surface d'équilibre pour une position donnée de cette dernière*. En général, N variera quand changera de position la surface d'équilibre. En choisissant parmi toutes les valeurs de N, correspondant à toutes les positions *possibles* de la surface d'équilibre, *la plus petite de toutes*, nous aurons ce que nous nommerons plus loin *l'écart entre la surface du liquide et la surface d'équilibre* et ce que nous désignerons par ε.

Nous considérerons encore une quantité caractérisant, jusqu'à un certain point, la déviation que subit la figure du liquide à partir de la figure d'équilibre. Soit, comme précédemment, Q le volume du liquide, et q le plus grand volume dont tous les points sont intérieurs tant à la surface du liquide qu'à la surface d'équilibre dans l'une de ses positions possibles. La différence $Q - q$ variera en général, quand variera la position de la surface d'équilibre. *La plus petite de toutes* les valeurs prises par elle, pour toutes les positions *possibles* de cette surface, sera appelée *déviation de la figure du liquide à partir de la figure d'équilibre*, et nous la désignerons par Δ.

Si l'on considère toutes les surfaces possibles du liquide, dont les écarts à partir de la surface d'équilibre sont égaux à une quantité donnée ε, il est évident que, pour ces surfaces, Δ peut avoir toutes les valeurs comprises entre zéro et une certaine limite, dépendant de ε, qui s'annulera pour $\varepsilon = 0$. Toute fonction continue de ε, n'admettant que des valeurs que peut recevoir Δ pour le même ε, et s'annulant *seulement* pour $\varepsilon = 0$, sera appelée *déviation possible*, et nous la désignerons par $\varphi(\varepsilon)$.

Il est important, pour la suite, d'attirer l'attention sur la circonstance suivante. En vertu des hypothèses faites sur la continuité du mouvement, la surface du liquide variera d'une manière continue avec le cours du temps et sera constituée toujours des mêmes points du liquide. Par conséquent, ε *et* Δ *seront des fonctions continues du temps*.

Il est évident que, pour N suffisamment petit, à chaque point de la surface du liquide correspond seulement un point de la surface d'équilibre comme *base de*

normale, et qu'en outre *chaque* point de la surface d'équilibre est la base d'une normale correspondant à un certain point de la surface du liquide. Ceci résulte directement des hypothèses énoncées plus haut, relativement à la surface d'équilibre. Donc, N étant assez petit, n peut être considéré comme une fonction des points de la surface d'équilibre. En supposant toujours les troubles assez petits pour que la condition ci-dessus soit satisfaite pour la position où $N = \varepsilon$, nous ne considérerons tout mouvement troublé que tant qu'elle n'est pas dérangée.

Considérons une surface quelconque du liquide, pour laquelle la condition que nous venons d'énoncer est satisfaite pour une certaine position de la surface d'équilibre, et supposons que cette surface varie de telle manière que tous les n varient en chaque point de la surface d'équilibre d'une manière continue selon une loi quelconque, qui doit seulement satisfaire à la condition que N diminue d'une manière continue, en tendant vers zéro. Nous appellerons une surface variant ainsi, *une surface tendant d'une manière continue vers la surface d'équilibre.* Nous parlerons aussi des figures du liquide, tendant d'une façon continue vers la figure d'équilibre.

En passant maintenant à la définition de la stabilité, nous devons préalablement dire que l'expression *force vive du mouvement relatif* qui s'y rencontrera, désigne la force vive dans le mouvement du liquide relativement au milieu invariablement lié à son centre d'inertie et possédant une vitesse angulaire géométriquement égale à celle que possédait le liquide dans le mouvement non troublé.

Définition. — *Communiquant aux molécules d'un liquide, qui conservait une des figures d'équilibre, des déplacements et des vitesses quelconques, considérons le mouvement troublé qui s'ensuit. Si l'écart initial entre la surface du liquide et la surface d'équilibre et la valeur initiale de la force vive du mouvement relatif, pour toutes les autres données initiales possibles* (¹), *peuvent être choisis suffisamment petits pour que la force vive du mouvement relatif du liquide et l'écart entre sa surface et la surface d'équilibre restent inférieurs à certaines limites données à l'avance, quelque petites que soient ces dernières, pendant toute la durée du mouvement, ou au moins tant que la déviation de la figure du liquide à partir de la figure d'équilibre ne devient pas inférieure à une certaine déviation possible donnée à l'avance, quelque petites que soient toutes les valeurs de cette dernière, la figure considérée sera dite* STABLE.

(¹) Ces données initiales ne doivent pas être entièrement arbitraires : elles doivent être telles que le mouvement qui s'ensuit possède une certaine continuité, au moins tant que la figure du liquide ne s'écarte pas trop de la figure d'équilibre. Cette condition doit être toujours sous-entendue.

Si, pour la figure d'équilibre considérée, le mouvement, du caractère qui vient d'être défini, ne se produit que pour des déplacements et des vitesses à l'instant initial satisfaisant à certaines conditions, qui permettent de les choisir arbitrairement petits, nous dirons que cette figure d'équilibre est stable relativement aux données initiales satisfaisant à ces conditions. Des exemples d'une telle *stabilité conditionnelle* seront donnés au Chapitre III.

5. Nous passons maintenant à la démonstration du principe sur lequel sera basée toute notre étude, et nous nous servirons pour cela de la méthode à l'aide de laquelle Lejeune-Dirichlet a démontré le principe de Lagrange ramenant la recherche de la stabilité de l'équilibre d'un système conservatif quelconque de points à la recherche d'un minimum du potentiel.

Le principe que nous avons l'intention de démontrer est le suivant :

Théorème fondamental. — *Si, pour une figure d'équilibre correspondant à un moment des quantités de mouvement* J_φ, *a lieu un minimum de* Π *sous les conditions* (1), *cette figure d'équilibre est stable.*

Avant tout, on doit dire ce qu'il faut entendre ici par un minimum de Π. Nous avons vu que Π ne change pas, pour une rotation d'ensemble du liquide autour de l'axe des z quand J diffère de zéro, et pour toute rotation d'ensemble autour de l'origine des coordonnées quand $J = 0$. Donc, dans la recherche du minimum de Π, on doit éliminer les déplacements se réduisant à ces rotations; c'est ce que l'on pourra faire en introduisant la condition que Δ ne soit pas nul. Par conséquent, si Π_m est la valeur de Π pour la figure d'équilibre considérée, l'affirmation que Π_m est un minimum de Π indique que, pour toute figure du liquide tendant d'une manière continue vers la figure d'équilibre, et pour laquelle Δ s'annule seulement pour $N = 0$, on peut trouver une limite N_0 telle que toutes les valeurs prises par la différence $\Pi - \Pi_m$, pour les variations de cette figure du liquide de $N = N_0$ à $N = 0$, resteront positives, en ne s'annulant que pour $N = 0$.

Nous concluons de là que, $\varphi(\varepsilon)$ étant une fonction donnée représentant une déviation possible, on peut, quelle que soit cette fonction, trouver une limite E telle que, pour toute figure du liquide pour laquelle $\varepsilon < E$ et $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$, la différence $\Pi - \Pi_m$ soit positive, en ne s'annulant que pour $\varepsilon = 0$ [1]. Ce point constituera le fond de toute la démonstration [2].

---

[1] Il est évident que, pour toute valeur donnée de ε, la différence $\Pi - \Pi_m$ peut être rendue aussi petite qu'on veut, par le choix d'une figure telle que Δ soit suffisamment petit. C'est pour écarter cet inconvénient que l'on a introduit la condition $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$.

[2] On voit que ce point n'est pas établi. L'auteur l'admet comme une conséquence de la notion du minimum; mais on doit avouer que, dans la question considérée, cette notion est assez obscure. L.

En ce qui concerne les conditions (1) énoncées dans le théorème, elles sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque nous ne considérons que le mouvement du liquide relativement à son centre d'inertie. Ces conditions ne joueront aucun rôle dans la démonstration, mais nous verrons dans la suite qu'elles sont *nécessaires* pour la possibilité d'un minimum de Π. A ces conditions, on doit d'ailleurs ajouter la condition de l'invariabilité du volume, qui est toujours sous-entendue.

Désignons par $\mathfrak{T}_\rho$ la force vive du mouvement relatif du liquide, et par ε^0 et $\mathfrak{T}^0$ les valeurs initiales de ε et de $\mathfrak{T}$, en convenant, d'une manière générale, de désigner les valeurs initiales de toutes les quantités considérées par les mêmes lettres avec l'indice o en haut. D'après notre définition de la stabilité, notre théorème sera démontré si l'on prouve que, quelque petites que soient les quantités positives e et σ et quelle que soit la fonction $\varphi(\varepsilon)$ donnée satisfaisant aux conditions connues, la condition énoncée dans ce théorème donne toujours la possibilité de choisir les données initiales ε^0 et $\mathfrak{T}^0$ assez petites pour que, pour toutes les autres données initiales possibles satisfaisant à la condition $\Delta^0 \geqq \varphi(\varepsilon^0)$, pendant toute la durée du mouvement du liquide qui s'ensuit, tant que la condition

$$\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$$

n'est pas troublée, les inégalités

$$\varepsilon < e \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{T} < \sigma^2$$

restent satisfaites.

En désignant, comme précédemment, par ω, la vitesse angulaire correspondant à la figure d'équilibre considérée, nous poserons

$$u = \mathfrak{u} - \omega y, \qquad v = \mathfrak{v} + \omega x,$$

de sorte qu'il viendra

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\int (\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + w^2)\, d\tau,$$

et nous introduirons de plus les notations suivantes :

$$\int (wy - \mathfrak{v}z)\, d\tau = \xi, \qquad \int (\mathfrak{u}z - wx)\, d\tau = \eta, \qquad \int (\mathfrak{v}x - \mathfrak{u}y)\, d\tau = \zeta.$$

En outre, nous poserons, comme au n° 3,

$$u = \omega_y z - \omega_z y + u_1, \qquad v = \omega_z x - \omega_x z + v_1, \qquad w = \omega_x y - \omega_y x + w_1,$$

mais actuellement, nous considérons des troubles arbitraires pour lesquels, en général, le moment des quantités de mouvement doit varier. Par suite, u_1, v_1 et w_1

doivent satisfaire aux relations

$$\int (w_1 y - v_1 z)\, d\tau = \alpha, \qquad \int (u_1 z - w_1 x)\, d\tau = \beta, \qquad \int (v_1 x - u_1 y)\, d\tau = \gamma,$$

où α, β, γ sont des constantes dépendant des données initiales.

Si nous posons maintenant

$$T_1 = \tfrac{1}{2} \int (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\, d\tau,$$

l'équation (4) donnera, au lieu de l'équation (12), la suivante :

$$(14) \qquad T_1 + \Pi = T_1^0 + (\omega_x^0 - \omega_x)\alpha + (\omega_y^0 - \omega_y)\beta + (\omega_z^0 - \omega_z)\gamma + \Pi^0.$$

En remarquant que

$$\alpha = \xi - \omega P_y, \qquad \beta = \eta - \omega P_x, \qquad \gamma = \zeta - J + \omega S_z,$$

on obtient facilement les relations suivantes

$$(15) \qquad \mathfrak{T} = T_1 + \omega_x \alpha + \omega_y \beta + (\omega_z - \omega)\gamma + \tfrac{1}{2}(\omega^2 S_z + J\omega_z - 2J\omega)$$

et

$$(16) \qquad T_1^0 + (\omega_x^0 - \omega_x)\alpha + (\omega_y^0 - \omega_y)\beta + (\omega_z^0 - \omega_z)\gamma$$
$$= \mathfrak{T}^0 - [\omega_x \xi^0 + \omega_y \eta^0 + (\omega_z - \omega)\zeta^0] + \omega\left[\omega_x P_y^0 + \omega_y P_x^0 + (\omega_z - \omega)\left(\frac{J}{\omega} - S_z^0\right)\right]$$
$$- \tfrac{1}{2}(\omega^2 S_z^0 + J\omega_z^0 - 2J\omega).$$

Posons maintenant

$$\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + (\omega_z - \omega)^2} = \theta,$$

$$\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + \left(\frac{J}{\omega} - S_z\right)^2} = P,$$

$$\tfrac{1}{2}(\omega^2 S_z + J\omega_z - 2J\omega) = i$$

et désignons par S le plus grand des moments centraux d'inertie du volume occupé par le liquide à un instant quelconque. On voit facilement que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leqq 2 S T_1 \qquad \text{et} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqq 2 S \mathfrak{T},$$

et, par conséquent, en vertu de l'inégalité

$$(aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 \leqq (a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

l'égalité (15) donne

$$(17)\qquad \mathfrak{T} \leqq T_1 + \theta\sqrt{2S}\sqrt{T_1} + i$$

et l'égalité (14), en vertu de (16), conduit à l'inégalité suivante :

$$(18)\qquad T_1 + \Pi \leqq \mathfrak{T}^0 + \theta\sqrt{2S^0}\sqrt{\mathfrak{T}^0} + \omega\theta P^0 - i^0 + \Pi^0$$

qui aura lieu pendant toute la durée du mouvement.

Il faut remarquer, relativement à toutes les quantités qui entrent dans les inégalités (17) et (18), qu'elles ne dépendent pas de la direction qui peut être prise pour axe des x dans le plan perpendiculaire à l'axe des z, et que d'ailleurs les quantités θ, P et i peuvent être rendues aussi petites qu'on le veut, en choisissant ε suffisamment petit, car les quantités

$$P_x,\quad P_y,\quad \frac{J}{\omega} - S_z,\quad \omega_x,\quad \omega_y \quad\text{et}\quad \omega_z - \omega$$

s'annulent, comme nous le savons, aussitôt que le liquide prend la figure d'équilibre considérée.

En outre, on peut remarquer que, si ε est pris pour quantité infiniment petite du premier ordre, θ et P seront des infiniment petits d'un ordre non inférieur au premier, et i un infiniment petit d'un ordre non inférieur au second. En effet, les formules (10) et (11) donnent

$$\omega_z = \frac{J}{S_z} + \frac{J}{S_z}\,\frac{S_x P_x^2 + S_y P_y^2 + 2P_x P_y P_z}{D}$$

et, par conséquent,

$$i = \frac{\omega^2}{2S_z}\left(\frac{J}{\omega} - S_z\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{J^2}{S_z}\,\frac{S_x P_x^2 + S_y P_y^2 + 2P_x P_y P_z}{D}.$$

On voit aussi par là que i est une quantité positive.

ε' étant une valeur quelconque de ε qui ne dépasse pas e et la limite E dont il a été parlé au commencement de ce numéro, désignons par $\theta_{\varepsilon'}$, $i_{\varepsilon'}$ et $S_{\varepsilon'}$ les plus grandes de toutes les valeurs que prennent θ, i et S, pour toutes les figures possibles du liquide auxquelles correspond $\varepsilon \leqq \varepsilon'$. Puis désignons par $\Pi_{\varepsilon'}$ la plus petite de toutes les valeurs prises par Π, pour toutes les figures possibles pour lesquelles $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon')$. D'après ce que l'on a remarqué plus haut, $\Pi_{\varepsilon'} - \Pi_m$ sera une quantité positive non nulle qui, pour ε' suffisamment petit, peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

Choisissons ε' suffisamment petit pour que l'inégalité

$$(19)\qquad \Pi_{\varepsilon'} - \Pi_m + \theta_{\varepsilon'}\sqrt{2S_{\varepsilon'}}\sqrt{\Pi_{\varepsilon'} - \Pi_m} + i_{\varepsilon'} < \sigma^2$$

soit satisfaite, et ensuite, prenons pour figure initiale une figure quelconque pour laquelle les inégalités

$$\varepsilon^0 < \varepsilon', \qquad \Delta^0 \geqq \varphi(\varepsilon^0), \qquad \Pi_{\varepsilon'} > \Pi^0 + \omega\theta_{\varepsilon'} P^0$$

soient satisfaites.

Si maintenant l'on communique aux molécules du liquide des vitesses relatives suffisamment petites pour que $\mathfrak{T}^0$ satisfasse à la condition

$$\mathfrak{T}^0 + \vartheta_{\varepsilon'} \sqrt{2S^0}\sqrt{\mathfrak{T}^0} < \Pi_{\varepsilon'} - (\Pi^0 + \omega\theta_{\varepsilon'} P^0),$$

l'inégalité (18) conduira à l'inégalité suivante

$$(20) \qquad T_1 + \Pi < \Pi_{\varepsilon'}$$

qui sera satisfaite au moins tant que ε reste inférieur à ε'. Mais la valeur initiale de ε est inférieure à ε', d'après une de nos conditions, et, d'autre part, ε varie d'une manière continue dans le cours du temps (n° 4). Par conséquent, il ne peut devenir supérieur à ε' sans lui devenir préalablement égal. Or, l'égalité $\varepsilon = \varepsilon'$, en vertu de l'inégalité (20), tant que $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$, est évidemment impossible.

Nous arrivons ainsi à la conclusion qu'au moins tant que la condition $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$ est remplie, ε reste inférieur à ε', et l'inégalité (20) donne

$$T_1 < \Pi_{\varepsilon'} - \Pi_m,$$

d'où nous déduisons, en vertu des inégalités (17) et (19), la suivante :

$$\mathfrak{T} < \sigma^2.$$

Notre théorème est par là démontré.

Remarquons que notre démonstration suppose que J n'est pas nul. Mais il est évident qu'il n'est pas besoin de s'arrêter à part sur le cas où $J = 0$ et où, par conséquent, $\omega = 0$.

Si, dans l'étude d'une figure d'équilibre quelconque, correspondant à un moment des quantités de mouvement $J\rho$, il est démontré que Π est minimum pour cette figure, sous les conditions (1), nous pouvons alors affirmer, d'après ce que l'on vient de démontrer, que cette figure d'équilibre est stable. Dans le cas où Π n'est pas minimum, nous ne pouvons rien conclure.

On peut encore ajouter aux conditions (1) d'autres conditions, et, dans certains cas, Π n'étant pas en général minimum, peut le devenir pour ces nouvelles conditions. Si ces dernières sont telles que, pour certaines données initiales, elles peuvent être conservées pendant toute la durée du mouvement, nous pouvons en conclure qu'il y a *stabilité de la figure d'équilibre relativement à ces données initiales.*

6. Nous devons maintenant donner des formules pour l'examen du signe de l'accroissement que reçoit Π, quand on passe de la figure d'équilibre considérée à une figure quelconque du liquide qui en est infiniment voisine. Mais nous nous bornerons à la recherche de l'expression et du signe de la variation seconde de Π, car la recherche des variations d'ordre supérieur, nécessaire dans le cas où la variation seconde s'annule, présente, en général, d'assez grandes difficultés.

Nous ne considérerons maintenant que des figures du liquide tendant d'une manière continue vers la figure d'équilibre, pour lesquelles n n'a qu'une seule valeur en tout point de la surface d'équilibre. D'ailleurs nous pouvons supposer que N reste toujours inférieur au plus petit de tous les rayons de courbure des sections normales principales de la surface d'équilibre. Dans ces conditions, si nous désignons par R_1 et R_2 les rayons de courbure des sections normales principales de cette surface, en un des points (x, y, z) de son élément ds, ces rayons étant considérés comme positifs, si la surface est convexe du côté extérieur dans le voisinage de ce point, et comme négatifs, dans le cas contraire, la condition de l'invariabilité du volume du liquide s'exprimera de la façon suivante :

$$(21)\qquad \int ds\int_0^n \left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha = \int\left[n-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{n^2}{2}+\frac{1}{R_1R_2}\frac{n^3}{3}\right]ds = 0,$$

en convenant d'entendre par l'intégrale

$$\int F(x, y, z)\,ds \quad \text{ou} \quad \int F(x', y', z')\,ds'$$

une intégrale s'étendant à toute la surface d'équilibre. De même, les conditions (1) conduiront aux égalités

$$(22)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int ds\int_0^n [x+\alpha\cos(nx)]\left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha = 0, \\ \displaystyle\int ds\int_0^n [y+\alpha\cos(ny)]\left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha = 0, \\ \displaystyle\int ds\int_0^n [z+\alpha\cos(nz)]\left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha = 0. \end{cases}$$

Pour toute loi donnée suivant laquelle la surface considérée doit tendre vers la surface d'équilibre, n sera une certaine fonction de N, et, pour fixer les idées, nous pouvons convenir ici, en considérant toute expression dépendant de la figure du liquide, comme une fonction de N, d'entendre, par sa variation d'un ordre quelconque m le terme en N^m multiplié par $1.2.3\ldots m$, dans son développement suivant les puissances de N, arrêté à un terme complémentaire d'un ordre

plus élevé. Si, dans cet ordre d'idées, nous désignons par δn la première variation de n, et si nous posons

$$n = \delta n + n_1,$$

n_1 représentera une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, en convenant toujours de prendre N pour infiniment petit du premier ordre. Les égalités (21) et (22) permettent de trouver les équations conditionnelles auxquelles doivent satisfaire les variations d'ordre quelconque de n considérées comme fonctions d'un point de la surface d'équilibre. Mais il nous suffira d'avoir seulement les équations auxquelles doit satisfaire la variation du premier ordre de n, savoir

$$(23) \qquad \int \delta n \, ds = 0,$$

$$(24) \qquad \int x\, \delta n \, ds = 0, \qquad \int y\, \delta n \, ds = 0, \qquad \int z\, \delta n \, ds = 0.$$

L'expression (13) peut être représentée sous la forme suivante

$$\Pi = A + B$$

où

$$A = \frac{1}{2}\left(\omega^2 S_z + \frac{J^2}{S_z}\right) + \frac{1}{2}\frac{J^2}{S_z}\frac{S_x P_x^2 + S_y P_y^2 + 2 P_x P_y P_z}{D}$$

et

$$B = -\frac{1}{2}\left(\omega^2 S_z + \int V\, d\tau\right).$$

En ce qui concerne le premier terme A, la recherche de sa variation d'un ordre quelconque ne présente aucune difficulté. En remarquant que, pour la figure d'équilibre considérée,

$$\frac{J^2}{S_z^2} = \omega^2, \qquad P_x = 0 \qquad \text{et} \qquad P_y = 0,$$

nous trouvons immédiatement $\delta A = 0$. Si nous supposons encore la surface d'équilibre amenée à une position pour laquelle $P_z = 0$, nous trouvons

$$\delta^2 A = \frac{\omega^2}{S_z}\left[\int (x^2 + y^2)\, \delta n\, ds\right]^2 + \frac{\omega^2}{S_x}\left(\int xz\, \delta n\, ds\right)^2 + \frac{\omega^2}{S_y}\left(\int yz\, \delta n\, ds\right)^2.$$

En ce qui concerne le second terme B, nous y rencontrons une intégrale dans laquelle la fonction à intégrer devient infinie dans les limites de l'intégration, et, bien que la recherche de sa première variation ne présente pas de difficultés, pour le calcul de la seconde, il est nécessaire de recourir à son accroissement. Comme on aura évidemment $\delta B = 0$, notre problème consistera ici à trouver pour

cet accroissement une expression de la forme

$$\Delta B = \tfrac{1}{2} b N^2 + \beta N^2,$$

où b est une quantité indépendante de N, et β une quantité à l'égard de laquelle il nous suffira de montrer qu'elle tend vers zéro en même temps que N; quand ceci sera établi, bN^2 représentera la seconde variation cherchée de B, dont le signe déterminera le signe de l'accroissement infiniment petit de B.

Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux points de la surface d'équilibre, et désignons par $r(\alpha, \alpha')$ la distance entre les points dont les coordonnées sont

$$x + \alpha\cos(nx), \quad y + \alpha\cos(ny), \quad z + \alpha\cos(nz)$$

et

$$x' + \alpha'\cos(n'x), \quad y' + \alpha'\cos(n'y), \quad z' + \alpha'\cos(n'z),$$

en convenant de désigner $r(\alpha, 0)$ et $r(0, 0)$ respectivement par $r(\alpha)$ et r. Puis désignons par $U(\alpha)$ la valeur, pour le premier de ces points, de la fonction à laquelle se réduit l'expression

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

quand la surface du liquide se confond avec la surface d'équilibre. D'après cela, $U(0)$ représentera la constante λ qui figure dans l'équation (9).

Avec les notations adoptées, nous trouvons, pour l'accroissement de B, l'expression suivante :

$$\Delta B = C - \tfrac{1}{2} f\rho D$$

où

$$C = \int ds \int_0^n U(\alpha)\left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right) d\alpha$$

et

$$D = \int ds \int_0^n \left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right) d\alpha \int ds' \int_0^{n'} \left(1 - \frac{\alpha'}{R'_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha'}{R'_2}\right) \frac{d\alpha'}{r(\alpha, \alpha')}.$$

On sait, par la théorie de la fonction potentielle, que $U(\alpha)$ et $\frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha}$ sont des fonctions continues de α, et que $\frac{\partial^2 U(\alpha)}{\partial \alpha^2}$ reste aussi une fonction continue, tant que α ne passe pas par zéro, mais que, bien qu'elle éprouve à ce passage une discontinuité, cependant, pour les conditions indiquées plus haut relativement à la surface d'équilibre, elle ne devient pas infinie. Par suite, nous pouvons ordonner la fonction de n, entrant sous le signe de l'intégrale dans l'expression de C, en série de puissances entières positives de n, au moins jusqu'au terme

en n^2 inclusivement. Si donc nous représentons par $\frac{\partial U}{\partial n}$ la valeur de la dérivée $\frac{\partial U(n)}{\partial n}$ pour $n = 0$, nous obtenons ainsi

$$(25)\quad \int_0^n U(\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha = \lambda n + \left[\frac{\partial U}{\partial n} - \lambda\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]\frac{n^2}{2} + K n^3,$$

où K est une quantité à l'égard de laquelle il nous suffit de savoir que c'est une fonction de n restant finie pour toute valeur de n quelque petite qu'elle soit. En nous servant de l'égalité (21), nous tirons de (25) l'expression suivante pour C :

$$C = \frac{1}{2}\int \frac{\partial U}{\partial n} n^2\, ds + \int\left(K - \frac{\lambda}{3R_1R_2}\right) n^3\, ds,$$

d'où

$$\delta^2 C = \int \frac{\partial U}{\partial n}(\delta n)^2\, ds.$$

Arrivons maintenant à la transformation de l'expression de D.

a étant une constante donnée, décrivons du point (x, y, z) de la surface d'équilibre une sphère de rayon $aN^{\frac{2}{3}}$, et de tous les points de sa ligne d'intersection avec cette surface, menons les normales jusqu'à leur intersection la plus proche avec la surface du liquide. Nous détacherons ainsi de l'espace compris entre la surface du liquide et la surface d'équilibre un volume dont la plus grande dimension sera évidemment une quantité infiniment petite d'ordre $\frac{2}{3}$. Nous désignerons cette plus grande dimension par $HN^{\frac{2}{3}}$, où H, par conséquent, restera fini pour tous les points de la surface d'équilibre, quelque petit que soit N. En outre, on voit facilement que la plus courte des distances entre un point quelconque du volume considéré, qui se trouve sur la normale au point (x, y, z), et un point quelconque d'une des normales relatives à la ligne d'intersection de la sphère avec la surface d'équilibre, est également une quantité infiniment petite d'ordre $\frac{2}{3}$. Nous désignerons cette plus courte distance par $hN^{\frac{2}{3}}$, où h, pour $N = 0$, ne s'annulera pas (il est évident que $\lim h = a$).

Si nous convenons que

$$\int^{*} F(x', y', z')\, ds'$$

est une intégrale qui s'étend à toute la surface d'équilibre, à l'exception de la partie qui se trouve à l'intérieur de la sphère considérée, nous pouvons pré-

senter l'expression de D sous la forme de la somme suivante :

$$D = \int ds \int_0^n \left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right) d\alpha \int^0 ds' \int_0^{n'} \left(1 - \frac{\alpha'}{R'_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha'}{R'_2}\right) \frac{d\alpha'}{r(\alpha, \alpha')}$$
$$+ \int ds \int_0^n G\left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right) d\alpha,$$

où G est la fonction potentielle, au point dont les coordonnées sont $x + \alpha\cos(nx)$, $y + \alpha\cos(ny)$, $z + \alpha\cos(nz)$, de la masse remplissant le volume défini plus haut avec la densité $+1$ ou -1. En tout cas c'est une quantité dont la valeur numérique ne peut dépasser $2\pi H^2 N^{\frac{4}{3}}$. On voit par là que le second terme de l'expression de D représente une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au second, et que nous devons par conséquent nous adresser au premier terme. Or, il suffit évidemment, pour cela, de considérer l'expression

$$\int n\, ds \int^0 \frac{n'\, ds'}{r(\theta n, \theta' n')}$$

où θ et θ' sont des fractions positives, et cette expression peut être présentée sous la forme :

$$\int n\, ds \int^0 \frac{n'\, ds'}{r} + \int n\, ds \int^0 \frac{r - r(\theta n, \theta' n')}{r(\theta n, \theta' n')} \frac{n'\, ds'}{r}. \tag{26}$$

Mais, d'après ce que l'on a remarqué plus haut,

$$r(\theta n, \theta' n') > h N^{\frac{2}{3}}$$

et, d'autre part, il est évident qu'en valeur numérique,

$$[r - r(\theta n, \theta' n')] < 2N.$$

Par conséquent, la valeur numérique du second terme de l'expression (26) est inférieure à

$$2N^{\frac{7}{3}} \int \frac{ds}{h} \int \frac{ds'}{r},$$

et le problème se ramène à l'examen du premier terme qui, comme on sait, diffère, par un infiniment petit d'ordre supérieur, de l'expression

$$\int\int \frac{nn'\, ds\, ds'}{r}.$$

Nous trouvons ainsi

$$\delta^2 D = 2 \int\int \frac{\delta n\, \delta n'\, ds\, ds'}{r},$$

et nous obtenons, pour la seconde variation cherchée de Π, l'expression suivante :

(27) $$\delta^2\Pi = \int \frac{\partial U}{\partial n} (\delta n)^2 \, ds - f\rho \int\int \frac{\delta n \, \delta n' \, ds \, ds'}{r} + \Omega + W,$$

où

(28) $$\Omega = \frac{\omega^2}{S_z} \left[\int (x^2 + y^2) \, \delta n \, ds \right]^2$$

et

$$W = \frac{\omega^2}{S_x} \left(\int xz \, \delta n \, ds \right)^2 + \frac{\omega^2}{S_y} \left(\int yz \, \delta n \, ds \right)^2.$$

7. Il est assez difficile de dire quelque chose de général au sujet de l'expression (27). En nous appuyant sur ce qui a été dit à l'égard de Π au n° 3, nous pouvons seulement affirmer que cette expression s'annulera toujours, quand la variation δn se ramènera, pour ω différent de zéro, à la forme

(29) $$\delta n = [x \cos(ny) - y \cos(nx)] \theta_z,$$

et pour $\omega = 0$ à la forme

(30) $$\begin{aligned} \delta n = \; & [y \cos(nz) - z \cos(ny)] \theta_x \\ & - [z \cos(nx) - x \cos(nz)] \theta_y + [x \cos(ny) - y \cos(nx)] \theta_z, \end{aligned}$$

où $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ sont des quantités indépendantes de x, y, z. Dans le numéro suivant, nous rechercherons le signe de l'expression (27) dans certaines hypothèses particulières relativement à la variation δn, et actuellement nous remarquerons seulement que, dans tous les cas auxquels nous aurons affaire, son premier terme sera positif et le second négatif.

A l'égard de l'expression $\frac{\partial U}{\partial n}$, qui se trouve sous le signe de l'intégrale dans le premier terme, on doit remarquer qu'elle représente l'accélération de la pesanteur observée à la surface du liquide, au point (x, y, z), et que sa valeur numérique est égale à

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Nous pouvons maintenant tirer de tout ce qui précède le criterium suivant de la stabilité (il ne renferme, cela s'entend, que des conditions suffisantes, mais non nécessaires) :

Si, pour une figure d'équilibre correspondant à la vitesse angulaire ω, l'expression (27) reste positive pour toutes les valeurs possibles de δn satisfai-

sant aux équations (23) *et* (24), *en s'annulant seulement quand* δn *se ramène, pour* ω *différent de zéro, à la forme* (29), *et, pour* $\omega = 0$, *à la forme* (30), *cette figure d'équilibre sera stable.*

Il faut remarquer que, dans la suite, nous appellerons souvent δn déplacement normal du point (x, y, z) de la surface du liquide, parce que le rapport $\frac{\delta n}{n}$ a pour limite 1.

L'expression (27) ne diffère que par le terme W et par un facteur constant de l'expression qu'a trouvée Liouville ([1]) pour l'accroissement de la force vive du mouvement du liquide, en supposant que la figure d'équilibre qu'il conservait subît des troubles infiniment petits, et en considérant le mouvement du liquide relativement à un milieu invariable qui tourne autour de l'axe des z avec une vitesse angulaire constante ω ou avec une vitesse variable $\frac{J}{S_z}$. Dans le premier de ces cas, le terme Ω disparaît dans la formule (27).

Quant au terme W, il ne jouera, comme nous le verrons, aucun rôle dans la recherche de la stabilité des *ellipsoïdes,* qui constitue notre problème principal. Le terme Ω aura, au contraire, une grande importance, surtout pour les ellipsoïdes de Jacobi.

8. Nous rechercherons maintenant le signe de l'expression (27) dans deux hypothèses particulières relativement aux déplacements (pour parler rigoureusement, relativement aux variations des déplacements).

Nous supposerons d'abord que tous les déplacements des points du liquide sont des déplacements qu'admet un système invariable. Mais nous ne supposerons pas actuellement que l'on ait les équations (24), et nous poserons

$$\delta n = \cos(nx)\,\delta x + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z,$$

où

$$(31)\quad \delta x = \varepsilon_x + \theta_y z - \theta_z y, \qquad \delta y = \varepsilon_y + \theta_z x - \theta_x z, \qquad \delta z = \varepsilon_z + \theta_x y - \theta_y x,$$

ε_x, θ_x, ... étant des quantités qui ne dépendent pas de x, y, z.

En remarquant que

$$\frac{\partial U}{\partial n}\delta n = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z$$

([1]) Formules générales relatives à la question de la stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe (*Journal de Liouville*, t. 20, 1855).

et qu'en vertu des expressions (31),

$$\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z-f\rho\int\frac{\delta n'\,ds'}{r}=0,$$

nous trouvons

$$\delta^2\Pi=\omega^2\int(x\,\delta x+y\,\delta y)\,\delta n\,ds+\Omega+W,$$

ce qui, d'après les conditions (1) et les égalités $P_x=0$, $P_y=0$, $P_z=0$, se ramène à la forme suivante :

$$(32)\qquad \begin{aligned}\delta^2\Pi+\omega^2 Q(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2)&=\omega^2(S_z-S_y)\,\theta_x^2+\omega^2(S_z-S_x)\,\theta_y^2+W\\&=\omega^2\frac{S_z}{S_y}(S_z-S_y)\theta_x^2+\omega^2\frac{S_z}{S_x}(S_z-S_x)\theta_y^2.\end{aligned}$$

On voit par là que la seconde variation de Π est égale à zéro pour tous les déplacements hélicoïdaux autour de l'axe des z, qu'*elle est négative pour des déplacements de translation perpendiculaires à cet axe,* et que, pour des rotations autour d'axes perpendiculaires à l'axe des z, elle peut être aussi bien positive que négative, mais qu'elle sera toujours *positive, si l'axe de rotation du liquide est l'axe du plus grand moment d'inertie du volume qu'il occupe,* ce qui, comme on sait, a lieu pour toutes les figures ellipsoïdales d'équilibre.

L'égalité (32) montre que les inégalités

$$(33)\qquad S_z>S_x\quad\text{et}\quad S_z>S_y$$

sont des conditions nécessaires pour que $\delta^2\Pi$ reste positif, pour tous les δn satisfaisant aux conditions (23) et (24). En s'appuyant sur cela, on peut démontrer que pour que $\delta^2\Pi$, sous les conditions indiquées au numéro précédent, reste toujours positif, il est nécessaire que, sous ces mêmes conditions, $\delta^2\Pi-W$ reste positif.

En effet, δn étant une variation quelconque satisfaisant aux équations (23) et (24), posons

$$(34)\qquad \delta n=[y\cos(nz)-z\cos(ny)]\,\theta_x+[z\cos(nx)-x\cos(nz)]\,\theta_y+\delta n_1$$

et remarquons que, les différences S_z-S_x, S_z-S_y n'étant pas nulles, nous pouvons disposer du choix des constantes θ_x et θ_y, de telle façon que δn_1 satisfasse aux équations

$$\int xz\,\delta n_1\,ds=0\qquad\text{et}\qquad\int yz\,\delta n_1\,ds=0.$$

En le faisant, substituons dans la formule (27), à la place de δn, son expres-

sion (34). Après certaines transformations, nous aurons

$$\delta^2\Pi = \delta^2\Pi_1 + \delta^2\Pi_0,$$

où $\delta^2\Pi_1$ est ce que devient $\delta^2\Pi$, quand on y remplace δn par δn_1, et $\delta^2\Pi_0$ est le second membre de l'égalité (32). Or, de cette expression de $\delta^2\Pi$ il résulte que les inégalités (33) et l'inégalité $\delta^2\Pi_1 > 0$, qui sont *nécessaires* pour que l'inégalité $\delta^2\Pi > 0$ ait lieu, sont en même temps *suffisantes* pour que la condition $\delta^2\Pi - W > 0$ soit satisfaite; d'où ce que l'on a énoncé plus haut.

Par suite de ce qui vient d'être démontré, le terme W dans l'expression (27) n'aura pour nous aucune importance.

Considérons une autre hypothèse particulière relativement aux déplacements.

Supposons que la figure d'équilibre considérée appartienne à une série de figures d'équilibre, ayant un centre d'inertie commun et un axe de rotation commun, et passant *d'une façon continue* de l'une à l'autre par une variation de la vitesse angulaire. Alors, si $\delta\omega$ est l'accroissement infiniment petit de la vitesse angulaire correspondant au passage de la figure d'équilibre considérée à une figure infiniment voisine de cette série, il est facile, d'après l'équation (9), de trouver que la variation δn, correspondant à ce passage, doit satisfaire à l'équation

$$(35) \qquad \frac{\partial U}{\partial n}\delta n - f\rho\int\frac{\delta n'\,ds'}{r} + \omega(x^2+y^2)\,\delta\omega = \frac{5}{3}\,\frac{S_z}{Q}\,\omega\,\delta\omega.$$

En outre, nous savons qu'elle doit également satisfaire aux équations

$$(36) \qquad \int xz\,\delta n\,ds = 0, \qquad \int yz\,\delta n\,ds = 0.$$

En supposant maintenant que tous les déplacements se ramènent à des déplacements tels qu'ils changent la figure d'équilibre considérée dans cette nouvelle figure d'équilibre, l'expression (27), à l'aide des équations (35) et (36), se réduira à celle-ci :

$$\delta^2\Pi = \Omega + \omega\,\delta\omega\,\delta S_z.$$

Or, pour une série donnée de figures d'équilibre, nous pouvons considérer deux des trois quantités S_z, ω, J comme fonctions de la troisième. Par conséquent, cette formule peut être présentée sous la forme

$$(37) \qquad \delta^2\Pi - \Omega = \omega\,\frac{dS_z}{d\omega}(\delta\omega)^2.$$

Si nous nous servons de la formule (28), et si nous prenons J pour variable indépendante, en désignant par δJ son accroissement infiniment petit corres-

pondant au passage à la nouvelle figure d'équilibre, nous obtiendrons encore

$$\delta^2 \Pi = \frac{\omega}{S_z} \frac{dS_z}{dJ} (\delta J)^2. \tag{38}$$

On voit par là que *si, dans le passage de la figure d'équilibre considérée à une figure infiniment voisine, le moment d'inertie relatif à l'axe de rotation et le moment des quantités de mouvement varient dans un même sens, la seconde variation de* Π *sera positive pour les déplacements considérés.*

On sait que, pour les ellipsoïdes de révolution dont l'excentricité ne dépasse pas une certaine limite 0,93..., le moment d'inertie, et par conséquent aussi le moment des quantités de mouvement, croissent quand la vitesse angulaire croît, et que, pour des excentricités supérieures, ils décroissent tous les deux quand cette vitesse croît. On sait aussi que, pour les ellipsoïdes à trois axes, le moment des quantités de mouvement, et par conséquent aussi le moment d'inertie, décroissent constamment, quand la vitesse angulaire croît. On voit par là que, pour tous les ellipsoïdes qui peuvent être des figures d'équilibre, la seconde variation de Π est positive pour les déplacements considérés.

D'après ce que l'on vient de dire, on voit déjà la portée du terme Ω dans la formule (27) : le second membre de l'égalité (37) est négatif pour tous les ellipsoïdes à trois axes et pour les ellipsoïdes de révolution dont les excentricités sont supérieures à 0,93..., tandis que la formule (38) est toujours positive.

En ce qui concerne le terme W, qui, comme nous l'avons vu, ne peut avoir pour nous aucune utilité, nous le laisserons de côté, et partout nous considérerons seulement l'expression

$$\delta^2 \Pi_1 = \delta^2 \Pi - W, \tag{39}$$

dans laquelle le premier membre représente la seconde variation de

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{J^2}{S} - \int V\, d\tau\right) \quad [1].$$

En terminant remarquons que le théorème démontré, relativement à la possibilité de remplacer la recherche du signe de $\delta^2 \Pi$ par la recherche du signe de $\delta^2 \Pi_1$, est contenu, comme cas particulier, dans un autre plus général, sur lequel nous désirons maintenant appeler l'attention.

De l'égalité

$$\Pi = \Pi_1 + \frac{1}{2} \frac{J^2}{S_z} \frac{S_x P_x^2 + S_y P_y^2 + 2 P_x P_y P_z}{D},$$

(1) Comme plus loin S_x et S_y ne se rencontreront point dans nos formules, nous écrirons S au lieu de S_z.

il résulte que, pour que Π soit minimum, sous les conditions (1), il est *suffisant* que Π_1 soit minimum sous ces conditions, et *nécessaire* que Π_1 soit minimum sous les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$. Mais, d'autre part, on s'assure facilement que, si pour la figure d'équilibre considérée les conditions

$$S_z > S_x \quad \text{et} \quad S_z > S_y,$$

sont remplies (ce qui est nécessaire, comme nous savons, pour la possibilité du minimum de Π ou Π_1), Π_1 ne peut être minimum sous les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$, ne l'étant pas sans ces conditions-là. Pour s'en convaincre, il suffit seulement de remarquer que l'on peut passer de chaque figure d'équilibre à toute autre figure du liquide, satisfaisant aux conditions (1), au moyen des deux procédés suivants : 1° déformation de la surface du liquide sous les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$; et 2° rotation de toute la masse liquide, comme un corps solide, autour d'un axe perpendiculaire à l'axe des z.

En vertu de ce que l'on vient de démontrer, dans tous les cas où ne sera donnée aucune dépendance entre la déformation de la surface du liquide sous les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$ et sa rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe des z, la recherche des conditions de minimum de Π sera équivalente à celle de minimum de Π_1 (¹).

Nous finissons par là les raisonnements généraux et nous arrivons à l'étude de la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre. Nous commencerons par le cas le plus simple, celui de la sphère considérée comme figure d'équilibre. Bien que, dans ce cas, le problème ne présente rien de nouveau, et qu'il ne soit d'ailleurs qu'un cas particulier du problème de la stabilité des ellipsoïdes de révolution, il n'est pas moins opportun de commencer par le résoudre d'une manière indépendante, en vue de montrer comment le problème se complique, quand on passe de la sphère aux ellipsoïdes de révolution, et de ces derniers aux ellipsoïdes à trois axes.

CHAPITRE II.

LA STABILITÉ DE LA SPHÈRE.

9. Le seul cas connu jusqu'à présent, dans lequel un liquide, sous l'action des attractions mutuelles entre ses éléments, peut se trouver en équilibre, est celui

(¹) En utilisant cette remarque, on pourrait simplifier considérablement la démonstration du théorème fondamental.

pondant au passage à la nouvelle figure d'équilibre, nous obtiendrons encore

$$(38) \qquad \delta^2 \Pi = \frac{\omega}{S_z} \frac{dS_z}{dJ} (\delta J)^2.$$

On voit par là que *si, dans le passage de la figure d'équilibre considérée à une figure infiniment voisine, le moment d'inertie relatif à l'axe de rotation et le moment des quantités de mouvement varient dans un même sens, la seconde variation de* Π *sera positive pour les déplacements considérés.*

On sait que, pour les ellipsoïdes de révolution dont l'excentricité ne dépasse pas une certaine limite 0,93..., le moment d'inertie, et par conséquent aussi le moment des quantités de mouvement, croissent quand la vitesse angulaire croît, et que, pour des excentricités supérieures, ils décroissent tous les deux quand cette vitesse croît. On sait aussi que, pour les ellipsoïdes à trois axes, le moment des quantités de mouvement, et par conséquent aussi le moment d'inertie, décroissent constamment, quand la vitesse angulaire croît. On voit par là que, pour tous les ellipsoïdes qui peuvent être des figures d'équilibre, la seconde variation de Π est positive pour les déplacements considérés.

D'après ce que l'on vient de dire, on voit déjà la portée du terme Ω dans la formule (27) : le second membre de l'égalité (37) est négatif pour tous les ellipsoïdes à trois axes et pour les ellipsoïdes de révolution dont les excentricités sont supérieures à 0,93..., tandis que la formule (38) est toujours positive.

En ce qui concerne le terme W, qui, comme nous l'avons vu, ne peut avoir pour nous aucune utilité, nous le laisserons de côté, et partout nous considérerons seulement l'expression

$$(39) \qquad \delta^2 \Pi_1 = \delta^2 \Pi - W,$$

dans laquelle le premier membre représente la seconde variation de

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{J^2}{S} - \int V \, d\tau\right) \quad (^1).$$

En terminant remarquons que le théorème démontré, relativement à la possibilité de remplacer la recherche du signe de $\delta^2 \Pi$ par la recherche du signe de $\delta^2 \Pi_1$, est contenu, comme cas particulier, dans un autre plus général, sur lequel nous désirons maintenant appeler l'attention.

De l'égalité

$$\Pi = \Pi_1 + \frac{1}{2} \frac{J^2}{S_z} \frac{S_x P_x^2 + S_y P_y^2 + 2 P_x P_y P_z}{D},$$

(1) Comme plus loin S_x et S_y ne se rencontreront point dans nos formules, nous écrirons S au lieu de S_z.

où il conserve la figure d'une sphère. Examinons la stabilité de cette figure d'équilibre.

Soit R le rayon de la sphère.

Comme dans le cas considéré $\omega = 0$, et par conséquent

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} = \tfrac{4}{3}\pi f \rho R,$$

la formule (27) se réduit à la suivante

$$(1) \qquad \delta^2 \Pi = f\rho\left[\tfrac{4}{3}\pi R \int (\delta n)^2 ds - \int\int \frac{\delta n\, \delta n'\, ds\, ds'}{r}\right].$$

Introduisons, pour les points de la surface de la sphère, les coordonnées sphériques, en posant

$$x = R \sin\theta \cos\psi, \qquad y = R \sin\theta \sin\psi, \qquad z = R\cos\theta.$$

En considérant ensuite δn comme une fonction de θ et ψ, supposons-la telle que l'on ait le développement

$$\delta n = \sum_{m=0}^{m=\infty} Y_m(\theta, \psi),$$

où $Y_m(\theta, \psi)$ est une fonction sphérique de θ et ψ d'ordre m, la série du second membre étant uniformément convergente pour toutes les valeurs de θ comprises entre les limites 0 et π, et pour toutes les valeurs de ψ comprises entre 0 et 2π [1].

Or, en tenant compte des conditions (23) et (24), on trouve

$$Y_0(\theta, \psi) = 0 \qquad \text{et} \qquad Y_1(\theta, \psi) = 0.$$

---

[1] C'est une restriction dont on peut aujourd'hui s'affranchir; car, d'après une proposition générale sur les fonctions sphériques que l'auteur a obtenue il y a sept ans, la formule définitive, celle (2), si l'on entend par les Y_m leurs expressions connues au moyen des intégrales définies renfermant la fonction δn, ne dépend nullement de la possibilité du développement de cette fonction en une série de la forme considérée. Pour la validité de cette formule, il suffit que δn soit une fonction intégrable sur la surface de la sphère. La même remarque s'applique à des formules analogues que l'on rencontrera plus loin, dans l'étude de la stabilité des ellipsoïdes. Pour ce qui concerne les détails, nous renverrons au Mémoire de M. Stekloff : *Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions employées dans l'Analyse* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, t. XV). L'avant-dernier numéro de ce Mémoire est consacré précisément au problème dont il s'agit ici. L.

Nous aurons donc

$$\delta n = \sum_{m=2}^{m=\infty} Y_m(\theta, \psi),$$

et à l'aide de cette expression de δn, nous trouvons

$$\int (\delta n)^2\, ds = \sum_{m=2}^{m=\infty} \int (Y_m)^2\, ds.$$

Si nous nous servons ensuite de la formule connue

$$\int \frac{Y_m(\theta', \psi')\, ds'}{r} = \frac{4\pi R}{2m+1} Y_m(\theta, \psi),$$

nous parviendrons à celle-ci :

$$\int\int \frac{\delta n\, \delta n'\, ds\, ds'}{r} = 4\pi R \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{1}{2m+1} \int (Y_m)^2\, ds.$$

Par suite, la formule (1) prend finalement la forme suivante :

$$(2) \qquad \delta^2 \Pi = \frac{4}{3}\pi f \rho R \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{2m-2}{2m+1} \int (Y_m)^2\, ds.$$

Or cette expression ne peut prendre de valeurs négatives et ne peut évidemment s'annuler, si tous les δn ne sont pas simultanément nuls.

Nous voyons donc que *la sphère est une figure d'équilibre stable* (1).

---

(1) Ce résultat a été trouvé, entre autres, par A. Giesen, dans son Mémoire *Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit*, inséré dans le *Jahresbericht über die höhere Schule in Opladen* de 1872-1873. Il l'obtient comme cas particulier de la solution du problème de la stabilité de l'équilibre d'un liquide sur un noyau solide de forme sphérique.

CHAPITRE III.

LA STABILITÉ DES ELLIPSOIDES DE RÉVOLUTION.

---

10. C'est Newton qui énonça, dans ses *Philosophiae naturalis principia mathematica,* le théorème qu'un liquide animé d'un mouvement de rotation, dont les molécules s'attirent réciproquement en raison inverse du carré des distances, peut conserver la forme d'un ellipsoïde de révolution. Ce théorème fut ensuite démontré par Clairaut ([1]) et par Maclaurin ([2]). Mais l'étude détaillée de ce cas d'équilibre n'a été faite que par Laplace ([3]), et ensuite par Meyer ([4]). Les résultats de ces recherches sont, comme on sait, les suivants :

Les ellipsoïdes de révolution allongés ne peuvent être des figures d'équilibre. Au contraire, tout ellipsoïde de révolution planétaire peut être une figure d'équilibre d'un liquide tournant autour de son axe de révolution. D'ailleurs, à chaque moment des quantités de mouvement correspond toujours un ellipsoïde de révolution et un seul. D'autre part, à toute vitesse angulaire inférieure à une certaine limite $\sqrt{2\pi f \rho}\ \sqrt{0,2246\ldots}$, correspondent deux ellipsoïdes, l'excentricité de l'un d'eux étant inférieure, et l'excentricité de l'autre supérieure à 0,93.... Quand la vitesse angulaire est égale à cette limite, les deux ellipsoïdes se confondent, et, pour des vitesses angulaires supérieures, les figures ellipsoïdales d'équilibre ne sont pas possibles. Si l'on fait croître le moment des quantités de mouvement de zéro à l'infini, l'excentricité croît de zéro à 1, et la vitesse angulaire d'abord croît de zéro à son maximum, puis diminue pour redevenir nulle.

Comme nous verrons plus loin, l'excentricité 0,8126... aura pour nous une importance particulière; c'est pour elle, comme l'on sait, que les ellipsoïdes de révolution passent aux figures ellipsoïdales d'équilibre à trois axes inégaux découvertes par Jacobi.

Nous prendrons l'équation de l'ellipsoïde sous la forme

$$\frac{x^2+y^2}{\lambda^2+1}+\frac{z^2}{\lambda^2}=a^2,$$

([1]) *Phil. Trans.*, 1737. — CLAIRAUT, *Théorie de la figure de la terre*. Paris, 1743 ou 1808.

([2]) MACLAURIN, *Traité des fluxions*, liv. I, chap. XIV.

([3]) LAPLACE, *Traité de Mécanique céleste*, liv. III, chap. III.

([4]) C.-O. MEYER, *De Aequilibrii formis Ellipsoidicis* [*Crelle's J.*, Bd. 24 (1842)].

en supposant λ et a positifs. Alors la condition pour que cet ellipsoïde soit une figure d'équilibre, correspondant à une vitesse angulaire ω ou à un moment des quantités de mouvement $J\rho$, s'exprimera de la manière suivante

$$(1) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \frac{25\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{4}{3}}} \frac{J^2}{f\rho Q^{\frac{10}{3}}} \frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{(\lambda^2+1)^{\frac{2}{3}}} = (3\lambda^2+1)\lambda \operatorname{arc\,cot}\lambda - 3\lambda^2,$$

où $\operatorname{arc\,cot}\lambda$ est supposé ne pas sortir des limites o et $\frac{\pi}{2}$, ce que nous supposerons toujours dans la suite, en nous servant du symbole $\operatorname{arc\,cot}\lambda$ pour λ positif. L'étude de l'équation (1) conduit à tous les résultats énoncés plus haut.

Avant de passer à la recherche de la stabilité de ces ellipsoïdes, nous croyons nécessaire d'attirer l'attention sur certaines propriétés des fonctions sphériques, dont nous nous servirons.

11. Nous nous servirons des notations $P_k^m(x)$, $Q_k^m(x)$ de Heine, pour ce qu'il appelle *Zugeordnete Kugelfunctionen* de première et de seconde espèce. Mais nous aurons aussi affaire à des fonctions à argument imaginaire de la forme $x = i\lambda$, où $i = \sqrt{-1}$, et, pour plus de commodité, nous introduirons encore les notations :

$$(-i)^m P_k^m(i\lambda) = p_k^m(\lambda) \qquad \text{et} \qquad (i)^{m+1} Q_k^m(i\lambda) = q_k^m(\lambda),$$

en faisant des conventions relatives aux signes, comme on le verra d'après les formules citées ci-dessous.

Avant tout, nous allons indiquer quelques expressions de ces fonctions.

En supposant toujours $k \leqq m$, nous pouvons les exprimer à l'aide d'intégrales définies de la manière suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} p_k^m(\lambda) = \dfrac{2^m}{\pi} \dfrac{\Gamma(m+k+1)\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(2m+1)} \displaystyle\int_0^\pi (\sqrt{\lambda^2+1}\cos\varphi + \lambda)^m \cos k\varphi\, d\varphi \ (^1), \\ q_k^m(\lambda) = \dfrac{1}{2^m} \dfrac{\Gamma(2m+2)}{[\Gamma(m+1)]^2} \displaystyle\int_0^{\operatorname{arc\,cot}\lambda} (\sqrt{\lambda^2+1}\cos\varphi - \lambda)^m \cos k\varphi\, d\varphi \quad (^2). \end{cases}$$

Puis, d'après la formule connue,

$$(3) \qquad P_k^m(x) = \frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(2m+1)} (x^2-1)^{\frac{k}{2}} \frac{d^{m+k}(x^2-1)^m}{dx^{m+k}} \quad (^3),$$

(1) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, I. Bd. (2e édition, 1878), p. 207.

(2) *Ibid.*, p. 224.

(3) *Ibid.*, p. 202, 206.

nous aurons

$$(4)\qquad p_k^m(\lambda) = \frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(2m+1)}(\lambda^2+1)^{\frac{k}{2}}\frac{d^{m+k}(\lambda^2+1)^m}{d\lambda^{m+k}}.$$

En remarquant ensuite que les fonctions $p_k^m(\lambda)$ et $q_k^m(\lambda)$ sont des solutions particulières de l'équation différentielle

$$(5)\qquad \frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda^2+1)\frac{du}{d\lambda}\right] - \left[m(m+1) - \frac{k^2}{\lambda^2+1}\right]u = 0 \quad (^1),$$

nous obtenons, pour la fonction $q_k^m(\lambda)$, l'expression suivante :

$$(6)\qquad q_k^m(\lambda) = (2m+1)\,p_k^m(\lambda)\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{[p_k^m(\lambda)]^2(\lambda^2+1)}.$$

Nous appellerons l'attention sur cette circonstance qu'indiquent les formules (4) et (6) que, pour $\lambda > 0$, ce que nous supposerons partout dans la suite, les fonctions $p_k^m(\lambda)$ et $q_k^m(\lambda)$ conservent des valeurs positives, la première ne s'annulant, en outre, jamais et la seconde s'annulant seulement pour $\lambda = \infty$.

Nous indiquerons encore les expressions des fonctions p_k^m et q_k^m sous forme de séries hypergéométriques. Si nous introduisons l'excentricité de l'ellipsoïde (λ),

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}},$$

nous obtiendrons

$$p_k^m(\lambda) = \varepsilon^{-m}\,F\left(-\frac{m+k}{2},\ -\frac{m-k}{2},\ -\frac{2m-1}{2},\ \varepsilon^2\right) \quad (^2),$$

$$q_k^m(\lambda) = \varepsilon^{m+1}\,F\left(\frac{m+k+1}{2},\ \frac{m-k+1}{2},\ \frac{2m+3}{2},\ \varepsilon^2\right).$$

On peut tirer de là le produit $p_k^m q_k^m$ sous forme de série hypergéométrique du second ordre. Pour cela, nous nous servirons d'un résultat des recherches de Clausen (³), qui a démontré que, si $\gamma = \alpha+\beta+\frac{1}{2}$, $\alpha+\alpha' = \frac{1}{2}$, $\beta+\beta' = \frac{1}{2}$ et $\gamma+\gamma' = 2$, on a

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)\,F(\alpha',\beta',\gamma',x) = F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}+\alpha-\beta,\tfrac{1}{2}-\alpha+\beta;\gamma,2-\gamma,x).$$

Nous trouvons ainsi

$$(7)\qquad p_k^m(\lambda)\,q_k^m(\lambda) = \varepsilon\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}-k,\tfrac{1}{2}+k;\tfrac{1}{2}-m,\tfrac{3}{2}+m,\varepsilon^2).$$

(¹) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 1. Bd. (2ᵉ édition, 1878), p. 216.

(²) *Ibid.*, p. 218.

(³) Clausen, *Beitrag zur Theorie der Reihen* (*Crelle's, J.*, Bd. III).

Si nous introduisons, à la place des variables x, y, z, les variables λ, θ et ψ, à l'aide des équations

$$(8)\qquad x = a\sqrt{\lambda^2+1}\sin\theta\cos\psi,\qquad y = a\sqrt{\lambda^2+1}\sin\theta\sin\psi,\qquad z = a\lambda\cos\theta$$

(nous supposerons toujours que θ est compris entre les limites o et π, et ψ entre o et 2π), l'équation de Laplace

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

se transforme dans la suivante

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda^2+1)\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right]+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\lambda^2+\cos^2\theta}{(\lambda^2+1)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}=0.$$

En tenant compte de l'équation différentielle connue des fonctions sphériques, on démontre facilement que l'équation (10) est satisfaite par les fonctions

$$(11)\qquad \begin{cases} p_k^m(\lambda)\,[c_k^m C_k^m(\theta,\psi)+s_k^m S_k^m(\theta,\psi)],\\ q_k^m(\lambda)\,[c_k^m C_k^m(\theta,\psi)+s_k^m S_k^m(\theta,\psi)],\end{cases}$$

où c_k^m et s_k^m sont des constantes et $C_k^m(\theta,\psi)$, $S_k^m(\theta,\psi)$ les notations abrégées, dont nous nous servirons dans la suite pour désigner les fonctions

$$P_k^m(\cos\theta)\cos k\psi,\quad P_k^m(\cos\theta)\sin k\psi.$$

Nous voyons ainsi que les transformées des fonctions (11) pour les variables x, y, z satisfont à l'équation (9).

On peut démontrer que la transformée de la première des fonctions (11) est une fonction entière de degré m de x, y, z. Pour cela, il suffit évidemment de montrer que la transformée de l'expression

$$F = p_k^m(\lambda)\,[C_k^m(\theta,\psi)+i S_k^m(\theta,\psi)] = p_k^m(\lambda)\,P_k^m(\cos\theta)\,(\cos\psi+i\sin\psi)^k$$

est une telle fonction. Or, en posant $\cos\theta = i\mu$, nous trouvons, d'après les formules (3), (4) et (8),

$$F=\pm\left[\frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(2m+1)}\right]^2\frac{i^m}{a^k}(x+iy)^k\frac{d^{m+k}(\lambda^2+1)^m}{d\lambda^{m+k}}\,\frac{d^{m+k}(\mu^2+1)^m}{d\mu^{m+k}}.$$

En supposant d'abord que $m+k$ est un nombre pair, on voit que

$$(12)\qquad \frac{d^{m+k}(\lambda^2+1)^m}{d\lambda^{m+k}}\,\frac{d^{m+k}(\mu^2+1)^m}{d\mu^{m+k}}$$

est une fonction entière symétrique de degré $m-k$ de λ^2 et μ^2, racines de l'équation quadratique en ξ

$$\frac{x^2+y^2}{\xi+1}+\frac{z^2}{\xi}=a^2,$$

et, en outre, une fonction entière de degré $\frac{m-k}{2}$ de λ^2; par conséquent, d'après un théorème connu d'Algèbre, une fonction entière de degré $\frac{m-k}{2}$ de x^2+y^2 et z^2. Si, au contraire, $m+k$ est un nombre impair, l'expression (12) est égale au produit de $\lambda\mu=\frac{z}{ai}$ par une fonction entière symétrique de degré $m-k-1$ de λ^2 et μ^2, et de degré $\frac{m-k-1}{2}$ par rapport à λ^2; ce sera donc le produit de z par une fonction entière de degré $\frac{m-k-1}{2}$ en x^2+y^2 et z^2.

Dans les deux cas, on trouve que F est une fonction entière de degré m de x, y, z, et, par suite, la proposition est démontrée.

En considérant x, y, z comme des coordonnées rectangulaires, et en nous basant sur ce qui vient d'être démontré, nous pouvons établir les formules suivantes :

$$(13)\quad \int\frac{H_k^m(\theta',\psi')\,ds'}{\sqrt{\lambda_0^2+\cos^2\theta'}\,r}=\frac{4\pi a\sqrt{\lambda_0^2+1}}{2m+1}H_k^m(\theta,\psi)\begin{cases}q_k^m(\lambda_0)\,p_k^m(\lambda), & \lambda\leqq\lambda_0,\\ p_k^m(\lambda_0)\,q_k^m(\lambda), & \lambda\geqq\lambda_0,\end{cases}$$

où l'intégration s'étend à toute la surface de l'ellipsoïde auquel correspond $\lambda=\lambda_0$, et où l'on a posé

$$(14)\qquad H_k^m(\theta,\psi)=c_k^m C_k^m(\theta,\psi)+s_k^m S_k^m(\theta,\psi).$$

Nous remarquons, pour cela, que le premier membre de l'égalité (13) est la fonction potentielle d'une couche répandue sur la surface de l'ellipsoïde (λ_0) avec la densité

$$\frac{H_k^m(\theta,\psi)}{\sqrt{\lambda_0^2+\cos^2\theta}}.$$

Par suite, d'après un théorème bien connu, il nous suffit de démontrer que le second membre de l'égalité (13), que nous désignerons par u, satisfait aux conditions suivantes :

1° u reste partout une fonction continue et uniforme de x, y, z;

2° Tant que le point (x, y, z) ne se trouve pas sur la surface de l'ellipsoïde (λ_0), $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ sont des fonctions continues et uniformes de x, y, z, et u satisfait à l'équation de Laplace;

3° Au passage à travers cette surface, $\frac{\partial u}{\partial n}$ éprouve une discontinuité déterminée par l'équation

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_i} + \frac{\partial u_e}{\partial n_e} = -\frac{4\pi H_k^m(\theta, \psi)}{\sqrt{\lambda_0^2 + \cos^2\theta}},$$

dans laquelle n_i et n_e sont les directions de la normale intérieure et de la normale extérieure, et u_i, u_e désignent les expressions de u correspondant respectivement à $\lambda < \lambda_0$ et $\lambda > \lambda_0$;

4° $xu, yu, zu, x^2\frac{\partial u}{\partial x}, y^2\frac{\partial u}{\partial y}, z^2\frac{\partial u}{\partial z}$ restent partout finis.

D'après ce qui a été démontré, nous concluons tout de suite que, pour $\lambda < \lambda_0$, les conditions 1°, 2° et 4° sont satisfaites, et qu'elles le sont aussi pour $\lambda > \lambda_0$; ceci résulte de la formule (6) qui montre qu'en premier lieu les fonctions

$$\lambda q_k^m(\lambda) \quad \text{et} \quad \lambda^2 \frac{d q_k^m(\lambda)}{d\lambda}$$

tendent, pour $\lambda = \infty$, vers des limites déterminées, et qu'en second lieu u_e est le produit d'une fonction entière de x, y, z par la fonction

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\alpha}{[p_k^m(\alpha)]^2(\alpha^2+1)},$$

laquelle, aussi bien que ses dérivées par rapport à x, y, z, sont des fonctions continues et uniformes de x, y, z.

Enfin, à l'aide de la même formule (6), on démontre facilement que u satisfait à la condition 3°.

Les formules (13) ne présentent, d'ailleurs, rien de nouveau; on peut trouver, par exemple, dans Liouville, des formules semblables, dans lesquelles entrent des fonctions sphériques à arguments réels [1].

Tout ce qui a été exposé jusqu'ici nous servira pour obtenir l'expression définitive de la variation seconde de Π_1, et nous démontrerons, dans le numéro suivant, les théorèmes sur lesquels sera basée la recherche du signe de cette variation.

12. Nous allons démontrer maintenant les propriétés suivantes des fonctions $p_k^m(\lambda)$ et $q_k^m(\lambda)$.

Lemme. — *Si, pour $n \geq m$, les nombres $n - s$ et $m - k$ sont de même parité,*

---

[1] Liouville, *Lettres sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique* (deuxième Lettre) (*J. de Liouville*, t. XI, 1846, p. 261).

et si, en outre, $n^2 + n + k^2 \geqq m^2 + m + s^2$, *le rapport*

$$\frac{p_s^n(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}$$

croît, quand λ *croît.*

Il se comprend de soi-même que le cas de $n = m$ et $s = k$ doit être exclu.

Pour la démonstration, remarquons, en premier lieu, que le signe de la dérivée

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{p_s^n(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}$$

est le même que celui de l'expression

$$p_k^m(\lambda) \frac{d p_s^n(\lambda)}{d\lambda} - p_s^n(\lambda) \frac{d p_k^m(\lambda)}{d\lambda},$$

et, en second lieu, que cette expression s'annule toujours pour $\lambda = 0$, aussitôt que $n - s$ et $m - k$ sont des nombres de même parité. Or, par suite de cette dernière circonstance, l'équation (5) conduit à l'égalité suivante

$$(\lambda^2 + 1)\left[p_k^m(\lambda) \frac{d p_s^n(\lambda)}{d\lambda} - p_s^n(\lambda) \frac{d p_k^m(\lambda)}{d\lambda}\right]$$
$$= \int_0^\lambda \left[(n - m)(n + m + 1) + \frac{k^2 - s^2}{\lambda^2 + 1}\right] p_s^n(\lambda) p_k^m(\lambda) \, d\lambda,$$

dont le second membre est positif dans les conditions énoncées.

Notre lemme est ainsi démontré.

Corollaire I. — Si $k - s$ est un nombre pair positif, le rapport $\frac{p_s^m(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}$ croît, quand λ croît.

Corollaire II. — Si $n - m$ est un nombre pair positif, le rapport $\frac{p_k^n(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}$ croît, quand λ croît.

Corollaire III. — Pour $n > m$, le rapport $\frac{p_{n-\sigma}^n(\lambda)}{p_{m-\sigma}^m(\lambda)}$ croît, quand λ croît.

D'après cela, nous pouvons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le produit* $\frac{1}{2m+1} p_k^m(\lambda) q_k^m(\lambda)$ *croît, quand k croît de deux unités, et décroît quand m croît de deux unités.*

Théorème II. — *Le produit* $\frac{1}{2m+1} p_{m-\sigma}^m(\lambda) q_{m-\sigma}^m(\lambda)$ *décroît, quand m croît.*

Il suffit, pour démontrer ces théorèmes, de remarquer que la formule (6) conduit à l'égalité suivante :

$$(15)\qquad \frac{1}{2m+1} p_k^m(\lambda) q_k^m(\lambda) - \frac{1}{2n+1} p_s^n(\lambda) q_s^n(\lambda) = \int_\lambda^\infty \left[\frac{p_k^m(\lambda)}{p_s^n(\alpha)}\right]^2 \left\{ \left[\frac{p_s^n(\alpha)}{p_k^m(\alpha)}\right]^2 - \left[\frac{p_s^n(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}\right]^2 \right\} \frac{d\alpha}{\alpha^2+1},$$

car cette égalité, en vertu des corollaires I et II de notre lemme, conduit immédiatement au théorème I et, en vertu du corollaire III, au théorème II.

Nous appellerons encore l'attention sur le théorème suivant :

Théorème III. — *Si $n-s$ est un nombre impair, pour $n>1$, la différence*

$$\tfrac{1}{3} p_0^1(\lambda) q_0^1(\lambda) - \frac{1}{2n+1} p_s^n(\lambda) q_s^n(\lambda)$$

reste toujours positive (en ne s'annulant que pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$).

En remarquant que toutes les conditions qui ont été énoncées pour formuler le lemme sont satisfaites dans le cas considéré, l'égalité (15) démontre ce théorème.

Revenons maintenant à notre problème.

13. Pour les points de la surface de l'ellipsoïde (λ), qui représente une figure d'équilibre donnée, introduisons les coordonnées θ et ψ à l'aide des équations (8).

Avec ces coordonnées, l'élément de surface de l'ellipsoïde s'exprime, comme on sait, de la manière suivante :

$$ds = a^2 \sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{\lambda^2+\cos^2\theta}\sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Donc, si l'on représente l'expression $\sqrt{\lambda^2+\cos^2\theta}\,\delta n$ sous forme de série de fonctions sphériques de θ et ψ, pour que les conditions (23) et (24) du Chapitre I puissent être satisfaites, cette série ne doit pas contenir de fonction sphérique d'ordre nul, ni du premier ordre.

Posons, par suite,

$$(16)\qquad \begin{cases} \sqrt{\lambda^2+\cos^2\theta}\,\delta n = \sum_{m=2}^{m=\infty} Y_m(\theta,\psi), \\ Y_m(\theta,\psi) = \sum_{k=0}^{k=m} H_k^m(\theta,\psi), \end{cases}$$

où $H_k^m(\theta,\psi)$ est défini par la formule (14).

On sait qu'en vertu de la condition d'équilibre

$$\frac{\partial U}{\partial n} = A\sqrt{\lambda^2 + \cos^2\theta},$$

où A est une quantité ne dépendant ni de θ, ni de ψ. Pour la déterminer, nous poserons $\theta = 0$, par suite de quoi $\frac{\partial U}{\partial n}$ deviendra l'accélération de la pesanteur observée sur la surface de l'ellipsoïde au pôle. Cette accélération étant, comme on sait, égale à

$$4\pi f\rho a(\lambda^2+1)\lambda(1-\lambda \operatorname{arc}\cot\lambda),$$

nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 4\pi f\rho a\sqrt{\lambda^2+1}\,\lambda(1-\lambda \operatorname{arc}\cot\lambda)\sqrt{\lambda^2+\cos^2\theta}.$$

Nous obtenons par suite, d'après les formules (16),

$$\int \frac{\partial U}{\partial n}(\delta n)^2 ds = 4\pi f\rho a^3(\lambda^2+1)\lambda(1-\lambda \operatorname{arc}\cot\lambda)\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{k=0}^{k=m}\int (H_k^m)^2 d\sigma,$$

où $d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ est l'élément de surface de la sphère de rayon 1, sur laquelle est effectuée l'intégration.

Puis, d'après les formules (16) et (13), nous trouvons

$$\int\int \frac{\delta n\,\delta n'\,ds\,ds'}{r} = 4\pi a^3(\lambda^2+1)\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{k=0}^{k=m}\frac{p_k^m(\lambda)\,q_k^m(\lambda)}{2m+1}\int (H_k^m)^2 d\sigma.$$

A l'aide de ces expressions, les formules (27) et (39) du Chapitre I donnent

$$\delta^2 \Pi_1 = 4\pi f\rho a^3(\lambda^2+1)\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{k=0}^{k=m} T_k^m \int (H_k^m)^2 d\sigma + \Omega, \tag{17}$$

où

$$T_k^m = \lambda(1-\lambda \operatorname{arc}\cot\lambda) - \frac{p_k^m(\lambda)\,q_k^m(\lambda)}{2m+1}, \tag{18}$$

ce qui, comme on le voit d'après les formules (2), peut être également présenté sous la forme

$$T_k^m = \frac{p_0^1(\lambda)\,q_0^1(\lambda)}{3} - \frac{p_k^m(\lambda)\,q_k^m(\lambda)}{2m+1}. \tag{19}$$

En remarquant en outre que

$$\int (x^2+y^2)\,\delta n\,ds = -\frac{16\pi}{45}a^4(\lambda^2+1)^{\frac{3}{2}}c_0^2$$

et

$$S = \tfrac{8}{15}\pi a^5(\lambda^2+1)^2\lambda,$$

nous trouvons, d'après la formule (28) du Chapitre I,

$$\Omega = \frac{64\pi^2}{45}f\rho a^3(\lambda^2+1)\frac{1}{3}\,\frac{\omega^2}{2\pi f\rho\lambda}(c_0^2)^2. \tag{20}$$

La formule (17) montre que le signe de la variation seconde de Π_1 dépend essentiellement des signes des expressions T_k^m, à la recherche desquels nous devons par conséquent en venir maintenant.

14. Comme les expressions des T_k^m renfermées dans la formule (17) correspondent à $m > 1$, on voit, par la formule (19), que, pour k et m de parité différente, tous ces T_k^m représentent, d'après le Théorème III, des quantités qui restent toujours positives. Par conséquent, en supposant dans la suite $m > 1$, nous supposerons que k et m sont des nombres de même parité.

Les Théorèmes I et II conduisent aux inégalités suivantes

$$T_k^m > T_{k+2}^m \qquad \text{et} \qquad T_m^m \geqq T_2^2,$$

où le signe de l'égalité ne se rapporte qu'au cas de $m = 2$. On voit par là que tant que $T_2^2 \geqq 0$, tous les T_k^m conservent des valeurs positives. Tout aboutit ainsi à la recherche de l'expression de T_2^2.

Nous trouvons facilement, par les formules (2),

$$T_2^2 = \tfrac{1}{8}[\lambda(13+3\lambda^2) - (3+14\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arc\,cot}\lambda]. \tag{21}$$

Pour obtenir l'allure générale de cette fonction, posons

$$u = \frac{8T_2^2}{3+14\lambda^2+3\lambda^4} = \frac{\lambda(13+3\lambda^2)}{3+14\lambda^2+3\lambda^4} - \operatorname{arc\,cot}\lambda,$$

d'où

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{16(3+\lambda^2)(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)(3+14\lambda^2+3\lambda^4)^2}.$$

On voit par là que u croît quand λ varie de 0 à 1, que cette fonction atteint son maximum pour $\lambda = 1$, et qu'elle diminue constamment par un accroissement

ultérieur de λ. D'ailleurs, pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = \infty$, on a respectivement

$$u = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad u = 0.$$

Tout ceci conduit à la conclusion que l'équation

$$T_2^2 = 0 \tag{22}$$

n'a qu'une seule racine positive, qui est inférieure à 1; quand λ est supérieur à cette racine, $T_2^2 > 0$, et quand λ lui est inférieur, $T_2^2 < 0$.

Il est à remarquer que l'équation (22) est une équation connue, qui définit un ellipsoïde de révolution avec lequel se confond l'ellipsoïde à trois axes de Jacobi, pour la limite supérieure de la vitesse angulaire. L'excentricité de cet ellipsoïde est égale, comme on sait, à 0,8126..., et la racine de l'équation (22) est 0,717... [1].

Nous voyons ainsi que tant que $\lambda > 0,717...$, la variation seconde de Π_1 reste positive, et ne peut s'annuler si tous les δn ne sont pas nuls à la fois.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Dans le cas général (c'est-à-dire si l'on n'impose aucune condition pour les troubles), les ellipsoïdes de révolution sont des figures d'équilibre stables, tant que leurs excentricités sont inférieures à celle de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, c'est-à-dire à 0,8126....

En ce qui concerne ce dernier ellipsoïde de révolution, il est nécessaire, pour l'étude de sa stabilité, de recourir aux variations d'ordres supérieurs de Π (*voir* Chap. VI).

15. A chaque couple de valeurs de m et k correspond un système de déplacements dépendant de deux constantes arbitraires c_k^m et s_k^m si $k > 0$, et d'une seule si $k = 0$. Si l'on parvenait à exclure ceux de ces déplacements qui correspondent à $k = m$, $k = m - 2$, ..., $k = m - 2l$, ou bien ceux qui correspondent à $m = 2$, $m = 3$, ..., $m = M$, les limites des ellipsoïdes stables s'élargiraient, et nous verrons en effet plus loin qu'on peut exclure certains systèmes de déplacements. La question se pose d'ailleurs de savoir s'il est possible, par élimination successive d'un nombre fini de systèmes de déplacements, d'arriver à ce que tous les ellipsoïdes de révolution deviennent des figures d'équilibre stables.

---

[1] Meyer trouve $\frac{1}{\lambda} = 1,3946$ (*Crelle's J.*, Bd. XXIV). Du reste la substitution dans l'expression (21) fait voir que $0,717 < \lambda < 0,7171$. Il faut remarquer qu'en s'arrêtant, dans la valeur de l'excentricité, à la quatrième décimale, on doit prendre $\varepsilon = 0,8127$.

Dans cette vue, nous en venons maintenant à une étude plus détaillée des expressions que nous avons désignées par T_k^m. Cette étude est également importante sous cet autre rapport, que les expressions T_k^m se rencontrent dans le problème des figures d'équilibre différant infiniment peu des formes ellipsoïdales, question qui présente un très grand intérêt, non seulement à cause de son importance physique, mais aussi en raison de la difficulté de son analyse ([1]).

Nous avons vu que la fonction T_2^2 s'annule seulement pour une seule valeur finie positive de λ. Nous allons montrer maintenant que la même chose a lieu pour chaque T_k^m, si $m > 1$ et si $m - k$ est un nombre pair.

Nous commencerons par la recherche de T_m^m, que l'on peut effectuer par le même procédé qui a servi à la recherche de T_2^2.

Posons

$$(23)\qquad t = \frac{p_0^1(\lambda)\,q_0^1(\lambda)}{3} = \lambda(1 - \lambda \operatorname{arc\,cot} \lambda) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon\right),$$

où $\arcsin \varepsilon$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et introduisons l'abréviation suivante :

$$a(a+1)\ldots(a+m-1) = [a, m],$$

en convenant que $[a, 0]$ représente 1.

Nous trouvons par suite, d'après les formules (7) et (18),

$$T_m^m = t - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{[\frac{1}{2}, n]}{[1, n]} \frac{\varepsilon^{2n}}{n + m + \frac{1}{2}},$$

ce qui peut être présenté aussi sous la forme

$$(24)\qquad T_m^m = t - \varepsilon^{-2m} \int_0^\varepsilon \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En posant maintenant

$$T_m^m = \varepsilon^{-2m} S_m,$$

([1]) Sous une forme particulière, cette question a été traitée par Legendre, qui a montré qu'un ellipsoïde de révolution très peu comprimé est la seule figure d'équilibre qui diffère très peu de la sphère. [*Voir* LEGENDRE, *Recherches sur la figure des Planètes* (Histoire de l'Académie royale des Sciences, An. MDCCLXXXIV.)] — Sous une autre forme particulière, se rapportant à la vitesse angulaire limite pour les ellipsoïdes, la question a été soulevée par Tchebychef. Bien qu'elle ait un lien très étroit avec le problème que nous étudions, il nous est néanmoins impossible d'entrer dans aucun détail à son sujet, parce que cela nous entraînerait trop loin.

nous obtenons

$$\frac{dS_m}{d\varepsilon} = 2m\varepsilon^{2m-3}\left(\frac{m-1}{m} - \varepsilon^2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \text{arc sin}\,\varepsilon\right).$$

Comme la fonction

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \text{arc sin}\,\varepsilon$$

reste positive pour toute valeur positive de ε ne dépassant pas 1, on voit par là que tant que ε croît de 0 à $\sqrt{\frac{m-1}{m}}$, la fonction S_m croît aussi; pour $\varepsilon = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$, elle atteint son maximum, et, pour un accroissement ultérieur de ε jusqu'à 1, elle décroît constamment. En remarquant en outre que, pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1$, on a respectivement

$$S_m = 0 \qquad \text{et} \qquad S_m = -\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\,\frac{\pi}{2},$$

nous arrivons à la conclusion suivante : si T_m^m est considéré comme une fonction de ε, l'équation

$$T_m^m = 0 \tag{25}$$

a toujours une racine entre les limites $\sqrt{\frac{m-1}{m}}$ et 1, et, à part zéro, c'est sa racine unique entre 0 et 1. Tant que ε est compris entre 0 et cette racine, $T_m^m > 0$ et, quand ε est compris entre cette racine et 1, $T_m^m < 0$. Le théorème II conduit ensuite à la conclusion que cette racine est une fonction croissante de m, et l'on voit qu'elle a pour limite 1, pour $m = \infty$.

Si T_m^m est exprimé en fonction de λ, l'équation (25) n'a qu'une seule racine finie positive, qui est comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{m-1}}$; quand λ positif lui est inférieur, $T_m^m < 0$ et, quand λ fini lui est supérieur, $T_m^m > 0$. On voit que cela renferme, comme cas particulier, le résultat obtenu au n° **14** à l'égard de T_2^2.

Revenons maintenant à l'étude de l'expression générale de T_k^m.

En posant

$$\frac{[\frac{1}{2}-k, n][\frac{1}{2}+k, n]}{[\frac{1}{2}-m, n][\frac{1}{2}+m, n]} = \frac{[k-n+\frac{1}{2}, 2n]}{[m-n+\frac{1}{2}, 2n]} = \alpha_n, \tag{26}$$

nous trouvons, d'après la formule (7),

$$p_k^m(\lambda)\,q_k^m(\lambda) = \varepsilon\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2m+1}{2m+2n+1}\,\frac{[\frac{1}{2}, n]}{[1, n]}\,\alpha_n\varepsilon^{2n},$$

d'où, d'après la formule (19),

$$(27)\quad T_k^m = \varepsilon \left\{ \frac{2(m-1)}{3(2m+1)} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{[\frac{1}{2}, n]}{[1, n]} \left[\frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{\alpha_n}{2n+2m+1} \right] \varepsilon^{2n} \right\}.$$

On peut montrer que α_n est une quantité qui ne dépasse pas 1 en valeur numérique et que, en outre,

$$\alpha_n \geqq -\frac{2n-1}{2n+1},$$

où le signe de l'égalité convient au cas de $m=1$ et $k=0$, ou au cas de $n=0$.

Nous devons pour cela considérer trois cas : 1° $n \leqq k$, 2° $k < n \leqq m$ et 3° $n > m$.

Dans le premier cas, la formule (26) donne

$$0 < \alpha_n \leqq 1,$$

où le signe de l'égalité ne peut avoir lieu que pour $k = m$.

Dans le second cas, on peut donner à la formule (26) la forme suivante :

$$\alpha_n = (-1)^{n-k} \frac{[\frac{1}{2}, n-k]}{[m-n+\frac{1}{2}, n-k]} \frac{[\frac{1}{2}, n+k]}{[m-k+\frac{1}{2}, n+k]},$$

d'où

$$(-1)^{n-k}\alpha_n > 0 \qquad \text{et} \qquad (-1)^{n-k}\alpha_n \leqq \frac{[\frac{1}{2}, n+k]}{[n-k+\frac{1}{2}, n+k]}.$$

Comme, dans le cas considéré, le second membre de la seconde inégalité est une fonction croissante de k, sa plus grande valeur pour $n-k$ positif et impair est $\frac{1}{4n-1}$, ce qui, pour $n > 0$, représente une quantité positive, ne dépassant pas $\frac{2n-1}{2n+1}$. On a donc, dans ce cas,

$$-\frac{2n-1}{2n+1} \leqq \alpha_n < 1,$$

où le signe de l'égalité répond au cas où $m = n = 1$, $k = 0$.

Enfin, dans le troisième cas, en présentant la formule (26) sous la forme

$$\alpha_n = (-1)^{m-k} \frac{[n-m+\frac{1}{2}, m+k]}{[n-k+\frac{1}{2}, m+k]},$$

nous concluons

$$0 < (-1)^{m-k}\alpha_n \leqq 1$$

et

$$-\alpha_n \leqq \frac{n-m+\frac{1}{2}}{n+m-\frac{1}{2}},$$

où, sauf le cas de $m = 0$,

$$\frac{n - m + \frac{1}{2}}{n + m - \frac{1}{2}} \leqq \frac{2n - 1}{2n + 1}.$$

Or, pour $m = 0$, on a $k = 0$ et par conséquent $\alpha_n = 1$. Donc, dans ce troisième cas nous obtenons

$$-\frac{2n - 1}{2n + 1} \leqq \alpha_n \leqq 1,$$

où les signes d'égalité se rapportent, soit au cas de $m = 1$, $k = 0$, soit au cas de $k = m$.

La proposition est donc démontrée.

Nous concluons de là

$$\frac{2n - 1}{(2n + 1)(2n + 3)} + \frac{\alpha_n}{2n + 2m + 1} \geqq \frac{2n - 1}{2n + 1}\,\frac{2(m - 1)}{(2n + 3)(2n + 2m + 1)}.$$

Nous remarquons en outre que, pour $m = 0$,

$$\frac{2n - 1}{(2n + 1)(2n + 3)} + \frac{\alpha_n}{2n + 2m + 1} = \frac{2}{2n + 3}.$$

On voit par là que la somme figurant dans la formule (27) ne renferme point de termes négatifs. Par suite, $\frac{1}{\varepsilon} T_k^m$ est une fonction décroissante de ε. Mais, pour $\varepsilon = 0$, elle devient $\frac{2(m - 1)}{3(2m + 1)}$, et pour $\varepsilon = 1$ elle se réduit à $-\frac{p_k^m(0)\,q_k^m(0)}{2m + 1}$, ce qui est une quantité négative, si $m - k$ est un nombre pair, et zéro, si $m - k$ est impair [1].

Nous déduisons de là que, pour $m > 1$ et $m - k$ pair, l'équation

$$T_k^m = 0$$

a toujours une racine différente de zéro comprise entre 0 et 1, et d'ailleurs une seule; que, pour ε compris entre zéro et cette racine, $T_k^m > 0$ et, pour ε compris entre cette racine et 1, $T_k^m < 0$. En vertu du théorème I, cette racine croît, k étant constant, lorsque m croît de deux unités, et, pour m constant, lorsque

---

[1] Nous trouvons, d'après les formules du n° 11,

$$\frac{p_k^m(0)\,q_k^m(0)}{2m + 1} = \frac{1 + (-1)^{m+k}}{2}\,\frac{\pi}{2^{2m+1}}\,\frac{\Gamma(m + k + 1)\,\Gamma(m - k + 1)}{\left[\Gamma\left(\frac{m + k}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{m - k}{2} + 1\right)\right]^2}.$$

k diminue de deux unités. En outre, en remarquant que

$$\lim (T_k^m)_{m=\infty} = t,$$

nous concluons que cette racine a pour limite 1, pour $m = \infty$. Nous ajouterons que, en vertu du théorème II, pour σ pair, la racine de l'équation

$$T_{m-\sigma}^m = 0$$

est une fonction croissante de m, qui a pour limite 1, pour $m = \infty$.

En ce qui concerne le cas de $m - k$ impair, nous retrouvons le théorème III.

Remarquons que les théorèmes I et II du n° 12 ne sont que des cas particuliers d'un théorème plus général, que nous n'avons pas indiqué, d'abord parce qu'il ne se distingue pas par la même simplicité et, en second lieu, parce qu'il n'a pas, pour notre objet principal, de l'importance. Maintenant, pour compléter l'étude des fonctions T_k^m, nous allons l'énoncer sous une forme géométrique.

En prenant m pour l'abscisse et k pour l'ordonnée d'un point du plan, dans un système de coordonnées rectangulaires, considérons l'ensemble des points définis par les conditions

$$m - k \geqq 0, \qquad k \geqq 0,$$

m et k étant des nombres entiers toujours de même parité, ou toujours de parités différentes.

Menons, par l'origine des coordonnées, la bissectrice de l'angle compris entre les directions positives des axes des abscisses et des ordonnées, et appelons la partie de la bissectrice, dont les points ont des abscisses positives, sa *partie positive*. Cela posé, les points considérés ne pourront être situés que sur la partie positive de l'axe des abscisses, sur la partie positive de la bissectrice et dans la partie du plan comprise entre elles. Par l'un quelconque de ces points (m_1, k_1), menons une droite parallèle à l'axe des ordonnées, jusqu'à l'intersection avec l'axe des abscisses d'un côté, et avec la bissectrice de l'autre, et une branche d'hyperbole équilatère, dont l'axe réel coïncide avec l'axe des abscisses et le centre soit au point $(-\frac{1}{2}, 0)$. Par cette construction, la partie considérée du plan se partagera, en général, en quatre parties : en trois parties entièrement délimitées, et une partie qui s'étend à l'infini. Nous désignerons cette dernière par A, et la partie entièrement délimitée qui ne lui est pas contiguë par B. Si alors, le point (m_1, k_1) étant exclu, tous les autres points des contours de A et B sont censés appartenant à ces parties du plan, on pourra affirmer que tous les T_k^m correspondant aux points de la partie A sont supérieurs à $T_{k_1}^{m_1}$, et tous les T_k^m correspondant aux points de la partie B sont inférieurs à $T_{k_1}^{m_1}$. Quant aux T_k^m qui correspondent aux autres points, on ne peut rien dire en général.

L'étude précédente fait voir que, par exclusion d'un nombre fini de systèmes de déplacements, nous pouvons étendre, autant que nous voulons, les limites des excentricités des ellipsoïdes pour lesquels la variation seconde de Π_1 reste positive, mais que nous ne pouvons jamais arriver, par cette voie, à ce qu'elle reste positive, pour tous les ellipsoïdes de révolution qui peuvent être des figures d'équilibre.

16. Considérons maintenant la signification géométrique de quelques systèmes de déplacements.

En premier lieu, il est évident que, pour les systèmes de déplacements correspondant à $k = 0$, la surface du liquide reste une surface de révolution autour de l'axe des z.

Puis on voit facilement que l'ensemble des systèmes de déplacements, qui correspondent à $m = 2$, transforme la surface de l'ellipsoïde de révolution donné dans la surface d'un ellipsoïde concentrique, ayant le même volume et soumis seulement, en outre, à la condition d'être infiniment peu différent de l'ellipsoïde donné.

En effet, si tous les déplacements se réduisent à ceux que nous venons d'indiquer, on a

$$\sqrt{\lambda^2 + \cos^2\theta}\,\delta n = c_0^2 P_0^2(\cos\theta) + c_1^2 P_1^2(\cos\theta)\cos\psi + c_2^2 P_2^2(\cos\theta)\cos 2\psi$$
$$+ s_1^2 P_1^2(\cos\theta)\sin\psi + s_2^2 P_2^2(\cos\theta)\sin 2\psi,$$

ce qui, d'après les équations (8), peut être présenté sous la forme

$$(28)\qquad 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(\lambda^2+1)^2} + \frac{z^2}{\lambda^4}}\,\delta n = \frac{\eta - \mathfrak{S}}{\lambda^2+1}x^2 - \frac{\eta + \mathfrak{S}}{\lambda^2+1}y^2 + \frac{2\mathfrak{S}}{\lambda^2}z^2 + \alpha yz + \beta zx + \gamma xy,$$

où η, $\mathfrak{S}$, α, β et γ représentent des quantités infiniment petites qui ne dépendent pas de x, y, z.

Nous remarquons ensuite que, en général, si

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'équation d'une surface donnée,

$$f(x, y, z) + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\,\delta n = 0$$

est (à une première approximation) l'équation d'une surface infiniment voisine,

Dans le cas considéré, la formule (17) prend la forme suivante :

$$\delta^2\Pi_1 = 4\pi f\rho a^3(\lambda^2+1)\sum_{m=2}^{m=\infty} T_0^m \int (H_0^m)^2 d\sigma + \Omega, \tag{29}$$

où

$$H_0^m = c_0^m P_0^m(\cos\theta).$$

En nous basant sur ce qui précède, nous pouvons affirmer que le terme de cette expression, qui dépend de c_0^2, reste toujours positif. En effet, quand ce terme demeure seul, tous les déplacements se réduisent à ceux qui transforment l'ellipsoïde de révolution donné en une nouvelle figure d'équilibre infiniment peu différente et correspondant à un nouveau moment des quantités de mouvement différant infiniment peu de l'ancien. Par suite, d'après la formule (38) du Chapitre I, nous trouvons que le terme considéré prend la forme

$$\frac{\omega}{S}\frac{dS}{dJ}(\delta J)^2. \tag{30}$$

On vérifie facilement ce résultat par un calcul immédiat, si l'on se sert de l'expression (20) pour Ω, et aussi de l'expression

$$T_0^2 = \tfrac{1}{4}\lambda(7+9\lambda^2) - \tfrac{1}{4}(1+\lambda^2)(1+9\lambda^2)\operatorname{arc\,cot}\lambda,$$

qui, d'après l'équation (1), peut être présentée sous la forme

$$T_0^2 = -\frac{1+\lambda^2}{4}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\omega^2}{2\pi f\rho}\right).$$

L'expression (30) représente, comme nous le savons, une quantité généralement positive. Mais il importe également que nous attirions l'attention sur ce fait qu'elle ne peut s'annuler pour aucune valeur finie positive de λ. En effet, elle est égale à

$$\frac{\omega}{S}\frac{dJ}{d\lambda}\frac{dS}{d\lambda}(\delta\lambda)^2,$$

et ici les facteurs

$$\frac{\omega}{S} \quad \text{et} \quad \frac{dJ}{d\lambda},$$

comme on le sait par la théorie des ellipsoïdes de Maclaurin, ne peuvent s'annuler que pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Quant à

$$\frac{dS}{d\lambda} = -\frac{1}{5}\left(\frac{4Q^5}{3\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{3}}(\lambda^2+1)^{\frac{2}{3}}},$$

auxquels correspond $m > 2$. Mais si nous appliquions notre formule à l'étude de la stabilité des ellipsoïdes de révolution, dans cette hypothèse particulière relative aux déplacements, nous obtiendrions évidemment, pour limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes stables, l'ancienne valeur 0,8126.... Cependant Riemann a démontré qu'en réalité cette limite est beaucoup plus grande [1]. En étudiant le cas du mouvement découvert par Dirichlet, il s'occupe, entre autres, du problème de la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre, par rapport aux déplacements initiaux pour lesquels la surface du liquide reste toujours un ellipsoïde. En remarquant l'analogie qui existe entre les équations différentielles définissant, dans une certaine hypothèse particulière, les axes de l'ellipsoïde liquide en fonction du temps, et les équations différentielles du mouvement d'un point matériel sur une surface, Riemann arrive à un criterium de la stabilité, par lequel on obtient non seulement les conditions suffisantes, mais aussi les conditions nécessaires pour la stabilité. Au moyen de ce criterium, Riemann trouve, entre autres, que les ellipsoïdes de Maclaurin sont stables, tant que les rapports entre leurs axes dépassent 0,303327..., et instables dans le cas contraire. On déduit de là, pour limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes stables, un nombre compris entre 0,9528862 et 0,9528866. Pour les ellipsoïdes avec des excentricités plus grandes, l'instabilité se manifeste par les déplacements qui transforment l'équateur en ellipse [2].

Remarquons qu'on peut envisager l'étude de Riemann à un point de vue plus général. Le nombre 0,95... obtenu par lui représente une *limite supérieure* des excentricités des ellipsoïdes de révolution stables, mais dans un autre sens du mot que le nombre 0,81... trouvé plus haut : le nombre de Riemann représente une limite que ne peuvent dépasser les excentricités des ellipsoïdes stables, tandis que le nombre 0,81... représente une limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes *sûrement* stables.

19. Considérons encore une hypothèse particulière.

Si l'on exclut les déplacements correspondant à $k = m = 2$, l'étude de la stabi-

---

(1) *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoïdes* [*B. Riemann's mathem. Werke, herausg. v. Weber*, 1876, S. 190].

(2) Autant que je sache, il n'a pas encore été démontré jusqu'ici, que le cas, découvert par Dirichlet, du mouvement d'un ellipsoïde liquide fût le seul cas où un liquide, sous les mêmes conditions relativement aux forces agissantes, puisse se mouvoir en conservant la forme d'un ellipsoïde. Nous n'avons donc pas encore le droit de considérer la valeur obtenue par Riemann (0,95...), comme la limite supérieure effective des excentricités des ellipsoïdes de révolution stables relativement à tous les déplacements et toutes les vitesses à l'instant initial, après lesquels la surface du liquide demeure un ellipsoïde pendant toute la durée du mouvement.

satisfaisant à l'équation différentielle

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\left[\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}\,\frac{du}{dx}\right]+\frac{(a^2+b^2)\tau_k^m-m(m+1)x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}\,u=0,$$

où a, b et τ_k^m sont des constantes. Nous supposerons partout dans la suite a et b positifs, et en outre $a > b$. Quant à τ_k^m, c'est une constante qu'on doit déterminer par cette condition que l'équation (2) admette effectivement une solution particulière qui soit une fonction entière des quantités (1).

On sait que toute fonction entière des quantités (1), satisfaisant à l'équation (2) pour une valeur positive entière donnée de m, ne peut être que d'une des quatre formes suivantes : ou une fonction entière de degré m de x, ou un produit d'une fonction entière de degré $m-1$ de x par $\sqrt{x^2-b^2}$ ou $\sqrt{x^2-a^2}$, ou enfin un produit d'une fonction entière de degré $m-2$ de x par $\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$. D'après cela, les fonctions E_k^m se divisent en quatre classes : à la première classe se rattachent toutes les fonctions entières de x; à la seconde, les fonctions ayant $\sqrt{x^2-b^2}$ en facteur; à la troisième, les fonctions ayant $\sqrt{x^2-a^2}$ en facteur; et à la quatrième, les fonctions ayant $\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$ en facteur. Toutes les fonctions entières de x, à l'aide desquelles s'expriment les fonctions E_k^m, contiennent d'ailleurs ou seulement des puissances paires de x, ou seulement des puissances impaires (1). Les fonctions d'une seule et même classe se distinguent l'une de l'autre par des valeurs différentes des constantes τ_k^m, dont dépendent les coefficients des différentes puissances de x. On détermine ces coefficients, par des équations linéaires aux différences finies du second ordre, et les constantes τ_k^m, par des équations algébriques. Si $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ (selon que m est pair ou impair) est désigné par σ, le degré de l'équation algébrique, pour les fonctions de la première classe, est égal à $\sigma+1$; pour les fonctions de la deuxième et de la troisième classes à $m-\sigma$; et pour les fonctions de la quatrième classe, à σ. On sait, relativement à ces équations, que toutes leurs racines sont réelles et distinctes (2). Parmi les coefficients, il n'en reste qu'un d'arbitraire, que nous déterminerons par la condition que le coefficient de la plus haute puissance de x soit égal à 1. Alors, tous les coefficients seront réels.

Il correspondra donc en tout, à chaque valeur donnée de m, $2m+1$ fonctions E_k^m distinctes.

En nous servant de la notation $E_k^m(x)$ pour les fonctions des quatre classes, nous donnerons à k les valeurs : 1, 2, 3, ..., $2m+1$. La loi, d'après laquelle les nombres de cette suite doivent correspondre à des fonctions des diverses

---

(1) Heine, *Handb. d. Kugelf.*, 1 Bd., 1878, p. 359, 360.

(2) *Ibid.*, p. 362-368, 371-375. *Voir* la fin de ce numéro.

classes, sera définie plus tard, et à présent nous nous bornerons à supposer que, pour une seule et même classe, τ_k^m soit une fonction *décroissante* de k.

Nous ne rencontrerons que des cas où x ne sort pas des limites $-b$ et $+b$, ou b et a, ou a et ∞, et enfin où x est une variable purement imaginaire. Dans le premier cas, nous remplacerons x par μ; dans le deuxième, par ν; et dans le troisième, par λ. Pour éviter les quantités imaginaires, nous prendrons, au lieu de $\sqrt{x^2-a^2}$ et $\sqrt{x^2-b^2}$, respectivement $\sqrt{a^2-\mu^2}$ et $\sqrt{b^2-\mu^2}$, ou $\sqrt{a^2-\nu^2}$ et $\sqrt{\nu^2-b^2}$. Parmi ces derniers radicaux, $\sqrt{b^2-\mu^2}$, $\sqrt{a^2-\nu^2}$ et $\sqrt{\nu^2-b^2}$ peuvent s'annuler, et les signes de ces radicaux resteront indéterminés, là où l'on n'en dira rien. Quant aux radicaux $\sqrt{a^2-\mu^2}$, $\sqrt{\lambda^2-a^2}$ et $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, nous les supposerons toujours positifs.

On sait que la fonction $E_k^m(x)$ ne peut s'annuler, quand on a $x > a$ (¹). Par suite, pour ces valeurs de x, la seconde solution particulière de l'équation (2) peut être exprimée par la formule :

$$(3)\qquad F_k^m(\lambda) = (2m+1)\,E_k^m(\lambda)\int_\lambda^\infty \frac{dx}{[E_k^m(x)]^2\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}.$$

C'est une fonction de Lamé de seconde espèce. Nous nous bornerons à sa définition par la formule (3), car nous ne la rencontrerons plus loin que pour des arguments dépassant a.

On peut remarquer que, d'après ce qui vient d'être dit, la fonction $E_k^m(x)$ conserve des valeurs positives pour toute valeur de $x > a$, et que par conséquent $F_k^m(\lambda)$ reste toujours aussi positif. D'ailleurs, on a

$$\lim \{\lambda^{m+1} F_k^m(\lambda)\}_{\lambda=\infty} = 1.$$

Les fonctions de Lamé à argument purement imaginaire auront pour nous une importance toute spéciale. A la place des fonctions de Lamé elles-mêmes, nous introduirons, dans ce cas, les fonctions définies par l'égalité

$$\mathbf{E}_k^m(\lambda) = (-i)^m E_k^m(i\lambda),$$

avec cette détermination des radicaux :

$$\sqrt{(i\lambda)^2-a^2} = +i\sqrt{\lambda^2+a^2},\qquad \sqrt{(i\lambda)^2-b^2} = +i\sqrt{\lambda^2+b^2}.$$

D'après certaines propriétés de la fonction $E_k^m(x)$, dont il sera parlé plus loin (nº **22**), la fonction $\mathbf{E}_k^m(\lambda)$ ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de λ, excepté $\lambda = 0$, et, pour $\lambda > 0$, ce que nous supposerons toujours en considérant la fonction $\mathbf{E}_k^m(\lambda)$, elle conserve des valeurs positives.

(¹) *Ibid.*, p. 381.

La fonction $E_k^m(\lambda)$ est une solution particulière de l'équation

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+b^2)}\,\frac{du}{d\lambda}\right]-\frac{(a^2+b^2)\tau_k^m+m(m+1)\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+b^2)}}\,u=0.$$

Nous définirons une autre solution particulière de cette équation, correspondant à une fonction de Lamé de seconde espèce, et que nous rencontrerons également dans la suite pour $\lambda > 0$, par la formule

$$F_k^m(\lambda)=(2m+1)\,E_k^m(\lambda)\int_\lambda^\infty\frac{dx}{[E_k^m(x)]^2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}. \tag{4}$$

La fonction $F_k^m(\lambda)$ conserve encore des valeurs positives pour toute valeur positive de λ, et d'ailleurs

$$\lim\left\{\lambda^{m+1}F_k^m(\lambda)\right\}_{\lambda=\infty}=1.$$

Posons maintenant

$$\int_0^\lambda\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}=\alpha,\qquad \int_a^\lambda\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}=\alpha_1,$$

$$\int_0^\mu\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}}=\beta,\qquad \int_0^b\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}}=\eta,$$

$$\int_b^\nu\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}=\gamma,\qquad \int_b^a\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}=\zeta,$$

et introduisons, au lieu des variables μ, ν, λ, les variables β, γ, α_1 ou α. Alors les équations différentielles auxquelles satisfont $E_k^m(\mu)$, $E_k^m(\nu)$, $E_k^m(\lambda)$ et $E_k^m(\lambda)$ prendront la forme suivante (¹) :

$$\frac{d^2E(\mu)}{d\beta^2}+[p\tau-m(m+1)\mu^2]\,E(\mu)=0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2E(\nu)}{d\gamma^2}-[p\tau-m(m+1)\nu^2]\,E(\nu)=0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2E(\lambda)}{d\alpha_1^2}+[p\tau-m(m+1)\lambda^2]\,E(\lambda)=0, \tag{7}$$

$$\frac{d^2E(\lambda)}{d\alpha^2}-[p\tau+m(m+1)\lambda^2]\,E(\lambda)=0, \tag{8}$$

où l'on a posé $p=a^2+b^2$. Nous emploierons aussi l'abréviation $q=a^2b^2$, qui sera rencontrée plus loin.

(¹) Nous n'écrirons pas d'indices là où il n'en résultera aucun inconvénient.

Indiquons maintenant les formules pour le calcul des fonctions $E_k^m(\lambda)$ (¹) :

Première classe.

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&E_k^m(\lambda) = \lambda^m + c_1\lambda^{m-2} + c_2\lambda^{m-4} + \ldots,\\
&2i(2m+1-2i)\,c_i + p[\tau^m - (m+2-2i)^2]\,c_{i-1}\\
&\qquad - q(m+4-2i)(m+3-2i)\,c_{i-2} = 0,\\
&c_{-1} = 0, \qquad c_0 = 1,\\
&c_{\sigma+1} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Deuxième classe.

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&E_k^m(\lambda) = \sqrt{\lambda^2+b^2}\,(\lambda^{m-1} + c_1\lambda^{m-3} + c_2\lambda^{m-5} + \ldots),\\
&2i(2m+1-2i)\,c_i + \{p[\tau^m - (m+1-2i)^2] - a^2(2m+3-4i)\}\,c_{i-1}\\
&\qquad - q(m+2-2i)(m+3-2i)\,c_{i-2} = 0,\\
&c_{-1} = 0, \qquad c_0 = 1,\\
&c_{m-\sigma} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Troisième classe.

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&E_k^m(\lambda) = \sqrt{\lambda^2+a^2}\,(\lambda^{m-1} + c_1\lambda^{m-3} + c_2\lambda^{m-5} + \ldots),\\
&2i(2m+1-2i)\,c_i + \{p[\tau^m - (m+1-2i)^2] - b^2(2m+3-4i)\}\,c_{i-1}\\
&\qquad - q(m+2-2i)(m+3-2i)\,c_{i-2} = 0,\\
&c_{-1} = 0, \qquad c_0 = 1,\\
&c_{m-\sigma} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Quatrième classe.

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&E_k^m(\lambda) = \sqrt{\lambda^2+a^2}\,\sqrt{\lambda^2+b^2}\,(\lambda^{m-2} + c_1\lambda^{m-4} + c_2\lambda^{m-6} + \ldots),\\
&2i(2m+1-2i)\,c_i + p[\tau^m - (m+1-2i)^2]\,c_{i-1}\\
&\qquad - q(m+1-2i)(m+2-2i)\,c_{i-2} = 0,\\
&c_{-1} = 0, \qquad c_0 = 1,\\
&c_\sigma = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous indiquerons encore des formules pour le calcul des fonctions de Lamé (en les considérant comme des fonctions de ν) exprimées au moyen de l'angle (²)

$$
\varphi = \operatorname{am}\left[a(\zeta-\gamma), \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right].
$$

(¹) Heine, p. 362-368.

(²) *Ibid.*, p. 371-375.

Conservons les notations de Heine K, L, M, N pour les fonctions des première, deuxième, troisième et quatrième classes.

Posons

$$2\tau^m - m(m+1) = z, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = g$$

et déterminons α_i et α'_i à l'aide des conditions

$$(13)\quad \begin{cases} (i+1)(2m-2i-1)g\alpha_{i+1} - [(m-2i)^2+z]\alpha_i + (m+1-i)(2i-1)g\alpha_{i-1} = 0, \\ \alpha_0 = \dfrac{(a^2-b^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}, \qquad \alpha_{-1} = 0. \\ (i+1)(2m-2i-1)g\alpha'_{i+1} - [(m-1-2i)^2+z]\alpha'_i + (m-i)(2i+1)g\alpha'_{i-1} = 0, \\ \alpha'_0 = \dfrac{(a^2-b^2)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-2}}, \qquad \alpha'_{-1} = 0. \end{cases}$$

Si nous introduisons maintenant l'angle φ, à l'aide des équations

$$\sqrt{\nu^2-b^2} = \sqrt{a^2-b^2}\cos\varphi, \qquad \sqrt{a^2-\nu^2} = \sqrt{a^2-b^2}\sin\varphi,$$

nous obtiendrons, pour le calcul des fonctions de Lamé des différentes classes et des constantes qui leur correspondent, les formules et les équations suivantes :

m pair.

$$(14)\quad \begin{cases} K(\nu) = \alpha_0\cos m\varphi + \alpha_1\cos(m-2)\varphi + \ldots + \tfrac{1}{2}\alpha_\sigma, \\ \quad z\alpha_\sigma - (m+2)(m-1)g\alpha_{\sigma-1} = 0; \\ N(\nu) = \alpha_0\sin m\varphi + \alpha_1\sin(m-2)\varphi + \ldots + \alpha_{\sigma-1}\sin 2\varphi, \\ \quad (4+z)\alpha_{\sigma-1} - \dfrac{(m-3)(m+4)}{2}g\alpha_{\sigma-2} = 0; \\ L(\nu) = \nu[\alpha'_0\cos(m-1)\varphi + \alpha'_1\cos(m-3)\varphi + \ldots + \alpha'_{\sigma-1}\cos\varphi], \\ \quad \left[1+z-\dfrac{m(m+1)}{2}g\right]\alpha'_{\sigma-1} - \dfrac{(m-1)(m+2)}{2}g\alpha'_{\sigma-2} = 0; \\ M(\nu) = \nu[\alpha'_0\sin(m-1)\varphi + \alpha'_1\sin(m-3)\varphi + \ldots + \alpha'_{\sigma-1}\sin\varphi], \\ \quad \left[1+z+\dfrac{m(m+1)}{2}g\right]\alpha'_{\sigma-1} - \dfrac{(m-1)(m+2)}{2}g\alpha'_{\sigma-2} = 0. \end{cases}$$

m impair.

$$
(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{K}(\nu) = \nu[\alpha'_0 \cos(m-1)\varphi + \alpha'_1 \cos(m-3)\varphi + \ldots + \tfrac{1}{2}\alpha'_\sigma],\\
&\qquad z\alpha'_\sigma - m(m+1)g\alpha'_{\sigma-1} = 0;\\
&\mathrm{N}(\nu) = \nu[\alpha'_0 \sin(m-1)\varphi + \alpha'_1 \sin(m-3)\varphi + \ldots + \alpha'_{\sigma-1}\sin 2\varphi],\\
&\qquad (4+z)\alpha'_{\sigma-1} - \frac{(m-2)(m+3)}{2}g\alpha'_{\sigma-2} = 0;\\
&\mathrm{L}(\nu) = \alpha_0 \cos m\varphi + \alpha_1 \cos(m-2)\varphi + \ldots + \alpha_\sigma \cos\varphi,\\
&\left[1 + z - \frac{m(m+1)}{2}g\right]\alpha_\sigma - \frac{(m-2)(m+3)}{2}g\alpha_{\sigma-1} = 0;\\
&\mathrm{M}(\nu) = \alpha_0 \sin m\varphi + \alpha_1 \sin(m-2)\varphi + \ldots + \alpha_\sigma \sin\varphi,\\
&\left[1 + z + \frac{m(m+1)}{2}g\right]\alpha_\sigma - \frac{(m-2)(m+3)}{2}g\alpha_{\sigma-1} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

La méthode de Sturm s'applique facilement à l'étude des équations définissant z.

21. En entendant par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point, introduisons les coordonnées elliptiques λ, μ, ν et les coordonnées λ, θ, ψ à l'aide des équations

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&x = \sqrt{\lambda^2+a^2}\,\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{a^2-\nu^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\lambda^2+a^2}\sin\theta\cos\psi,\\
&y = \sqrt{\lambda^2+b^2}\,\frac{\sqrt{b^2-\mu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\lambda^2+b^2}\sin\theta\sin\psi,\\
&z = \lambda\frac{\mu\nu}{ab} = \lambda\cos\theta.
\end{aligned}\right.
$$

Ici λ^2, $-\mu^2$ et $-\nu^2$ sont les racines de l'équation du troisième degré en ξ :

$$
(17)\qquad \frac{x^2}{\xi+a^2} + \frac{y^2}{\xi+b^2} + \frac{z^2}{\xi} = 1,
$$

d'ailleurs λ, μ, ν sont compris entre les limites indiquées plus haut (o et ∞, $-b$ et $+b$, b et a), et θ, ψ respectivement entre les limites o et π, o et 2π. D'après cela, les formules (16), pour ψ donné, définissent entièrement les signes de $\sqrt{a^2-\nu^2}$ et de $\sqrt{b^2-\mu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}$.

Les coordonnées λ, μ, ν sont, comme on sait, orthogonales.

Par la substitution (16), l'équation aux dérivées partielles de Laplace prend a

forme

$$(18) \qquad (\nu^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + (\lambda^2 + \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (\mu^2 + \lambda^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = 0,$$

et l'on peut se convaincre facilement, à l'aide des équations (5), (6) et (8) que les fonctions

$$(19) \qquad E_k^m(\lambda)\,E_k^m(\mu)\,E_k^m(\nu) \quad \text{et} \quad F_k^m(\lambda)\,E_k^m(\mu)\,E_k^m(\nu)$$

sont des solutions particulières de l'équation (18). Nous arrivons ainsi à la conclusion que les transformées des fonctions (19), pour les variables x, y, z, satisfont à l'équation de Laplace.

On peut se convaincre facilement aussi que la transformée de la première des fonctions (19) est une fonction entière de degré m de x, y, z. En effet, si nous désignons par $\varphi_n(x)$ une fonction entière de degré n de x, et si nous entendons par σ_1, σ_2, σ_3, 0 ou 1, la première des fonctions (19), en vertu des équations (16), pourra toujours être présentée sous la forme

$$A\,x^{\sigma_1} y^{\sigma_2} z^{\sigma_3} \varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(\lambda^2)\,\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(-\mu^2)\,\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(-\nu^2),$$

où $\tau = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $m - \tau$ est toujours un nombre pair et A une constante. Mais

$$(20) \qquad \varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(\lambda^2)\,\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(-\mu^2)\,\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(-\nu^2)$$

est une fonction entière symétrique des racines de l'équation (17), fonction dont le degré par rapport à chaque racine est $\frac{m-\tau}{2}$. Donc, en remarquant que, si l'on présente cette équation sous la forme $\xi^3 + p_1\xi^2 + p_2\xi + p_3 = 0$, les coefficients p_1, p_2, p_3 seront du second degré par rapport à x, y, z, nous concluons que la transformée de la fonction (20) est une fonction entière de x, y, z, de degré $m - \tau$, ce qui démontre ce que l'on a énoncé plus haut.

On peut, à l'aide de ceci, démontrer les formules suivantes :

$$(21) \qquad \int \frac{E_k^m(\mu')\,E_k^m(\nu')}{\sqrt{(R^2+\mu'^2)(R^2+\nu'^2)}}\,\frac{ds'}{r} = \frac{4\pi}{2m+1}\,E_k^m(\mu)\,E_k^m(\nu) \begin{cases} E_k^m(\lambda)\,F_k^m(R), & \lambda \leqq R, \\ F_k^m(\lambda)\,E_k^m(R), & \lambda \geqq R, \end{cases}$$

dans lesquelles l'intégrale est supposée étendue à toute la surface de l'ellipsoïde, défini par l'équation $\lambda = R$. Il nous paraît superflu de nous arrêter à la démonstration, car elle serait entièrement semblable à celle des formules (13) du Chapitre précédent [1].

---

[1] Les formules (21), ou, plus exactement, des formules semblables ne contenant que

Ce que l'on vient de dire suffit pour transformer l'expression de la variation seconde de Π, pour les ellipsoïdes à trois axes. Dans les numéros qui suivent, nous exposerons les propriétés des fonctions de Lamé qui nous serviront pour la recherche de son signe.

22. On sait que toutes les racines de l'équation

$$\frac{E_k^m(x)}{x\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{x^2-b^2}} = 0 \tag{23}$$

sont réelles, distinctes et comprises entre les limites $-a$ et $+a$, n'étant ni nulles, ni égales à b ou à a, et en outre étant telles qu'à chaque racine x_0 correspond une racine $-x_0$ (¹).

Klein a complété ce théorème en montrant comment ces racines sont réparties dans les intervalles $(0, b)$ et (b, a), ou $(0, -b)$ et $(-b, -a)$ (²). En remarquant que l'équation (23) se réduit à une équation de degré n en x^2, si $n+1$ est le nombre de toutes les fonctions de Lamé appartenant à la classe de la fonction E_k^m, Klein démontre que chacun des cas possibles de répartition des n racines de cette équation dans les intervalles $(0, b^2)$ et (b^2, a^2) se rencontre effectivement pour une, et cela s'entend, seulement pour une des $n+1$ fonctions de Lamé appartenant à la classe considérée. Pour cela, il considère la question sous une forme géométrique, mais le point essentiel de sa démonstration consiste dans le passage à la limite pour $b = a$.

Klein se borne à démontrer ce qu'on vient d'énoncer; cependant sa méthode permet de résoudre également la question de savoir à quel indice k correspond un nombre donné s de racines, dans l'intervalle entre 0 et b^2. Comme cette question a pour nous une grande importance, nous allons maintenant démontrer un théorème qui en donne la solution et qui doit être considéré comme un complément du théorème de Klein.

Théorème I. — *Si l'indice (k), susceptible des valeurs* (1), (2), (3), ..., *caractérise les fonctions $E_{(k)}^m$ appartenant à une seule et même classe, et cela de telle manière que*

$$\tau_{(1)}^m, \quad \tau_{(2)}^m, \quad \ldots, \quad \tau_{(k)}^m, \quad \ldots$$

soit une suite décroissante, l'équation

$$E_{(k)}^m(x) = 0$$

a $k-1$ racines entre les limites a et b non égales à ces limites.

(¹) *Ibid.*, p. 382-384.

(²) Felix Klein, *Ueber Lamé'sche Functionen* (*Mathem. Ann.*, Bd. XVIII, 1881).

Si nous faisons la transformation antérieure

$$\sqrt{\nu^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2}\cos\varphi, \qquad \sqrt{a^2 - \nu^2} = \sqrt{a^2 - b^2}\sin\varphi,$$

et si nous posons

$$\cos^2\varphi = \xi,$$

nous aurons, d'après les formules (14) et (15),

$$E_{(k)}^{m}(\nu) = \nu^{\sigma_1}\cos^{\sigma_2}\varphi\,\sin^{\sigma_3}\varphi\, G_k^m(\xi),$$

où σ_1, σ_2, σ_3, comme précédemment, représentent des nombres égaux à o ou 1, et où $G_k^m(\xi)$ est une fonction entière de degré n relativement à ξ, $n+1$ étant le nombre des fonctions de Lamé qui appartiennent à la classe considérée. D'ailleurs l'équation

$$(24) \qquad G_k^m(\xi) = 0$$

a autant de racines, entre les limites o et 1, que l'équation

$$(25) \qquad E_k^m(x) = 0$$

a de racines, entre les limites b et a, non égales à ces dernières.

Remarquons maintenant que les racines de l'équation (24) dépendent seulement du rapport $\frac{b^2}{a^2}$, et que nous pouvons les considérer comme des fonctions de g (*voir* la fin du nº 20). Donc tout ce que l'on sait relativement à l'équation (25) peut être exprimé de la façon suivante :

Tant que g est compris entre o et 1, toutes les racines de l'équation (24) sont comprises entre les limites $-\frac{1-g}{2g}$ et 1, et restent distinctes, différentes de zéro et différentes de ces limites.

Puis, on peut démontrer que, tant que g n'atteint pas o, chaque racine demeure une fonction continue de g. D'après ce qu'on vient de dire au sujet des racines de l'équation (24), il suffit pour cela de démontrer que $\tau_{(k)}^m$ est une fonction continue de g, car, comme le montrent les formules (13), (14) et (15), l'équation (24) peut toujours être mise sous une forme telle que ses coefficients soient des fonctions entières de g et de z_k, si

$$z_k = 2\tau_{(k)}^m - m(m+1).$$

Quant à la continuité de z_k, et par conséquent de $\tau_{(k)}^m$, elle résulte, pour les valeurs considérées de g, des propriétés connues des racines de l'équation qui

sert à déterminer z, et de ce que cette équation se met sous la forme

$$(26)\qquad (z+\varepsilon^2)\big(z+(\varepsilon+2)^2\big)\ldots\big(z+(\varepsilon+2n)^2\big)+g\psi(z)=0,$$

où $\psi(z)$ représente, d'une manière générale, une fonction entière de z, d'un degré ne dépassant pas n, dont tous les coefficients sont des fonctions entières de g, et ε un des nombres 0, 1, 2; 0 correspondant toujours à des fonctions K (pour lesquelles $n=\sigma$), 1 à des fonctions L et M (pour lesquelles $n=m-\sigma-1$), et 2 à des fonctions N (pour lesquelles $n=\sigma-1$).

De tout ce qui précède, nous tirons la conclusion suivante : si, en supposant g une quantité infiniment petite, nous trouvons que l'équation (24) n'a pas de racines tendant vers zéro, le nombre de ses racines, tendant vers des limites comprises entre 0 et 1, est égal au nombre des racines de l'équation (25) comprises entre b et a, et différentes de ces dernières.

Or l'équation (26) donne, pour $g=0$,

$$(27)\qquad \lim z_k=-(\varepsilon+2k-2)^2,$$

et, par suite, les équations (13), (14), (15) conduisent aux égalités suivantes :

$$\lim\frac{x_0}{x_{n-k-1}}=\lim\frac{x_1}{x_{n-k+1}}=\ldots=\lim\frac{x_{n-k}}{x_{n-k+1}}=0\qquad\text{pour}\qquad 1\leqq k<n+1,$$

$$\lim\frac{x_n}{x_{n-k-1}}=\lim\frac{x_{n-1}}{x_{n-k+1}}=\ldots=\lim\frac{x_{n-k+2}}{x_{n-k+1}}=0\qquad\text{pour}\qquad 1<k\leqq n+1,$$

auxquelles il faut ajouter des égalités semblables, après avoir remplacé dans celles-ci x_i par x'_i.

On voit par là que l'équation (24) peut être présentée sous l'une des formes

$$\cos(2k-2)\varphi+\psi(\xi)=0,$$

$$\frac{\cos(2k-1)\varphi}{\cos\varphi}+\psi(\xi)=0,$$

$$\frac{\sin(2k-1)\varphi}{\sin\varphi}+\psi(\xi)=0,$$

$$\frac{\sin 2k\varphi}{\sin 2\varphi}+\psi(\xi)=0,$$

où $\psi(\xi)$ désigne, d'une manière générale, une fonction entière de degré n de ξ, dont tous les coefficients peuvent être rendus aussi petits que l'on veut, par un choix de g suffisamment petit; et ceci fait voir que, quand g tend vers zéro, $n-k+1$ racines de l'équation (24) demeurent supérieures en valeur numérique à une quantité croissant indéfiniment. Quant à ses $k-1$ autres racines,

quantités suivante :

$$(29)\qquad \begin{cases} \qquad (1,2),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2),\ (3,4),\ \ldots, \\ (1,1),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,3),\ (4,1),\ \ldots, \end{cases}$$

dont les termes se succèdent suivant une loi évidente.

Pour arriver à l'autre cas limite, il est plus commode de se servir des formules (9), (10), (11) et (12), dans lesquelles, pour $b=0$, il faut poser $q=0$ et $p=a^2$. D'après cela, on trouve que les limites de τ_k^m, pour les fonctions des deux premières classes, satisfont à l'équation

$$(\tau - m^2)\left(\tau-(m-2)^2\right)\ldots(\tau-\varepsilon^2)=0,$$

et, pour les fonctions des deux autres classes, à l'équation

$$\left(\tau-(m-1)^2\right)\left(\tau-(m-3)^2\right)\ldots(\tau-\varepsilon^2)=0,$$

où ε représente, comme précédemment, un des nombres 0, 1, 2. On obtient ainsi, pour $b=0$, la suite décroissante de quantités suivante, analogue à celle (29) :

$$(30)\qquad \begin{cases} (1,2),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2),\ (3,4),\ \qquad \ldots, \\ (1,1),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,3),\ (4,1),\ \ldots. \end{cases}$$

La comparaison des séries (29) et (30) montre que, pour b positif et inférieur à a, les nombres τ_k^m, rangés dans l'ordre décroissant, forment la suite

$$(31)\qquad (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3)\ (2,4),\ (3,1)\ \ldots,$$

dont les quatre derniers termes sont : pour m pair,

$$\left(\frac{m}{2},2\right),\quad \left(\frac{m}{2},3\right),\quad \left(\frac{m}{2},4\right),\quad \left(\frac{m}{2}+1,1\right),$$

et pour m impair,

$$\left(\frac{m-1}{2},4\right),\quad \left(\frac{m+1}{2},1\right),\quad \left(\frac{m+1}{2},2\right),\quad \left(\frac{m+1}{2},3\right).$$

La suite (31) met en évidence une loi très simple d'alternance des classes dans la série de tous les τ_k^m, rangés dans l'ordre décroissant.

Partout dans la suite, où nous aurons à considérer les fonctions E_k^m et E_k^m, nous donnerons à k les valeurs $1, 2, \ldots, 2m+1$, en supposant qu'*un accroissement de k corresponde à une diminution de τ_k^m*. Avec cette convention, la loi trouvée pourra être exprimée de la manière suivante :

Si l'on désigne par o *la quatrième classe des fonctions de Lamé, la fonction* E_k^m *appartiendra à la classe i, quand le nombre k, après division par 4, donne pour reste le nombre i.*

C'est ainsi que la fonction E_{2m+1}^m appartiendra à la première ou à la troisième classe, selon que m est pair ou impair.

Jusqu'ici, nous n'avons considéré τ_k^m que comme une fonction de k. En le considérant maintenant comme une fonction de m et de k, nous pourrons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème II. — *Si $f(m)$ désigne une des fonctions $2m-2$, $2m-1$, $2m$ ou $2m+1$, on a*

$$\tau_{f(m+1)}^{m+1} - \tau_{f(m)}^m = 2(m+1)\frac{b^2\theta}{a^2+b^2},$$

où θ est une fraction positive.

Remarquons, en effet, que si $\tau_{f(m)}^m$ appartient à la 1re, 2e, 3e ou 4e classe, $\tau_{f(m+1)}^{m+1}$, appartiendra respectivement à la 3e, 4e, 1re ou 2e classe, et que par conséquent l'expression

$$E_{f(m)}^m(\mu)\frac{d\,E_{f(m+1)}^{m+1}(\mu)}{d\beta} - E_{f(m+1)}^{m+1}(\mu)\frac{d\,E_{f(m)}^m(\mu)}{d\beta}$$

s'annulera aussi bien pour $\mu = 0$ que pour $\mu = b$. Par suite, l'équation (5) conduit à l'égalité

$$\int_0^{\eta}\left[2(m+1)\mu^2 - p\left(\tau_{f(m+1)}^{m+1} - \tau_{f(m)}^m\right)\right] E_{f(m)}^m(\mu)\, E_{f(m+1)}^{m+1}(\mu)\, d\beta = 0.$$

Or chacune des fonctions $E_k(\mu)$, qui figurent sous le signe de l'intégrale, correspond à la plus grande de toutes les valeurs que peut prendre k pour la classe de cette fonction et, par conséquent, en vertu du corollaire du théorème I, aucune d'elles ne change de signe entre les limites de l'intégration. L'égalité obtenue n'est donc possible que si la fonction

$$2(m+1)\mu^2 - p\left(\tau_{f(m+1)}^{m+1} - \tau_{f(m)}^m\right)$$

change de signe entre ces limites; d'où résulte l'exactitude de notre théorème.

Il faut remarquer que, tant que b n'est pas nul, θ ne peut ni s'annuler, ni devenir égal à l'unité.

Corollaire I. — Quel que soit l'entier positif n, on a

$$\tau_{f(m)}^m - \tau_{f(n)}^n = (m-n)(m+n+1)\frac{b^2\theta}{a^2+b^2},$$

où θ est une fraction positive.

Corollaire IV. — Si, pour $m > 1$, le nombre k, après division par 4, donne pour reste $1 + (-1)^m$ ou $2 + (-1)^m$, le rapport

$$\frac{\mathbf{E}_k^m(\lambda)}{\mathbf{E}_1^1(\lambda)}$$

croît quand λ croît (corollaire II du théorème II).

Théorème IV. — *Le produit*

$$\frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_k^m(\lambda)\,\mathbf{F}_k^m(\lambda)$$

croît, quand k augmente de $2 - (-1)^k$, et, pour k égal à l'un des nombres 1, 2, 3, 4, *décroît, quand m augmente de deux unités.*

Théorème V. — *Si $f(m)$ représente l'une des fonctions $2m - 2$, $2m - 1$, $2m$ ou $2m + 1$, l'expression*

$$\frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_{f(m)}^m(\lambda)\,\mathbf{F}_{f(m)}^m(\lambda)$$

décroît quand m croît.

Théorème VI. — *Si, pour $m > 1$, le reste obtenu, après division de k par 4, est égal à $1 + (-1)^m$ ou à $2 + (-1)^m$, la fonction*

$$\frac{1}{3}\mathbf{E}_1^1(\lambda)\,\mathbf{F}_1^1(\lambda) - \frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_k^m(\lambda)\,\mathbf{F}_k^m(\lambda)$$

conserve des valeurs positives pour toutes les valeurs positives finies de λ.

Nous nous servirons, pour démontrer ces théorèmes, de la formule (4), qui donne

$$\frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_k^m(\lambda)\,\mathbf{F}_k^m(\lambda) - \frac{1}{2n+1}\mathbf{E}_s^n(\lambda)\,\mathbf{F}_s^n(\lambda)$$
$$= \int_\lambda^\infty \left[\frac{\mathbf{E}_k^m(\lambda)}{\mathbf{E}_s^n(x)}\right]^2 \left\{\left[\frac{\mathbf{E}_s^n(x)}{\mathbf{E}_k^m(x)}\right]^2 - \left[\frac{\mathbf{E}_s^n(\lambda)}{\mathbf{E}_k^m(\lambda)}\right]^2\right\} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}};$$

et cette égalité, en vertu des corollaires I et III du lemme I, conduit au théorème IV, en vertu du corollaire II au théorème V, et en vertu du corollaire IV au théorème VI.

Il faut remarquer que dans les cas limites, $b = 0$ et $b = a$, l'accroissement et le décroissement peuvent se changer en invariabilité.

Nous pourrions terminer par là le Chapitre des fonctions de Lamé, car les propriétés énoncées suffisent pour résoudre la question de la stabilité des ellipsoïdes

à trois axes. Mais il nous paraît opportun d'appeler ici l'attention sur les propriétés analogues des fonctions de Lamé à argument réel dépassant a. C'est pourquoi, avant de passer au Chapitre suivant, nous nous arrêterons sur ces propriétés, d'autant qu'elles peuvent jouer un rôle semblable pour la résolution de notre problème.

25. Nous supposerons dans ce numéro $\lambda > a$.

Dans cette hypothèse, on peut démontrer les propositions suivantes :

Lemme II. — *Si, pour* $n \geqq m$,

$$\tau_s^n - \tau_k^m \leqq (n-m)(n+m+1)\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

(*où les signes d'égalité ne doivent pas avoir lieu simultanément*), *et si le plus petit résidu positif du nombre* $s-k$ *suivant le module* 4 *est égal à* 0 *ou à* $2+(-1)^k$, *le rapport*

$$\frac{E_s^n(\lambda)}{E_k^m(\lambda)}$$

croît quand λ *croît.*

Les conditions énoncées ici sont équivalentes aux suivantes : les fonctions E_s^n et E_k^m appartiennent ou bien à la même classe, ou l'une à la première, l'autre à la deuxième, ou enfin l'une à la troisième, l'autre à la quatrième. Comme, dans ces conditions, la fonction

$$E_k^m(\lambda)\frac{d\,E_s^n(\lambda)}{d\alpha_1} - E_s^n(\lambda)\frac{d\,E_k^m(\lambda)}{d\alpha_1}$$

s'annule pour $\lambda = a$, l'équation (7) conduit à l'égalité

$$E_k^m(\lambda)\frac{d\,E_s^n(\lambda)}{d\alpha_1} - E_s^n(\lambda)\frac{d\,E_k^m(\lambda)}{d\alpha_1}$$
$$= \int_0^{\alpha_1}[(n-m)(n+m+1)\lambda^2 - p(\tau_s^n - \tau_k^m)]\,E_k^m(\lambda)\,E_s^n(\lambda)\,d\alpha_1,$$

et de là résulte l'exactitude du lemme.

Corollaire I. — Si, pour $s > k$, la différence $s-k$, après division par 4, donne pour reste 0 ou $2+(-1)^k$, le rapport

$$\frac{E_s^m(\lambda)}{E_k^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît.

Corollaire II. — Si i est un des nombres 1, 2, 3, 4, le rapport

$$\frac{E_i^{m+1}(\lambda)}{E_i^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît (théorème III).

Corollaire III. — Si $f(m)$ désigne une des fonctions $2m-2$, $2m-1$, $2m$ ou $2m+1$, le rapport

$$\frac{E_{f(m+2)}^{m+2}(\lambda)}{E_{f(m)}^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît (théorème II).

Corollaire IV. — Si, pour $m>1$, le nombre k, après division par 4, donne pour reste 0 ou 3, le rapport

$$\frac{E_k^m(\lambda)}{E_3^1(\lambda)}$$

croît quand λ croît (corollaire I du théorème III).

En s'appuyant sur ces résultats, on peut démontrer les théorèmes suivants :

Théorème VII. — *Le produit*

$$\frac{1}{2m+1} E_k^m(\lambda) F_k^m(\lambda)$$

décroît quand k croît de $2+(-1)^k$, et, pour k égal à l'un des nombres 1, 2, 3, 4, *décroît quand m croît.*

Théorème VIII. — *Si $f(m)$ désigne une des fonctions $2m-2$, $2m-1$, $2m$ ou $2m+1$, l'expression*

$$\frac{1}{2m+1} E_{f(m)}^m(\lambda) F_{f(m)}^m(\lambda)$$

décroît quand m croît de deux unités.

Théorème IX. — *Si, pour $m>1$, le nombre k, après division par* 4, *donne pour reste* 0 *ou* 3, *la fonction*

$$\frac{1}{3} E_3^1(\lambda) F_3^1(\lambda) - \frac{1}{2m+1} E_k^m(\lambda) F_k^m(\lambda)$$

conserve des valeurs positives pour toute valeur finie de λ dépassant a.

Pour démontrer ces théorèmes, on peut se servir de la formule (3).

Corollaire II. — Si i est un des nombres 1, 2, 3, 4, le rapport

$$\frac{E_i^{m+1}(\lambda)}{E_i^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît (théorème III).

Corollaire III. — Si $f(m)$ désigne une des fonctions $2m-2$, $2m-1$, $2m$ ou $2m+1$, le rapport

$$\frac{E_{f(m+2)}^{m+2}(\lambda)}{E_{f(m)}^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît (théorème II).

Corollaire IV. — Si, pour $m>1$, le nombre k, après division par 4, donne pour reste 0 ou 3, le rapport

$$\frac{E_k^m(\lambda)}{E_3^1(\lambda)}$$

croît quand λ croît (corollaire I du théorème III).

En s'appuyant sur ces résultats, on peut démontrer les théorèmes suivants :

Théorème VII. — *Le produit*

$$\frac{1}{2m+1}E_k^m(\lambda)F_k^m(\lambda)$$

décroît quand k croît de $2+(-1)^k$, et, pour k égal à l'un des nombres 1, 2, 3, 4, *décroît quand m croît.*

Théorème VIII. — *Si $f(m)$ désigne une des fonctions $2m-2$, $2m-1$, $2m$ ou $2m+1$, l'expression*

$$\frac{1}{2m+1}E_{f(m)}^m(\lambda)F_{f(m)}^m(\lambda)$$

décroît quand m croît de deux unités.

Théorème IX. — *Si, pour $m>1$, le nombre k, après division par 4, donne pour reste* 0 *ou* 3, *la fonction*

$$\frac{1}{3}E_3^1(\lambda)F_3^1(\lambda)-\frac{1}{2m+1}E_k^m(\lambda)F_k^m(\lambda)$$

conserve des valeurs positives pour toute valeur finie de λ dépassant a.

Pour démontrer ces théorèmes, on peut se servir de la formule (3).

les conditions d'équilibre s'exprimeront, comme on sait, par le système des deux équations suivantes :

$$(1)\qquad \frac{\omega^2}{4\pi f\rho \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}^2+a^2}\sqrt{\mathrm{R}^2+b^2}} = \frac{a^2}{\mathrm{R}^2+a^2}\int_{\mathrm{R}}^{\infty}\frac{(\lambda^2-\mathrm{R}^2)\,d\lambda}{\lambda^2(\lambda^2+a^2)\mathrm{D}} = \frac{b^2}{\mathrm{R}^2+b^2}\int_{\mathrm{R}}^{\infty}\frac{(\lambda^2-\mathrm{R}^2)\,d\lambda}{\lambda^2(\lambda^2+b^2)\mathrm{D}},$$

et, pour ce qui suit, il importe d'attirer l'attention sur ce fait que le résultat de l'élimination de ω^2 entre ces équations, pour des ellipsoïdes à trois axes, peut être mis sous la forme

$$(2)\qquad \mathrm{R}^2\int_{\mathrm{R}}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2\mathrm{D}} - (\mathrm{R}^2+a^2)(\mathrm{R}^2+b^2)\int_{\mathrm{R}}^{\infty}\frac{d\lambda}{\mathrm{D}^3} = 0.$$

Les égalités (1) définissent les rapports $\frac{a}{\mathrm{R}}$ et $\frac{b}{\mathrm{R}}$ en fonction de ω. Si l'on introduit, comme le font Meyer et Liouville, les rapports s et t des carrés des axes, en posant

$$(3)\qquad a^2 = \frac{1-t}{t}\mathrm{R}^2, \qquad b^2 = \frac{1-s}{s}\mathrm{R}^2,$$

et si l'on pose en outre

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = v,$$

les équations (1) prendront la forme suivante :

$$(4)\qquad v = (1-s)(1-t)\int_0^{\infty}\frac{u\,du}{\Delta^3}$$

et

$$(5)\qquad (1-s-t)\int_0^{\infty}\frac{u\,du}{\Delta^3} - st\int_0^{\infty}\frac{u^2\,du}{\Delta^3} = 0,$$

où

$$\Delta = \sqrt{(1+u)(1+su)(1+tu)}.$$

Après avoir déterminé s et t, d'après ces équations, pour une valeur donnée de v, on trouve R par la formule

$$(6)\qquad \mathrm{R} = \sqrt[3]{\frac{3\mathrm{Q}}{4\pi}}\,(st)^{\frac{1}{6}},$$

dans laquelle, comme précédemment, Q représente le volume du liquide.

Comme le montrent les formules (3), s et t sont des fractions positives, vérifiant l'inégalité $s > t$. D'ailleurs, d'après l'équation (5), elles doivent satisfaire à

la condition

$$s + t \leqq 1,$$

où le signe d'égalité ne peut se rapporter qu'au cas de $t = 0$.

Dans son second Mémoire sur les ellipsoïdes de Jacobi, Liouville [1] démontre que, quant v croît de 0 jusqu'à un certain maximum (0,18711...), t et st croissent constamment depuis 0, et s décroît depuis 1, et, quand v atteint sa plus grande valeur, s devient égal à t. Il résulte de là que, quand v croît depuis 0, R et $\frac{b}{R}$ croissent aussi constamment à partir de 0, et $\frac{a}{R}$ et a décroissent depuis ∞.

Après ces remarques préliminaires, revenons à notre problème, l'étude de la stabilité des ellipsoïdes de Jacobi.

27. Exprimons les coordonnées rectangulaires du point x, y, z, au moyen des coordonnées λ, θ, ψ ou λ, μ, ν, par les formules (16) du Chapitre précédent. L'équation de l'ellipsoïde considéré se ramènera à la forme $\lambda = R$, et si nous posons

$$\begin{aligned} \varkappa &= \sqrt{(R^2+\mu^2)(R^2+\nu^2)} \\ &= \sqrt{(R^2+a^2)(R^2+b^2)\cos^2\theta + R^2(R^2+a^2)\sin^2\theta\sin^2\psi + (R^2+b^2)R^2\sin^2\theta\cos^2\psi}, \end{aligned}$$

l'élément de surface de cet ellipsoïde s'exprimera de la manière suivante :

$$ds = (\nu^2 - \mu^2)\varkappa\, d\beta\, d\gamma = \varkappa \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Nous concluons de là, comme dans l'étude des ellipsoïdes de révolution, que, si l'on développe la fonction $\varkappa\,\delta n$ en série de fonctions sphériques de θ et ψ, pour que les conditions (23) et (24) du premier Chapitre soient satisfaites, cette série ne doit pas renfermer de fonctions sphériques d'ordre nul et du premier ordre.

Nous poserons par suite

$$(7) \qquad \varkappa\,\delta n = \sum_{m=2}^{m=\infty} Y_m(\theta, \psi) = \sum_{m=2}^{m=\infty} Y_m[\mu, \nu],$$

où $Y_m[\mu, \nu]$ est la transformée, pour les variables μ et ν, de la fonction sphérique de θ et ψ d'ordre m, $Y_m(\theta, \psi)$. Nous développerons cette fonction en série

---

(1) *Mémoire sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation* (*Journ. de Liouville*, t. XVI, 1851).

ordonnée suivant les produits de fonctions de Lamé (n° 21)

$$(8)\qquad Y_m[\mu,\nu] = \sum_{i=1}^{i=2m+1} \varepsilon_i^m E_i^m(\mu) E_i^m(\nu),$$

où ε_i^m sont des constantes.

Nous remarquons ensuite que, en vertu de la condition d'équilibre,

$$\frac{\partial U}{\partial n} = A\varkappa,$$

où A est une constante que nous pourrons déterminer en faisant dans cette équation $\theta = 0$. Nous aurons alors

$$\varkappa = \sqrt{(R^2+a^2)(R^2+b^2)},$$

et $\frac{\partial U}{\partial n}$ deviendra l'accélération de la pesanteur au pôle, c'est-à-dire

$$4\pi f\rho\sqrt{R^2+a^2}\sqrt{R^2+b^2}\,R^2\int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D}.$$

Nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 4\pi f\rho R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D}\varkappa.$$

Par suite, en posant

$$H_i^m = \varepsilon_i^m E_i^m(\mu) E_i^m(\nu),$$

nous aurons, d'après la formule (22) du Chapitre IV,

$$\int \frac{\partial U}{\partial n}(\delta n)^2 ds = 4\pi f\rho R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D} \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{i=1}^{i=2m+1} \int (H_i^m)^2 d\sigma,$$

où $d\sigma$, comme précédemment, représente un élément de la surface de la sphère de rayon 1, sur laquelle s'effectue l'intégration.

Puis, d'après les formules (21) et (22) du Chapitre précédent, il viendra

$$\int\int \frac{\delta n\,\delta n'\,ds\,ds'}{r} = 4\pi \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{i=1}^{i=2m+1} \frac{E_i^m(R) F_i^m(R)}{2m+1} \int (H_i^m)^2 d\sigma,$$

et, par conséquent, les formules (27) et (39) du Chapitre I donneront

$$(9)\qquad \delta^2 \Pi_1 = 4\pi f\rho \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{i=1}^{i=2m+1} T_i^m \int (H_i^m)^2 d\sigma + \Omega,$$

fonction sphérique d'ordre m, $Y_m(\theta, \psi)$, peut toujours être mise sous la forme d'une fonction entière de degré m, de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$ et $\sin\theta\sin\psi$, et de ce que son degré ne peut être abaissé à l'aide de la relation liant ces trois quantités. On voit par là que si tous les déplacements se réduisent à ceux qui correspondent à une valeur donnée de m, $\varkappa\,\delta n$ pourra toujours être mis sous la forme d'une fonction entière de degré m, de x, y, z (coordonnées d'un point de la surface de l'ellipsoïde), et son degré ne pourra pas être abaissé à l'aide de l'équation de l'ellipsoïde, d'où résulte, en vertu des considérations développées au n° 16, ce qui a été énoncé plus haut.

Nous allons considérer maintenant les déplacements correspondant à $m = 2$, après lesquels l'ellipsoïde demeure encore un ellipsoïde. Ce nouvel ellipsoïde aura le même volume et le même centre que l'ellipsoïde primitif, et à ces conditions près, ce sera un ellipsoïde arbitraire dont la surface diffère infiniment peu de celle de l'ellipsoïde primitif.

A l'aide des formules (9), (10), (11), (12) du Chapitre IV, on trouve facilement

$$E_1^2(\mu) = \mu^2 - k_1,$$
$$E_2^2(\mu) = \sqrt{b^2 - \mu^2}\,\mu,$$
$$E_3^2(\mu) = \sqrt{a^2 - \mu^2}\,\mu,$$
$$E_4^2(\mu) = \sqrt{a^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \mu^2},$$
$$E_5^2(\mu) = \mu^2 - k_5,$$

où k_1 et k_5 sont les quantités définies par les formules (12).

D'après cela, les formules (16) du Chapitre IV, où l'on posera $\lambda = R$, donnent

$$E_2^2(\mu)\,E_2^2(\nu) = ab^2\sqrt{a^2 - b^2}\,\frac{y}{\sqrt{R^2 + b^2}}\,\frac{z}{R},$$

$$E_3^2(\mu)\,E_3^2(\nu) = a^2 b\sqrt{a^2 - b^2}\,\frac{z}{R}\,\frac{x}{\sqrt{R^2 + a^2}},$$

$$E_4^2(\mu)\,E_4^2(\nu) = ab(a^2 - b^2)\,\frac{x}{\sqrt{R^2 + a^2}}\,\frac{y}{\sqrt{R^2 + b^2}},$$

$$E_1^2(\mu)\,E_1^2(\nu) = (k_1 - b^2)k_1\,\frac{x^2}{R^2 + a^2} + k_1(k_1 - a^2)\,\frac{y^2}{R^2 + b^2} + (k_1 - a^2)(k_1 - b^2)\,\frac{z^2}{R^2},$$

$$E_5^2(\mu)\,E_5^2(\nu) = (k_5 - b^2)k_5\,\frac{x^2}{R^2 + a^2} + k_5(k_5 - a^2)\,\frac{y^2}{R^2 + b^2} + (k_5 - a^2)(k_5 - b^2)\,\frac{z^2}{R^2}.$$

On voit par là que les déplacements, qui correspondent à l'indice inférieur égal à 2, 3 ou 4, peuvent toujours être considérés (si $b \neq 0$ et $b \neq a$) comme consistant en des rotations d'ensemble de toute la masse liquide respectivement autour des

axes des x, des y et des z, et inversement, si tous les déplacements du liquide se réduisent à une rotation autour d'un axe quelconque, passant par l'origine des coordonnées, il n'y aura pas, dans les formules (7) et (8), d'autres termes en dehors de ceux que l'on obtient pour $m = 2$ et $i = 2, 3, 4$. Ainsi, par exemple, si tous les ε, à l'exception de ε_4^2, sont nuls, tous les déplacements, tant que b n'est pas égal à a, peuvent être considérés comme résultant d'une rotation de la masse liquide autour de l'axe des z, et inversement (¹).

Puis, on voit que les déplacements correspondant à $i = 1$ et $i = 5$ changent l'ellipsoïde donné en un ellipsoïde concentrique, sans changer les directions de ses axes (²). On peut d'ailleurs trouver entre ε_1^2 et ε_5^2 une dépendance telle que le nouvel ellipsoïde représentera encore une figure d'équilibre. Comme, pour ce qui suit, il nous est nécessaire de connaître cette dépendance, nous nous occuperons maintenant de sa recherche. Mais, si nous procédions par voie directe, nous serions conduits, pour l'obtenir dans la forme sous laquelle nous aurons à nous en servir, à effectuer beaucoup de calculs. C'est pourquoi nous procéderons autrement, savoir, comme nous devrions opérer pour résoudre d'une façon générale la question des figures d'équilibre différant infiniment peu des figures ellipsoïdales.

Nous nous servirons de l'équation (35) du Chapitre I, dans laquelle $\delta\omega$ est un accroissement infiniment petit de la vitesse angulaire, définissant le passage de la figure d'équilibre considérée à la figure infiniment voisine cherchée. En remplaçant, dans cette équation, $x^2 + y^2$ par son expression (13), et $\varkappa\,\delta n$ par le développement défini dans les formules (7) et (8), nous la mettrons facilement sous la forme

$$4\pi f\rho \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{i=1}^{i=2m+1} \mathrm{T}_i^m \varepsilon_i^m \mathrm{E}_i^m(\mu)\,\mathrm{E}_i^m(\nu)$$
$$+ \omega\left\{g_0 + g_1 \mathrm{E}_1^2(\mu)\,\mathrm{E}_1^2(\nu) + g_5 \mathrm{E}_5^2(\mu)\,\mathrm{E}_5^2(\nu)\right\}\delta\omega = \frac{5}{3}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{Q}}\,\omega\,\delta\omega;$$

et de là on tire, entre autres,

$$(16) \qquad \varepsilon_1^2 = -\frac{\omega g_1 \delta\omega}{4\pi f\rho \mathrm{T}_1^2}, \qquad \varepsilon_5^2 = -\frac{\omega g_5 \delta\omega}{4\pi f\rho \mathrm{T}_5^2},$$

(¹) Pour $b = a$, les déplacements correspondant à $i = 4$ ont une autre signification. (*Voir* nº **16.**)

(²) On peut remarquer que, entre les déplacements correspondant à $i = 1$ et ceux qui correspondent à $i = 5$, il y a une différence essentielle : les premiers changent dans le même sens le grand axe et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et les seconds le petit et le moyen. (*Voir* corollaire du théorème I, nº **22.**)

ce qui donne la dépendance cherchée

$$T_1^2 \frac{\varepsilon_1^2}{g_1} = T_5^2 \frac{\varepsilon_5^2}{g_5}. \tag{17}$$

Revenons maintenant à la recherche du signe de l'expression (9).

29. En vertu du théorème VI (Chap. IV), l'expression (11) montre que T_i^m, pour $m > 1$, demeure positive pour toute valeur de b non nulle, si i, après division par 4, donne pour reste $1 + (-1)^m$ ou $2 + (-1)^m$. Nous en concluons les inégalités suivantes :

$$T_2^2 > 0, \qquad T_3^2 > 0.$$

De plus, nous savons, d'après le théorème IV, que T_i^m décroît quand i croît de $2 - (-1)^i$, et ceci conduit aux inégalités suivantes :

$$T_1^2 > T_4^2 > T_5^2.$$

Or, d'après la formule (10) et à l'aide des formules (4) et (12) du Chapitre précédent, on trouve

$$T_4^2 = R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D} - (R^2 + a^2)(R^2 + b^2) \int_R^\infty \frac{d\lambda}{D^3}.$$

Donc, en vertu de l'équation (2), on aura

$$T_4^2 = 0 \tag{18}$$

et, par conséquent (¹),

$$T_1^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad T_5^2 < 0.$$

Nous allons maintenant montrer que, bien que T_5^2 soit une quantité négative, l'ensemble des termes de l'expression (9), dépendant de ε_1^2 et ε_5^2, ne peut prendre de valeurs négatives, et que, en outre, si l'on exclut les cas limites des ellipsoïdes de Jacobi, il ne peut s'annuler, ε_1^2 et ε_5^2 n'étant pas nuls simultanément.

Admettons, pour cela, que tous les ε, à l'exception de ε_1^2 et de ε_5^2, soient nuls. La formule (9), si l'on se sert de la formule (15), prendra alors la forme

$$\delta^2 \Pi_1 = A_1 (\varepsilon_1^2)^2 - A_5 (\varepsilon_5^2)^2 + \Omega = A_1 (\varepsilon_1^2)^2 - A_5 (\varepsilon_5^2)^2 + (B_1 \varepsilon_1^2 + B_5 \varepsilon_5^2)^2, \tag{19}$$

où

$$A_1 = 4\pi f \rho T_1^2 G_1, \qquad A_5 = -4\pi f \rho T_5^2 G_5,$$

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{S}} \omega g_1 G_1, \qquad B_5 = \frac{1}{\sqrt{S}} \omega g_5 G_5,$$

(¹) En excluant $b = a$, quand $T_5^2 = 0$.

de sorte que, d'après ce que l'on a démontré plus haut, A_1 et A_5 seront des quantités positives.

Nous remarquons maintenant que la formule (19) peut être mise sous la forme

$$(20)\qquad \delta^2\Pi_1 = \frac{A_1 B_5^2 - A_5 B_1^2 - A_1 A_5}{A_1 + B_1^2}(\varepsilon_5^2)^2 + \frac{[(A_1 + B_1^2)\varepsilon_1^2 + B_1 B_5 \varepsilon_5^2]^2}{A_1 + B_1^2}.$$

Or, nous savons, d'après la recherche du n° 8, que, si tous les déplacements se réduisent à des déplacements qui changent l'ellipsoïde en un autre ellipsoïde, représentant une nouvelle figure d'équilibre, l'expression $\delta^2\Pi_1 - \Omega$ prend la forme définie par la formule (37) du Chapitre I. Par suite, en posant dans l'égalité (19), conformément aux formules (16),

$$\varepsilon_1^2 = -\sqrt{S}\,\frac{B_1}{A_1}\,\delta\omega, \qquad \varepsilon_5^2 = \sqrt{S}\,\frac{B_5}{A_5}\,\delta\omega,$$

nous pouvons en conclure

$$\frac{A_1 B_5^2 - A_5 B_1^2}{A_1 A_5} = -\frac{\omega}{S}\,\frac{dS}{d\omega};$$

d'où

$$\frac{A_1 B_5^2 - A_5 B_1^2 - A_1 A_5}{A_1 A_5} = -\frac{1}{S}\,\frac{dJ}{d\omega},$$

J, comme précédemment, représentant $S\omega$. La formule (20) se réduit donc à

$$\delta^2\Pi_1 = -\frac{A_1 A_5}{S(A_1 + B_1^2)}\,\frac{dJ}{d\omega}(\varepsilon_5^2)^2 + \frac{[(A_1 + B_1^2)\varepsilon_1^2 + B_1 B_5 \varepsilon_5^2]^2}{A_1 + B_1^2}.$$

Mais, comme on l'a déjà remarqué plus haut, A_1 et A_5 sont des quantités positives; d'ailleurs, si l'on exclut les cas limites, ni A_1, ni A_5, ni B_1, ni B_5 ne peuvent s'annuler. On sait, en outre, d'après les recherches de Liouville, que $\frac{dJ}{d\omega}$ est une quantité négative qui ne peut s'annuler, quand $s > t > 0$ (¹). Nous arrivons donc à cette conclusion que $\delta^2\Pi_1$ ne peut prendre de valeurs négatives, et que, d'ailleurs, si l'on exclut les cas limites, l'égalité

$$\delta^2\Pi_1 = 0$$

a comme conséquence nécessaire les égalités : $\varepsilon_1^2 = 0$ et $\varepsilon_5^2 = 0$.

De ce que nous venons de montrer, il résulte que l'ensemble des termes de l'expression (9), dépendant des coefficients ε_i^2, ne peut prendre, pour $a > b > 0$,

(¹) *Mémoire sur les figures ellipsoïdales, etc.* (*J. de Liouville*, t. XVI, 1851).

de valeurs négatives et s'annule seulement pour $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = \varepsilon_5^2 = 0$. Or, le coefficient ε_4^2, demeurant en général différent de o, définit, comme nous l'avons vu, seulement une rotation de la masse liquide autour de l'axe des z. Nous en concluons donc que, *pour les déplacements et vitesses à l'instant initial, après lesquels la surface du liquide demeure ellipsoïdale pendant toute la durée du mouvement, tous les ellipsoïdes à trois axes de Jacobi sont des figures d'équilibre stable;* ce qui est conforme au résultat de Riemann, dans ses recherches sur la stabilité relativement à des déplacements et des vitesses satisfaisant aux hypothèses de Dirichlet (¹).

30. L'analyse du Chapitre IV conduit à la conclusion que T_i^m, si l'on a simultanément $m > 2$ et $i < 2m + 1$, demeure toujours positive. En effet, l'égalité (18), en vertu du théorème V, donne

$$T_{2m}^m > 0$$

pour toute valeur de m dépassant 2, et nous en déduisons, en vertu du théorème IV,

$$T_{2i}^m > 0 \qquad \text{et} \qquad T_{2i+1}^m > 0,$$

si i est de même parité que m et, pour la seconde inégalité, ne dépasse pas $m - 2$. En rapprochant ceci de la remarque faite au commencement du numéro précédent, nous arrivons à la conclusion ci-dessus.

Il ne nous reste donc plus qu'à rechercher T_{2m+1}^m.

Les formules (4) et (11) du Chapitre précédent donnent l'expression suivante pour T_7^3 :

$$T_7^3 = R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D} - (R^2 + a^2)(R^2 + h)^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 + a^2)(\lambda^2 + h)^2 D},$$

où h est la plus grande des racines de l'équation

$$5h^2 - 2(a^2 + 2b^2)h + a^2 b^2 = 0,$$

laquelle, comme nous le savons, est comprise entre b^2 et a^2. Si, ensuite, on se sert de l'équation (18), cette expression se met facilement sous la forme

$$(21) \qquad T_7^3 = (R^2 + a^2) \int_R^\infty \frac{(\lambda^2 - R^2)[(R^2 + b^2)(\lambda^2 - R^2) + (R^2 + h)(R^2 + 2b^2 - h)]\, d\lambda}{(\lambda^2 + h)^2 D^3}.$$

On voit par là que, tant que la condition

$$(22) \qquad R^2 + 2b^2 \geqq h$$

(¹) *B. Riemann's mathem. Werke* herausgegeben von Weber, 1876 (p. 196, 197).

est satisfaite, on a certainement $T_7^3 > 0$. Or, cette condition sera toujours satisfaite pour b suffisamment voisin de a. Par conséquent, nous pouvons affirmer que T_7^3 demeure positif, tant que le rapport du plus grand axe de l'ellipsoïde au moyen ne dépasse pas une certaine limite [en réalité supérieure à celle qui est donnée par la condition (22), conjointement avec l'équation (2)]. Pour montrer que l'inégalité $T_7^3 > 0$ n'a lieu que sous cette condition, nous allons maintenant établir que, si l'on considère T_7^3, en vertu des équations (3), (5) et (6), comme une fonction de s, l'équation

$$T_7^3 = 0 \tag{23}$$

a une racine, *et n'en a qu'une seule,* entre la plus petite valeur de s (quand $s = t = 0, 3\ldots$) et 1, différente de ces limites, et que, pour s dépassant cette racine, $T_7^3 \leqq 0$, le signe d'égalité se rapportant seulement au cas limite $s = 1$ (¹).

En posant

$$U = \frac{u}{\left(u + \frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u + \frac{R^2 + a^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(u + \frac{R^2 + b^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(u + \frac{R^2 + h}{a^2}\right)^2},$$

$$X = \int_0^\infty \left(u + \frac{R^2 + h}{a^2}\right) U\,du, \qquad Y = \int_0^\infty U\,du,$$

nous pouvons mettre l'égalité (21) (en faisant la substitution $\lambda^2 = R^2 + a^2 u$) sous la forme suivante

$$\frac{2a^5}{(R^2 + a^2)(R^2 + b^2)}\,\frac{T_7^3}{Y} = \frac{X}{Y} - \frac{h - b^2}{a^2}\,\frac{R^2 + h}{R^2 + b^2}. \tag{24}$$

Nous savons que $\frac{R^2}{a^2}$ et $\frac{b^2}{a^2}$ sont des fonctions décroissantes de s (n° **26**). En nous appuyant sur cela, nous pouvons démontrer que $\frac{h}{a^2}$ décroît, et que $\frac{h - b^2}{a^2}$

(¹) Comme

$$\int_R^\infty \frac{d\lambda}{D} = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}}(st)^{\frac{1}{3}} \int_0^\infty \frac{du}{\Delta},$$

on voit facilement que

$$\lim \left(\int_R^\infty \frac{d\lambda}{D}\right)_{t=0} = 0$$

et que, par conséquent,

$$\lim (T_7^3)_{t=0} = 0.$$

croît, quand s croît. A cet effet, il suffit de remarquer que

$$5\frac{h}{a^2} = 1 + 2\frac{b^2}{a^2} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} + 4\frac{b^4}{a^4}},$$

$$5\frac{h-b^2}{a^2} = 1 - 3\frac{b^2}{a^2} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} + 4\frac{b^4}{a^4}},$$

car

$$1 + 2x + \sqrt{1 - x + 4x^2}$$

est une fonction croissante de x, et

$$1 - 3x + \sqrt{1 - x + 4x^2}$$

une fonction décroissante.

Il en résulte que $\dfrac{h-b^2}{a^2}\,\dfrac{R^2+h}{R^2+b^2}$ croît, quand s croît, car

$$\frac{R^2+h}{R^2+b^2} = 1 + \frac{h-b^2}{a^2}\,\frac{a^2}{R^2+b^2}.$$

Nous allons maintenant démontrer que $\dfrac{X}{Y}$ est une fonction décroissante de s.

En posant

$$\frac{X}{Y} = K \qquad \text{et} \qquad \frac{R^2+h}{a^2} = \alpha,$$

nous trouvons

$$Y^2\frac{dK}{d\alpha} = Y^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty U^2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U'}{U}\right)(u'-u)\,du\,du',$$

où U' est ce que devient U, après qu'on y a remplacé u par u'. Or, on a

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u}\left(\frac{u+\dfrac{R^2}{a^2}}{u'+\dfrac{R^2}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u+\dfrac{R^2+a^2}{a^2}}{u'+\dfrac{R^2+a^2}{a^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{u+\dfrac{R^2+b^2}{a^2}}{u'+\dfrac{R^2+b^2}{a^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{u+\alpha}{u'+\alpha}\right)^2.$$

Donc, en vertu de ce que l'on a démontré plus haut, on peut conclure que, pour $u' > u$, $\dfrac{U'}{U}$ est une fonction croissante de α, et, par conséquent, que

$$(u'-u)\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U'}{U}\right)$$

ne peut être négatif.

Nous voyons ainsi que K est une fonction croissante de α, d'où résulte ce que nous avions en vue de démontrer.

Ce que nous venons de montrer conduit à la conclusion que le second membre de l'égalité (24) est une fonction décroissante de s. Mais nous avons vu que, pour s suffisamment voisin de son minimum, il est positif; et, d'autre part, comme

$$\frac{h-b^2}{a^2}\,\frac{R^2+h}{R^2+b^2}$$

croît indéfiniment, quand s tend vers 1, on voit que, pour s suffisamment voisin de 1, il sera négatif. Par conséquent, T_7^3 étant une fonction continue de s, nous reconnaissons l'exactitude de ce qui a été dit relativement à l'équation (23).

Nous savons, d'après le théorème V, que T_{2m+1}^m (en excluant, bien entendu, le cas limite $s=1$) est une fonction croissante de m. Par conséquent, tant que $T_7^3>0$, tous les T_{2m+1}^m, qui correspondent à des valeurs de m dépassant 3, conserveront des valeurs positives, et, en vertu de tout ce qui précède, $\delta^2\Pi_1$ ne pourra prendre de valeurs négatives; d'ailleurs, si tous les ε_i^m, autres que ε_4^2, ne sont pas nuls simultanément, cette seconde variation ne pourra s'annuler (en excluant le cas limite $s=t$). Il résulte de là que la résolution de l'équation (23) doit donner une limite supérieure de s, ou une limite inférieure de t, pour tous les ellipsoïdes de Jacobi que nous avons le droit de regarder comme stables. Nous devons donc en venir maintenant à la résolution de cette équation (¹).

31. En entendant par T_7^3 l'expression (21), et en nous servant de l'égalité identique (²)

$$2h(a^2-h)(b^2-h)\int_R^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+h)^2 D}$$

$$=(2b^2-3h)\int_R^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)D}+b^2\int_R^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+b^2)D}+\frac{h-b^2}{R^2+h}\,\frac{R}{\sqrt{(R^2+a^2)(R^2+b^2)}},$$

(¹) Les calculs qui constituent l'objet du numéro suivant ont été refaits, dans ces derniers temps, par M. Darwin. *Voir* son Mémoire : *On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid* (*Phil. Trans.*, A, vol. CXCVIII, 1902). Sans doute, M. Darwin n'avait pas connaissance du présent travail, car il ne le cite pas. D'ailleurs, aux pages 321, 327 et 331 de son Mémoire, le savant anglais dit qu'il lui semble probable que l'équation dont il s'occupe n'a qu'une seule solution, mais qu'il ne l'a pas pu prouver; et cependant cette proposition se trouve établie dans ce travail, car l'équation dont parle M. Darwin n'est autre chose que l'équation (23). L.

(²) Par égalité identique, nous entendons ici, et partout dans la suite, toute égalité, entre des quantités dépendant de s et de t, qui ne suppose aucune dépendance entre ces dernières.

nous obtenons l'égalité identique suivante :

$$\frac{a^2-b^2}{R^2+a^2}T_7^3=(R^2+b^2)\left\{\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2+b^2)D}-\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)D}\right\}$$
$$-\frac{(a^2-b^2)(R^2+h)^2}{2h(a^2-h)(b^2-h)}\left\{(2b^2-3h)\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)D}\right.$$
$$\left.+b^2\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2+b^2)D}+\frac{h-b^2}{R^2+h}\,\frac{R}{\sqrt{(R^2+a^2)(R^2+b^2)}}\right\}.$$

Si nous posons maintenant

$$\frac{h}{a^2}=y,\qquad \frac{a^2-b^2}{a^2}=k^2,\qquad \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}=\sin\varphi,$$

en supposant φ compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et si nous introduisons les notations de Legendre pour les intégrales elliptiques de première et seconde espèces, avec module k et amplitude φ, cette égalité prendra la forme suivante

$$\frac{(s-t)^2}{st}\frac{a}{2}T_7^3=\frac{2-k^2}{2(1-k^2)}E(k,\varphi)-F(k,\varphi)-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{\sqrt{s(1-t)}}{2}$$
$$-\frac{k^2(3y-1+k^2)st(1+x)^2}{4y(1-y)(y-1+k^2)(1-t)}\left[F(k,\varphi)-\frac{3y-1+2k^2}{3y-1+k^2}E(k,\varphi)+\frac{k^2\sqrt{1-t}}{(3y-1+k^2)(1+x)\sqrt{s}}\right],$$

où k et φ sont liés à s et t par les équations

$$k^2=\frac{s-t}{s(1-t)},\qquad t=\cos^2\varphi,$$

où y est la plus grande racine de l'équation

$$5y^2-2(3-2k^2)y+1-k^2=0,$$

et où

(25) $$x=y\,\text{tang}^2\varphi=y\frac{1-t}{t}.$$

On obtient de plus facilement l'égalité identique suivante :

$$\frac{(s-t)^2\sqrt{1-t}}{4t\sqrt{s}}\int_0^\infty\frac{(1-s-t-stu)u\,du}{\Delta^3}$$
$$=\frac{(s-t)^2+s+t-2st}{2t(1-s)}E(k,\varphi)-F(k,\varphi)-\frac{(s-t)(2s-t)\sqrt{1-t}}{2t(1-s)\sqrt{s}}.$$

Nous remarquons maintenant que l'intégrale, qui figure dans le premier

membre de cette égalité, représente le premier membre de l'équation (5). Si donc nous posons

$$\begin{aligned} A = {} & \frac{2-k^{2}}{2(1-k^{2})}E(k,\varphi) - F(k,\varphi) - \frac{k^{2}}{1-k^{2}}\frac{\sqrt{s(1-t)}}{2} \\ & - \frac{k^{2}(3y-1+k^{2})st(1+x)^{2}}{4y(1-y)(y-1+k^{2})(1-t)}\left[F(k,\varphi) - \frac{3y-1+2k^{2}}{3y-1+k^{2}}E(k,\varphi) + \frac{k^{2}\sqrt{1-t}}{(3y-1+k^{2})\sqrt{s}(1+x)}\right], \end{aligned}$$

$$B = \frac{(s-t)^{2}+s+t-2st}{2t(1-s)}E(k,\varphi) - F(k,\varphi) - \frac{(s-t)(2s-t)\sqrt{1-t}}{2t(1-s)\sqrt{s}},$$

notre problème consistera dans la résolution des deux équations

$$A = 0, \tag{26}$$

$$B = 0 \tag{27}$$

avec deux inconnues s et t. La question se réduira donc à la recherche et au rapprochement successif des limites entre lesquelles sont comprises les racines de ces équations, et ce procédé reposera sur les considérations suivantes.

La fonction A conserve toujours le même signe que l'expression (24), et B le même signe que la fonction représentant le premier membre de l'équation (5). Quant à l'expression (24), on a démontré dans le numéro précédent que, si s et t sont liés entre eux par l'équation (5), c'est une fonction décroissante de s et, par conséquent, une fonction croissante de t. Or, cette démonstration était basée seulement sur ce que $\frac{R^{2}}{a^{2}}$ est une fonction croissante de t, et $\frac{b^{2}}{a^{2}}$ une fonction décroissante de s et une fonction croissante de t [1]. Nous pourrions donc démontrer, par le même procédé, que, si l'on considère s et t comme des variables indépendantes, l'expression (24) est une fonction décroissante de s et une fonction croissante de t. D'autre part, Liouville a démontré que la fonction représentant le premier membre de l'équation (5) décroît quand s et t croissent, et que, si l'on désigne par τ le nombre (0,3...), qui satisfait à cette équation dans l'hypothèse $s = t$, pour toute valeur de t ne dépassant pas τ, on peut trouver une valeur de s telle que cette équation se trouve satisfaite, ainsi que, pour toute valeur de s dépassant τ, on peut trouver une valeur de t telle qu'il en soit de même [2].

De ce qu'on vient de dire au sujet de A il résulte que, si la fonction A prend le signe +, pour des valeurs quelconques de s et t, elle le conservera, t étant invariable, pour toute valeur inférieure de s, et, s étant invariable, pour toute

---

[1] Nous conviendrons une fois pour toutes d'entendre par s et t des fractions positives, en supposant $s \geqq t$.

[2] *Mémoire sur les figures ellipsoïdales*, etc. (*J. de Liouville*, 1851, t. XVI).

valeur supérieure de t. Si, au contraire, la fonction A a le signe —, pour des valeurs données de s et t, elle le conservera, t étant fixé, pour toute valeur supérieure de s, et, s étant fixé, pour toute valeur inférieure de t.

Soient s_0 et t_0 les valeurs de s et t satisfaisant simultanément aux équations (26) et (27), et soient s_1 et t_1 des valeurs quelconques de s et t satisfaisant à la condition $s_1 > \tau$ et $t_1 < \tau$. Supposons que la substitution de ces valeurs, à la place de s et t, dans les fonctions A et B, donne pour les deux des résultats positifs. Dans ce cas, la fraction positive t'_1 qui, pour $s = s_1$, satisfait à l'équation (27), dépasse t_1 et, par conséquent, si la substitution de s_1 et t_1 dans la fonction A donne un résultat positif, la substitution de s_1 et t'_1 donnera encore un résultat positif, et nous en concluons, en vertu de ce que l'on a démontré au numéro précédent, que $s_1 < s_0$ et $t'_1 > t_0$. En raisonnant d'une manière semblable, dans chacun des trois autres cas qui peuvent se présenter pour la substitution considérée, nous formerons le Tableau suivant :

Signe de A.	Signe de B.	Limites des racines.
+	+	$s_0 > s_1$
—	—	$s_0 < s_1$
—	+	$t_0 > t_1$
+	—	$t_0 < t_1$

A l'aide de ce Tableau nous pouvons, par une série de substitutions successives, rapprocher autant que nous voulons les limites entre lesquelles sont comprises s_0 et t_0. Mais chaque substitution ne donne qu'une seule limite, et cela seulement pour une des inconnues; d'ailleurs nous ne pouvons dire par avance pour quelle inconnue on obtiendra une des limites par substitution des quantités données s_1 et t_1. Si donc on peut regarder, au point de vue théorique, ce procédé comme satisfaisant, on doit cependant avouer qu'il présente en pratique certains inconvénients.

Quant aux valeurs substituées de s et t, elles doivent satisfaire à certaines conditions. Les formules (3) et (25) donnent $x = \frac{h}{R^2}$. La condition (22) prend donc la forme :

$$\frac{2-s}{s} \geqq x,$$

et nous savons que, tant que cette condition est satisfaite, on a certainement $A > 0$. Il résulte de là que les valeurs de s et t, suffisamment voisines de s_0 et t_0, satisfont à l'inégalité

$$x > \frac{2-s}{s}, \tag{28}$$

ou, en tenant compte de ce que x est la plus grande racine de l'équation

$$(29) \qquad 5stx^2 - 2(s + 2t - 3st)x + (1 - s)(1 - t) = 0,$$

à l'inégalité

$$t < \frac{s(3 - s)}{12 - 5s}.$$

En outre, on doit avoir en vue, qu'en général, les valeurs de s et t annulant B satisfont à l'inégalité

$$s + t < 1.$$

En employant le procédé qui vient d'être indiqué, et en nous servant de la Table des valeurs des intégrales elliptiques donnée par Legendre, nous avons obtenu ces inégalités :

$$0,637 < s_0 < 0,638,$$

$$0,119 < t_0 < 0,120.$$

Si nous désignons par ε_s et ε_t la plus petite et la plus grande des excentricités des ellipses obtenues dans les sections de l'ellipsoïde par des plans passant par le plus petit axe, nous en déduirons

$$0,6016 < \varepsilon_s < 0,6025,$$

$$0,9380 < \varepsilon_t < 0,9387.$$

Maintenant, nous devons en venir au calcul de la vitesse angulaire.

En entendant par v son expression (4), nous trouvons l'égalité identique suivante :

$$(30) \quad v = \frac{2t(2 - s - t)}{(s - t)^2}\sqrt{\frac{s}{1 - t}}\left\{\frac{(1 + s)(1 + t)(s + t) - 8st}{t(1 - s)(2 - s - t)}E(k, \varphi) - F(k, \varphi) - \frac{(2s - t - st)(s - t)}{t(1 - s)(2 - s - t)}\sqrt{\frac{1 - t}{s}}\right\}.$$

Comme l'expression (4) représente une fonction décroissante de s et t, en substituant dans la formule (30) des limites inférieures ou supérieures de s_0 et t_0, nous obtiendrons respectivement une limite supérieure ou inférieure de v.

On obtient une formule plus commode pour les calculs, en faisant disparaître de l'égalité (30) les intégrales elliptiques à l'aide des équations (26) et (27). Nous trouvons ainsi :

$$(31) \qquad v = \frac{4x}{4x + (1 + x)(1 + 3x)(1 + s + t)};$$

mais, pour le calcul avec cette formule, on doit opérer autrement que pour le calcul avec la formule (30) : si nous voulons obtenir une limite supérieure de v, nous devons y substituer une limite inférieure de s_0 et une limite supérieure de t_0, et, pour obtenir une limite inférieure de v, nous devons substituer une limite supérieure de s_0 et une limite inférieure de t_0, car nous allons démontrer tout à l'heure que, pour s et t suffisamment voisins de s_0 et t_0, le second membre de l'égalité (31) est une fonction décroissante de s et une fonction croissante de t.

Considérons, dans ce but, la fonction

$$z = \frac{(1+x)(1+3x)}{x}(1+s+t).$$

Nous démontrerons qu'au moins tant que s et t satisfont à la condition (28), z est une fonction décroissante de t, et si, en outre, s demeure supérieur à 0,6, elle est une fonction croissante de s.

En différentiant l'équation (29) et en éliminant ensuite t, on trouve

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{3x^2}{2[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{[(5x^2+6x+1)s-4x-1]^2}{2[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]},$$

et l'on peut remarquer que le dénominateur commun de ces expressions conserve des valeurs positives non seulement pour les valeurs considérées de x et s, mais en général pour toutes les valeurs réelles de x et s.

A l'aide de ces expressions on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{(1+x)(1+3x)}{x} - \frac{1+s+t}{2}\,\frac{3(3x^2-1)}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{(1+x)(1+3x)}{x} - \frac{1+s+t}{2}\,\frac{3x^2-1}{x^2}\,\frac{[(5x^2+6x+1)s-4x-1]^2}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2},$$

où les seconds termes sont négatifs, car l'inégalité (28) montre que $x > 1$.

Remarquons maintenant que, sous les conditions considérées,

$$\frac{(1+x)(1+3x)}{x} < 8x, \qquad \frac{1+s+t}{2} > \frac{1}{2}, \qquad \frac{3x^2-1}{x^2} > 2,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial z}{\partial t} < 8x - \frac{[(5x^2+6x+1)s-4x-1]^2}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2},$$

ou bien

$$\frac{\partial z}{\partial t} < -\frac{(25x^4+20x^3+6x^2-4x+1)s^2-2(20x^3+9x^2-6x+1)s+(4x-1)^2}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2}.$$

Or, en vertu de l'inégalité (28), on a

$$(25x^4+20x^3+6x^2-4x+1)s-2(20x^3+9x^2-6x+1) > \frac{2x(x-1)^2(5x+1)}{x+1}.$$

Donc il vient

$$\frac{\partial z}{\partial t} < -\frac{2x(x-1)^2(5x+1)s+(x+1)(4x-1)^2}{(x+1)[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]},$$

et l'on voit ainsi que, sous les conditions considérées, z est une fonction décroissante de t.

D'autre part, l'expression obtenue plus haut pour $\frac{\partial z}{\partial s}$ peut être présentée de la manière suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{(1+x)(1+3x)[(5x^2+5x+2)s-5x-4]s-9x^3+6x^2+11x+2}{x[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]}$$
$$+\frac{1-s-t}{2}\,\frac{3(3x^2-1)}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2},$$

et comme, d'après l'inégalité (28)

$$(1+x)[(5x^2+5x+2)s-5x-4] > 5x^2+x,$$

nous en concluons l'inégalité suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial s} > \frac{3(5s-3)x^3+2(4s+3)x^2+(s+11)x+2}{x[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]},$$

laquelle montre que, pour $s > \frac{3}{5}$, z est une fonction croissante de s.

En prenant pour limites de s_0 les nombres 0,637 et 0,638, et pour limites de t_0 les nombres 0,119 et 0,120, nous trouvons, d'après la formule (30),

$$0{,}1403 < v < 0{,}1423$$

et, d'après la formule (31),

$$0{,}1419 < v < 0{,}1427.$$

On voit par là que, dans le cas considéré, la formule (31) a donné des limites plus étroites que celle (30). Mais cette dernière a donné une limite supérieure plus petite, et la première une limite inférieure plus grande. Si donc on veut

obtenir pour v des limites plus resserrées, on doit se servir des deux formules à la fois. Nous trouvons ainsi

$$0,1419 < v < 0,1423.$$

32. Les recherches précédentes conduisent au résultat suivant :

Les ellipsoïdes de Jacobi auxquels correspondent des vitesses angulaires supérieures à une certaine limite, savoir $\sqrt{2\pi f\rho}\sqrt{0,14\ldots}$, *sont stables.*

Nous savons que, pour les ellipsoïdes de Jacobi, la vitesse angulaire ne dépasse pas $\sqrt{2\pi f\rho}\sqrt{0,187\ldots}$, et nous avons vu que la même quantité représente la limite supérieure de la vitesse angulaire, pour les ellipsoïdes de révolution stables. Donc, tant que la vitesse angulaire se trouve entre les limites $\sqrt{2\pi f\rho}\sqrt{0,14\ldots}$ et $\sqrt{2\pi f\rho}\sqrt{0,187\ldots}$, il y aura deux figures d'équilibre stables : un ellipsoïde de révolution et un ellipsoïde à trois axes inégaux.

On voit que la stabilité des ellipsoïdes à trois axes n'est établie que dans des limites assez étroites de la vitesse angulaire.

Nous devons maintenant en venir à la résolution de cette question : peut-on, en excluant les déplacements, correspondant à des valeurs de m, qui ne dépassent pas une certaine limite, arriver à ce que la variation seconde de Π_1 reste positive, pour tous les ellipsoïdes à trois axes; nous allons démontrer que la réponse est négative, comme pour les ellipsoïdes de révolution.

La formule (10) donne

$$T_{2m+1}^{m} = (K-1)\int_{K}^{\infty}\left[\frac{E_{2m+1}^{m}(R)}{E_{2m+1}^{m}(\lambda)}\right]^2 \frac{d\lambda}{D},$$

où K peut être présenté de la manière suivante :

$$K = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{a^2}+u^2\right)\left(1+\frac{b^2}{R^2}u^2\right)}}}{\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{E_{2m+1}^{m}(R)}{E_{2m+1}^{m}\left(\frac{R}{u}\right)}\right]^2 \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{a^2}+u^2\right)\left(1+\frac{b^2}{R^2}u^2\right)}}}.$$

D'ailleurs, selon que m est pair ou impair, on a

$$\frac{E_{2m+1}^{m}(R)}{E_{2m+1}^{m}\left(\frac{R}{u}\right)} = \frac{u^m\left[\left(\frac{R}{a}\right)^m + \frac{c_1}{a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^{m-2} + \ldots + \frac{c_\sigma}{a^m}\right]}{\left(\frac{R}{a}\right)^m + \frac{c_1}{a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^{m-2}u^2 + \ldots + \frac{c_\sigma}{a^m}u^m}$$

ou

$$\frac{E_{2m+1}^m(R)}{E_{2m+1}^m\left(\frac{R}{u}\right)} = u^m \left(\frac{\frac{R^2}{a^2}+1}{\frac{R^2}{a^2}+u^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{R}{a}\right)^{m-1} + \frac{c_1}{a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^{m-3} + \ldots + \frac{c_\sigma}{a^{m-1}}}{\left(\frac{R}{a}\right)^{m-1} + \frac{c_1}{a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^{m-3} u^2 + \ldots + \frac{c_\sigma}{a^{m-1}} u^{m-1}}.$$

Nous savons que lorsque t tend vers zéro, et par conséquent s vers 1, $\frac{R}{a}$ et $\frac{b}{R}$ tendent vers o. On voit d'ailleurs par les formules (9) et (11) du Chapitre précédent que les rapports $\frac{c_i}{a^{2i}}$ tendent alors vers des limites déterminées qui ne sont nulles pour aucune valeur de i dans la suite 1, 2, ..., σ (car τ a pour limite o dans le cas considéré). On voit donc que pour toute valeur donnée non nulle de u

$$\lim \left[\frac{E_{2m+1}^m(R)}{E_{2m+1}^m\left(\frac{R}{u}\right)}\right]_{t=0} = 1,$$

et, d'après cela, il est aisé de prouver que le dénominateur de l'expression K croît indéfiniment quand t tend vers o. Quant au numérateur, il tend évidemment vers $\frac{1}{2}$. Nous trouvons donc

$$\lim K_{t=0} = 0,$$

d'où il résulte que, pour t suffisamment voisin de o, la fonction T_{2m+1}^m demeure négative.

De ce que l'on vient de démontrer, et des propriétés connues de l'expression T_{2m+1}^m, on déduit que, si l'on considère T_{2m+1}^m, en vertu de l'équation (5), comme une fonction de s, l'équation

$$T_{2m+1}^m = 0,$$

dans le cas de $m > 3$, aura au moins une racine comprise entre 0,637..., c'est-à-dire la racine de l'équation

$$T_7^3 = 0,$$

et 1, non égale à ces limites, et, s'il y a un plus grand nombre de racines, la plus petite d'entre elles sera une fonction croissante de m.

33. Nous remarquerons, en terminant, que c'est seulement pour conserver une plus grande symétrie dans les formules que nous avons introduit, dans notre calcul, les fonctions de Lamé à argument imaginaire; mais on pourrait conduire tout le calcul de manière à n'avoir affaire partout qu'à des fonctions de Lamé à argument réel. Pour cela, nous aurions dû prendre l'équation de l'ellipsoïde sous

la forme

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2-b^2}+\frac{z^2}{R^2-a^2}=1,$$

en supposant $R>a>b$, et exprimer les coordonnées rectangulaires d'un point de sa surface de la manière suivante

$$x=R\cos\theta=R\frac{\mu\nu}{ba},$$

$$y=\sqrt{R^2-b^2}\sin\theta\cos\psi=\sqrt{R^2-b^2}\frac{\sqrt{b^2-\mu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-b^2}},$$

$$z=\sqrt{R^2-a^2}\sin\theta\sin\psi=\sqrt{R^2-a^2}\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{a^2-\nu^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}},$$

où θ et ψ sont respectivement compris entre les limites 0 et π, 0 et 2π, μ entre les limites $-b$ et $+b$, et ν entre les limites a et b. En posant ensuite

$$\varkappa=\sqrt{(R^2-\mu^2)(R^2-\nu^2)},$$

nous aurions exprimé l'élément de surface de notre ellipsoïde de cette manière :

$$ds=\varkappa(\nu^2-\mu^2)\,d\beta\,d\gamma=\varkappa\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

où β et γ ont les significations antérieures (n° 20), et nous aurions trouvé

$$\frac{\partial U}{\partial n}=4\pi f\rho(R^2-a^2)\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2-a^2)D}\varkappa,$$

où

$$D=\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-b^2)}.$$

Par conséquent, si nous avions développé $\varkappa\,\delta n$ en série de produits de fonctions de Lamé

$$\varkappa\,\delta n=\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{i=1}^{i=2m+1}\varepsilon_i^m E_i^m(\mu)E_i^m(\nu),$$

nous aurions trouvé, par le même procédé qu'au n° 27,

$$\delta^2\Pi_1=4\pi f\rho\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{i=1}^{i=2m+1}T_i^m\int(H_i^m)^2\,d\sigma+\Omega,$$

où

$$T_i^m=(R^2-a^2)\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2-a^2)D}-\frac{E_i^m(R)F_i^m(R)}{2m+1},$$

ou bien

$$T_i^m = \frac{E_3^1(R)F_3^1(R)}{3} - \frac{E_i^m(R)F_i^m(R)}{2m+1},$$

et où H_i^m a la signification antérieure. La discussion du signe de $\delta^2\Pi_1$ serait basée ensuite sur les théorèmes du n° 25.

CHAPITRE VI.

LA STABILITÉ DE L'ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION DE JACOBI.

34. Dans l'étude précédente nous n'avons considéré que les variations secondes de Π_1. Par suite, nous n'avons pu résoudre les questions de stabilité des ellipsoïdes qui servent de *limites* aux ellipsoïdes stables. Ainsi, nous avons trouvé, par exemple, que les ellipsoïdes de révolution, dans l'hypothèse générale relative aux déplacements, sont stables, tant que leurs excentricités sont *inférieures* à l'excentricité de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi (0,8126....). Quant à ce dernier, nous n'avons pu rien dire sur sa stabilité. Puis, nous avons trouvé que les ellipsoïdes de révolution sont stables, sous la condition que la surface du liquide reste toujours une surface de révolution, si leurs excentricités sont *inférieures* à la racine d'une certaine équation transcendante (0,985225...); mais nous n'avons pu résoudre la question de la stabilité de l'ellipsoïde dont l'excentricité est égale à cette racine; etc.

La résolution de toutes ces questions dépend de l'étude des termes de l'accroissement de Π, qui ont été laissés de côté au n° 6, dans la recherche de la variation seconde de Π, comme étant des infiniment petits par rapport à cette dernière, et présente d'assez grandes difficultés. A vrai dire, pour résoudre les questions considérées, il n'est pas besoin d'avoir des expressions générales de ces termes; il suffit d'étudier seulement les expressions que l'on obtient dans l'hypothèse où les variations δn satisfont à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial n}\delta n - f\rho\int\frac{\delta n'\,ds'}{r} = 0,$$

qui détermine des figures du liquide, infiniment voisines de la figure d'équilibre considérée, pour lesquelles, *à une première approximation, la condition d'équilibre est satisfaite* [n° 8, form. (35)]. Le problème est par là considérablement simplifié; mais il demeure encore très difficile. Toutefois, dans un cas

particulier, savoir pour l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, on peut se servir, pour le résoudre, d'un procédé particulier, qui ne présente aucune difficulté théorique et demande seulement des calculs assez compliqués. C'est ce cas que nous avons l'intention de traiter maintenant.

Nous avons vu (n° 14 et n° 16) que, pour l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, la variation seconde de Π_1 reste en général positive, et ne s'annule que quand la surface du liquide se change (à une première approximation) en une surface d'ellipsoïde à trois axes, ayant même axe minimum. Or, si nous prenons l'écart, entre cette surface et la surface de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, pour quantité infiniment petite du premier ordre, dans la série des figures ellipsoïdales d'équilibre à trois axes inégaux, on pourra toujours en trouver une dont l'écart, à partir de la surface de l'ellipsoïde à trois axes mentionné à l'instant, soit une quantité infiniment petite d'ordre supérieur. Il suffit donc, pour résoudre notre problème, de rechercher le signe de l'accroissement de Π_1, dans l'hypothèse où la surface du liquide se change en une surface infiniment voisine dont l'écart à partir de la surface d'un ellipsoïde à trois axes, *représentant une figure d'équilibre,* soit une quantité infiniment petite d'ordre supérieur. Quant à cet accroissement, il peut être considéré comme la somme : 1° de l'accroissement de Π_1 dans le passage de l'ellipsoïde de révolution à l'ellipsoïde à trois axes; 2° de l'accroissement de Π_1 dans le passage de ce dernier à la surface considérée.

Le problème de la recherche de l'accroissement de Π_1 se partage donc en deux, dont l'un consiste dans la recherche de l'accroissement d'une certaine fonction, et l'autre peut être résolu en s'appuyant sur ce qui a été montré au n° 27.

35. Si nous posons, avec les notations du n° 26,

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{a^2}{R^2} = x, \qquad \frac{1}{s} = 1 + \frac{b^2}{R^2} = y,$$

nous aurons, pour un ellipsoïde quelconque de Jacobi,

$$S = \frac{Q}{5}\left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{x+y}{(xy)^{\frac{1}{3}}}, \qquad \int V\,d\tau = \frac{3}{5} f \rho Q^2 \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}}\,(xy)^{\frac{1}{6}} H,$$

où

$$H = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(1+u)(x+u)(y+u)}}. \tag{1}$$

En portant ces valeurs de S et de $\int V\,d\tau$ dans la formule

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{J^2}{S} - \int V\,d\tau\right)$$

du n° 8, et en y remplaçant ensuite J par sa valeur J_0 correspondant à l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, nous désignerons le résultat par (Π_1). Nous aurons donc

$$(2)\qquad (\Pi_1) = \frac{3}{10} f\rho Q^2 \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}} \left(K \frac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x+y} - (xy)^{\frac{1}{6}} H \right),$$

où

$$(3)\qquad K = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}} \frac{25 J_0^2}{3 f\rho Q^4}.$$

On trouve en outre facilement, d'après les formules (4) et (5) du Chapitre précédent, qu'en général, pour un ellipsoïde quelconque de Jacobi,

$$J^2 = 2\pi f\rho S^2 st \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^{\frac{1}{2}}(1+su)^{\frac{3}{2}}(1+tu)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui se ramène à

$$(4)\qquad J^2 = -\frac{3Q^3}{50} f\rho \sqrt[3]{\frac{3Q}{4\pi}} (xy)^{-\frac{1}{6}} (x+y)^2 \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + 2(x+y) \frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y} \right].$$

Quant aux variables x et y, qui entrent dans ces formules, elles sont liées par l'équation

$$(5)\qquad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - 2xy \frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y} + (xy)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

que l'on déduit facilement de l'équation (5) du Chapitre précédent. En y faisant $y = x$, nous obtiendrons une équation qui détermine la valeur de x pour l'ellipsoïde de révolution de Jacobi. Nous désignerons par ξ cette valeur de x. Sachant que l'excentricité de cet ellipsoïde est comprise entre les limites 0,8126 et 0,8127, on trouve facilement que

$$(6)\qquad 2,94 < \xi < 2,95.$$

Dans la suite nous allons considérer y comme une fonction de x, définie par l'équation (5), et il est important de remarquer que pour $x = \xi$ on a $y' = -1$.

Si l'on fait $x = \xi$ dans la formule (4), cette formule donnera J_0, dont une des expressions, sous forme de fonction algébrique de ξ, sera obtenue au numéro suivant.

Désignons par α l'accroissement infiniment petit qu'on doit donner à x, à partir de $x = \xi$, pour obtenir l'ellipsoïde de Jacobi [1], par lequel, conformément à ce qui précède, on doit passer de l'ellipsoïde de révolution à la figure du

[1] Nous désignerons cet ellipsoïde, pour abréger, par ellipsoïde (α).

liquide considérée, et par $\Pi_1^{(\alpha)}$, l'expression Π_1 dans laquelle J a la valeur correspondant à cet ellipsoïde de Jacobi. Puis, convenons d'entendre par $\Delta_1 F$ et $\Delta_2 F$ les accroissements d'une expression quelconque F, dépendant de la figure du liquide, respectivement pour le premier et le second des deux passages dont il a été parlé à la fin du numéro précédent. Avec ces notations, l'accroissement de Π_1, dont nous devons rechercher le signe, se présentera sous la forme :

$$\Delta\Pi_1 = \Delta_1(\Pi_1) + \frac{1}{2}\frac{\Delta_1 J^2 \Delta_2 S}{S(S+\Delta_2 S)} + \Delta_2 \Pi_1^{(\alpha)},$$

où S est le moment d'inertie de l'ellipsoïde (α).

Ici $\Delta_1(\Pi_1)$ et $\Delta_1 J^2$ sont les accroissements des fonctions (2) et (4) de x, lors du passage de $x = \xi$ à $x = \xi + \alpha$. Comme J^2 est une fonction symétrique de x et y, la dérivée $\frac{dJ^2}{dx}$, d'après ce qu'on a remarqué au sujet de y, s'annulera pour $x = \xi$. Or, nous verrons dans la suite qu'on aura alors $\frac{d^3(\Pi_1)}{dx^3} = 0$, et que $\frac{d^2 J^2}{dx^2}$ et $\frac{d^4(\Pi_1)}{dx^4}$ ne s'annuleront pas. Par suite, $\Delta_1(\Pi_1)$ et $\Delta_1 J^2$ différeront, par des quantités infiniment petites d'ordre supérieur, respectivement des valeurs de

$$\frac{1}{24}\frac{d^4(\Pi_1)}{dx^4}\alpha^4 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\frac{d^2 J^2}{dx^2}\alpha^2$$

pour $x = \xi$.

En ce qui concerne les expressions $\Delta_2 S$ et $\Delta_2 \Pi_1^{(\alpha)}$, nous supposerons, pour les évaluer, comme au n° **27**, que le segment de la normale à la surface de l'ellipsoïde (α), découpé par la surface considérée du liquide, diffère, par une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, de l'expression

$$(7) \qquad \frac{1}{\varkappa}\sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{i=1}^{i=2n+1} H_i^n = \frac{1}{\varkappa}\sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{i=1}^{i=2n+1} \varepsilon_i^n E_i^n(\mu) E_i^n(\nu),$$

dans laquelle tous les termes seront supposés infiniment petits par rapport à α. On doit appeler ici l'attention sur ce fait que, pour $\alpha = 0$, les variables μ et ν perdent la signification de coordonnées d'un point de la surface de l'ellipsoïde. Nous considérerons donc l'expression (7) comme une fonction de θ et ψ d'après les formules (16) du Chapitre IV. La plus grande de toutes les valeurs numériques de cette fonction sera désignée par ζ. Ce sera une quantité infiniment petite par rapport à α, dont nous laisserons l'ordre indéterminé.

Nous remarquons ensuite que, pour α infiniment petit, tous les produits $E_i^n(\mu) E_i^n(\nu)$, à l'exception de ceux qui correspondent à $i = 1$, deviennent également des quantités infiniment petites, pour toutes les valeurs de θ et ψ. Ainsi, $E_3^2(\mu) E_3^2(\nu)$ est *en général* (c'est-à-dire pour θ et ψ arbitraires) une quantité

infiniment petite de même ordre que α, tandis que $E_1^2(\mu)\,E_1^2(\nu)$ n'est pas *en général* une quantité infiniment petite.

Nous supposerons que tous les termes de l'expression (7) (dans laquelle il peut ne pas se trouver de termes correspondant à certaines combinaisons de n et i) sont *en général* des infiniment petits de même ordre que ζ. Donc, d'après ce que l'on vient de remarquer, ε_3^2 sera une quantité infiniment petite de même ordre que $\dfrac{\zeta}{\alpha}$, et ε_1^2 de même ordre que ζ. Il résulte de là que, dans l'expression (15) du Chapitre précédent, le terme $g_3 G_3 \varepsilon_3^2$ sera une quantité infiniment petite par rapport au terme $g_1 G_1 \varepsilon_1^2$, car G_3, défini par la formule (14) du même Chapitre, est une quantité infiniment petite de même ordre que α^2, et g_1, G_1, g_3, pour $\alpha = 0$, tendent vers des limites finies différentes de zéro.

Nous arrivons donc à cette conclusion que $\Delta_2 S$ diffère, par une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, de $g_1 G_1 \varepsilon_1^2$. Nous désignerons, pour abréger, cette dernière quantité par β.

Enfin, on s'assure facilement que T_3^2 est une quantité infiniment petite de même ordre que α^2, et que tous les autres T_i^n, à l'exception de T_4^2 qui est toujours nul, ne sont pas des quantités infiniment petites. Nous en concluons que $\Delta_2 \Pi_1^{(\alpha)}$ diffère, par une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, de l'expression

$$\left(2\pi f\rho\frac{T_1^2}{g_1^2 G_1} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{S}\right)\beta^2 + 2\pi f\rho\left[T_2^2\int (H_2^2)^2 d\sigma + T_3^2\int (H_3^2)^2 d\sigma\right] + 2\pi f\rho \sum_{n=3}^{n=\infty}\sum_{i=1}^{i=2n+1} T_i^n \int (H_i^n)^2 d\sigma,$$

dont tous les termes sont de même ordre que ζ^2.

Tout ce qui précède fait voir que la question aboutit à la recherche du signe de l'expression

$$(8)\quad \Delta\Pi_1 = \frac{1}{24}\frac{d^4(\Pi_1)}{dx^4}\alpha^4 + \frac{1}{4}\frac{d^2 J^2}{dx^2}\frac{1}{S^2}\alpha^2\beta + \left(2\pi f\rho\frac{T_1^2}{g_1^2 G_1} + \frac{1}{2}\frac{J^2}{S^3}\right)\beta^2 + 2\pi f\rho\left[T_2^2\int (H_2^2)^2 d\sigma + T_3^2\int (H_3^2)^2 d\sigma + \sum_{n=3}^{n=\infty}\sum_{i=1}^{i=2n+1} T_i^n\int (H_i^n)^2 d\sigma\right] + \tau,$$

dans laquelle τ est une quantité infiniment petite par rapport à celui des deux infiniment petits α^4 et ζ^2 dont l'ordre est le plus bas.

On voit d'ailleurs que, dans les trois premiers termes, on peut poser $x = \xi$.

La formule (8) montre que, si α^2 n'est pas une quantité infiniment petite par rapport à ζ, la question se réduit à la recherche du signe de la forme quadratique en α^2 et β,

$$A\alpha^4 + B\alpha^2\beta + C\beta^2,$$

où

$$(9)\quad A = \frac{1}{24}\left[\frac{d^4(H_1)}{dx^4}\right]_{x=\xi}, \qquad B = \frac{1}{4}\left(\frac{d^2 J^2}{dx^2}\frac{1}{S^2}\right)_{x=\xi}, \qquad C = \left(2\pi f \rho \frac{T_1^2}{g_1^2 G_1} + \frac{1}{2}\frac{J^2}{S^2}\right)_{x=\xi}.$$

Nous avons donc maintenant à former les coefficients de cette forme quadratique.

En ce qui concerne le cas où α^2 est une quantité infiniment petite par rapport à ζ, nous en parlerons plus tard.

36. Avant tout, nous allons chercher les valeurs, pour $x = \xi$, des dérivées partielles par rapport à x et y de la fonction H, définie par la formule (1).

On peut facilement se convaincre que cette fonction satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(10)\qquad (x-1)\frac{\partial H}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{2}H = (xy)^{-\frac{1}{2}}.$$

Puis, en posant

$$\left(\frac{\partial^n H}{\partial x^n}\right)_{x=\xi} = u_n,$$

on trouve facilement

$$(11)\qquad \left(\frac{\partial^{m+n} H}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{x=\xi} = \frac{1.3\ldots(2m-1).1.3\ldots(2n-1)}{1.3\ldots(2m+2n-1)}u_{m+n}.$$

Par suite, l'équation (10) donne, pour u_n, l'équation suivante aux différences finies

$$(12)\qquad 2^n n(\xi-1)u_n + 2^{n-2}(2n-1)^2 u_{n-1} = (-1)^{n-1}.1.3\ldots(2n-1)\xi^{-n},$$

dans laquelle n peut avoir toutes les valeurs entières positives. On doit ajouter à cette équation la condition

$$(13)\qquad 2\xi u_1 - \tfrac{2}{3}\xi^3 u_2 + 1 = 0$$

qui découle de l'équation (5).

Il n'est assurément pas difficile de trouver, pour l'équation linéaire du premier ordre (12), une intégrale générale, dans laquelle la constante arbitraire sera déterminée par la condition (13). Mais, comme nous n'avons pas besoin de l'expression générale de u_n, nous ne l'indiquerons pas.

Nous trouvons, par la résolution successive des équations (13) et (12) pour

$n = 1, 2, 3$ et 4 :

$$(14)\quad \begin{cases} u_0 = 2\dfrac{13\xi - 10}{3\xi^2 + 8\xi - 8}, \qquad u_1 = -\dfrac{5\xi - 4}{\xi(3\xi^2 + 8\xi - 8)}, \\ u_2 = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{3\xi - 2}{\xi^2(3\xi^2 + 8\xi - 8)}, \qquad u_3 = -\dfrac{5}{4}\,\dfrac{6\xi^2 - 9\xi + 4}{\xi^3(\xi - 1)(3\xi^2 + 8\xi - 8)}, \\ u_4 = \dfrac{35}{64}\,\dfrac{33\xi^3 - 78\xi^2 + 76\xi - 24}{\xi^4(\xi - 1)^2(3\xi^2 + 8\xi - 8)}. \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, nous obtiendrons, d'après (3) et (4), l'expression suivante pour K,

$$(15)\qquad K = 8\xi^{\frac{2}{3}}\frac{\xi - 1}{3\xi^2 + 8\xi - 8}.$$

Pour former les dérivées de y par rapport à x, nous remarquerons que, si $F(x, y)$ est une fonction symétrique quelconque de x et y, et si F', F'', etc. représentent ses dérivées par rapport à x, prises dans l'hypothèse où y est une fonction de x, définie par l'équation (5), on aura, pour $x = \xi$,

$$F' = 0, \qquad F'' = 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial x}y'',$$

$$F''' = -3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)y'' + \frac{\partial F}{\partial x}y''',$$

$$F^{\text{IV}} = 2\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\,\partial y} + 3\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2}\right) + 6\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}\right)y'' - 4\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)y''' + 3\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y''^2 + \frac{\partial F}{\partial x}y^{\text{IV}}.$$

En substituant à la place de F le premier membre de l'équation (5) et en nous servant des formules (11) et (14), nous trouvons, pour $x = \xi$,

$$(16)\qquad y'' = \frac{39\xi^3 - 130\xi^2 + 108\xi - 24}{4\xi(\xi - 1)(3\xi^2 - 8\xi + 4)}, \qquad y''' = -\frac{3}{2}y''^2.$$

Nous ne formerons pas l'expression très compliquée de y^{IV}, parce que le besoin ne s'en présentera pas.

Remarquons qu'il résulte déjà de ces formules l'exactitude de ce qui a été dit plus haut, relativement à $\dfrac{d^3(\Pi_1)}{dx^3}$, car (Π_1) est une fonction symétrique de x et y, et ces formules montrent que $F''' = 0$, chaque fois que $F'' = 0$.

Nous remarquons ensuite que si

$$F(x, y) = \frac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x + y},$$

on aura, pour $x = \xi$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{12}\xi^{-\frac{4}{3}}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{36}\xi^{-\frac{7}{3}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{6}\xi^{-\frac{7}{3}}, \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{7}{18}\xi^{-\frac{10}{3}},$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\,\partial y} + 3\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} = -\frac{2}{3}\xi^{-\frac{13}{3}},$$

et que si

$$F(x, y) = (xy)^{\frac{1}{6}} H,$$

les formules (11) et (14) donneront, pour $x = \xi$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\frac{\xi - 1}{3\xi^2 + 8\xi - 8}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{9}\xi^{-\frac{5}{3}}\frac{7\xi - 10}{3\xi^2 + 8\xi - 8},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\frac{4}{3}\xi^{-\frac{5}{3}}\frac{\xi - 1}{3\xi^2 + 8\xi - 8}, \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{1}{9}\xi^{-\frac{8}{3}}\frac{35\xi^2 - 76\xi + 32}{(\xi - 1)(3\xi^2 + 8\xi - 8)},$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\,\partial y} + 3\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} = -\frac{1}{24}\xi^{-\frac{11}{3}}\frac{367\xi^3 - 1122\xi^2 + 972\xi - 280}{(\xi - 1)^2(3\xi^2 + 8\xi - 8)}.$$

Si donc nous posons

$$G = K\frac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x + y} - (xy)^{\frac{1}{6}} H,$$

et si nous tenons compte de l'expression (15), nous verrons que, pour $x = \xi$, $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$. Il se trouve par suite qu'il est suffisant d'avoir les expressions (16) pour former G^{IV}. Ainsi les formules obtenues donneront

$$G' = 0, \qquad G'' = 0, \qquad G''' = 0,$$

$$G^{\text{IV}} = \frac{1}{48}\xi^{-\frac{11}{3}}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{(\xi - 1)^2(3\xi^2 + 8\xi - 8)(3\xi^2 - 8\xi + 4)^2},$$

où

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(x) = {} & (5x - 8)(39x^3 - 130x^2 + 108x - 24)^2\\ & - 8(7x^2 - 20x + 4)(3x^2 - 8x + 4)(39x^3 - 130x^2 + 108x - 24)\\ & + 4(3x^2 - 8x + 4)^2(239x^3 - 738x^2 + 588x - 152)\\ = {} & 9657x^7 - 77292x^6 + 253548x^5\\ & - 444480x^4 + 452976x^3 - 268608x^2 + 85568x - 11264,\end{aligned}$$

et l'on aura pour A [formules (2) et (9)] l'expression suivante :

$$A = \frac{1}{80.48} f\rho Q^2 \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}} \frac{\xi^{-\frac{11}{3}} \vartheta(\xi)}{(\xi-1)^2(3\xi^2+8\xi-8)(3\xi^2-8\xi+4)^2}.$$

Quant au coefficient B, en remarquant que, pour $x = \xi$,

$$S = \frac{2}{5} Q \left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{1}{3}},$$

nous déduisons de l'égalité (4), à l'aide des formules trouvées,

$$B = \frac{\pi f \rho}{12} \frac{\varphi(\xi)}{\xi^2(\xi-1)(3\xi^2+8\xi-8)(3\xi^2-8\xi+4)}$$

où

$$\varphi(x) = 111 x^4 - 498 x^3 + 780 x^2 - 536 x + 128.$$

Enfin, pour former le coefficient C, nous remarquons que, pour $x = \xi$,

$$\frac{J^2}{S^3} = 15 f\rho \left(\frac{4\pi}{3Q}\right)^{\frac{5}{3}} \xi^{-\frac{1}{3}} \frac{\xi-1}{3\xi^2+8\xi-8},$$

et que, d'après les formules du n° 27,

$$G_1 g_1^2 = \frac{16\pi}{45} \left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{\frac{4}{3}} \xi^{\frac{2}{3}}.$$

En remarquant ensuite que, dans le cas considéré, $a T_1^2$ se réduit à l'expres sion T_0^2 du n° 17, où l'on doit poser

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\xi-1}},$$

et tenant compte de l'égalité

$$\sqrt{\xi-1}\,(13\xi-10) - (3\xi^2+8\xi-8) \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\xi-1} = 0,$$

qui découle de celle (5) et n'est autre chose que l'équation (22) du Chapitre III, nous trouvons

$$T_1^2 = 2 \left(\frac{4\pi}{3Q}\right)^{\frac{1}{3}} \xi^{\frac{1}{3}} \frac{\xi-2}{3\xi^2+8\xi-8}.$$

Par suite, la troisième des formules (9) donne

$$C = \frac{15 f\rho}{4} \left(\frac{4\pi}{3Q}\right)^{\frac{5}{3}} \xi^{-\frac{1}{3}} \frac{5\xi-8}{3\xi^2+8\xi-8}.$$

37. Comme C représente évidemment une quantité positive, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$A\alpha^4 + B\alpha^2\beta + C\beta^2$$

reste positive, pour toutes les valeurs réelles de α et β, en s'annulant seulement quand on a simultanément $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, est donnée, comme on sait, par l'inégalité

$$B^2 - 4AC < 0,$$

qui, en vertu des expressions trouvées pour A, B, C, prend la forme

$$(17) \qquad (5\xi - 8)\mathfrak{S}(\xi) - [\varphi(\xi)]^2 > 0.$$

Nous allons démontrer que cette inégalité a effectivement lieu.

En remarquant que

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(x+2) = 9657x^7 + 57906x^6 + 137232x^5 \\ + 157440x^4 + 80256x^3 + 4992x^2 - 6400x + 512,\end{aligned}$$

nous concluons que, pour x dépassant $2 + \frac{25}{39}$, $\mathfrak{S}(x)$ est une fonction croissante de x. Puis, en remarquant que

$$\varphi(x+2) = 111x^4 + 390x^3 + 456x^2 + 160x - 32,$$

nous voyons que, pour x dépassant 2, $\varphi(x)$ est une fonction croissante, et qu'en outre $\varphi(2,5) > 0$.

Nous en déduisons, en tenant compte des inégalités (6), l'inégalité suivante :

$$(5\xi - 8)\mathfrak{S}(\xi) - [\varphi(\xi)]^2 > 5\mathfrak{S}(2,9) - [\varphi(3)]^2,$$

et de là on conclut l'inégalité (17), car, en faisant le calcul, on trouve

$$5\mathfrak{S}(2,9) - [\varphi(3)]^2 > 207900.$$

Si nous revenons maintenant à la formule (8), nous voyons que, d'après ce que l'on vient de démontrer, $\Delta\Pi_1 - \tau$ est une quantité positive qui, pour α non nul, ne peut s'annuler, et cela suffit, à condition que α^2 ne soit pas une quantité infiniment petite par rapport à ζ, pour que $\Delta\Pi_1$ reste positif pour toutes les valeurs suffisamment petites de α.

Nous ne pouvons pas affirmer ce dernier fait, quand α^2 est une quantité infiniment petite par rapport à ζ, car alors τ peut contenir des termes par rapport auxquels α^4 sera une quantité infiniment petite. Donc $\Delta\Pi_1 - \tau$ ne déterminera pas le signe de $\Delta\Pi_1$ quand, dans l'expression (7), tous les ε_i^n sont nuls, à l'exception de ε_3^2 (nous pouvons toujours supposer ε_1^2 égal à zéro). Mais on peut se convaincre

facilement que ce cas ne présente aucune difficulté sérieuse. En effet, si tous les ε_i^n, à l'exception de ε_3^2, sont nuls, alors, comme on le voit par la formule (17) du Chapitre précédent, on peut trouver un ellipsoïde de Jacobi, pour lequel l'écart entre la surface du liquide et sa surface soit une quantité infiniment petite par rapport à ζ, et, au lieu de l'ellipsoïde (α), on pourrait prendre cet ellipsoïde pour passer de l'ellipsoïde de révolution à la surface du liquide. On voit par là que le cas considéré ne peut se présenter, si α est déterminé par la condition que l'écart, entre la surface du liquide et la surface de l'ellipsoïde (α), soit le plus petit possible.

Nous arrivons donc définitivement à la conclusion que *l'ellipsoïde de révolution de Jacobi est une figure d'équilibre stable.*

Par suite, le résultat essentiel du Chapitre III (n° 14) peut être énoncé maintenant comme il suit :

Tous les ellipsoïdes de révolution planétaires, dont les excentricités ne dépassent pas l'excentricité de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, sont des figures d'équilibre stables.

THÈSES (¹).

I. Il n'existe aucune figure d'équilibre, pour laquelle l'énergie totale puisse atteindre sa plus petite valeur possible pour une valeur donnée *non nulle* du moment des quantités de mouvement.

II. La vitesse angulaire étant nulle, s'il existe une figure d'équilibre, pour laquelle l'énergie potentielle des forces newtoniennes atteint sa plus petite valeur possible, cette figure est stable en ce sens que, après que l'on a communiqué aux molécules du liquide des déplacements et des vitesses suffisamment petits, la *déviation* de la figure du liquide à partir de la figure d'équilibre et la force

(¹) D'après l'usage adopté dans les Universités russes, tout travail qui représente ce que l'on appelle en France *Thèse*, et ce que l'on appelle en Russie *Dissertation*, doit être accompagné d'un certain nombre de propositions énoncées sans démonstration. Ces propositions, qui constituent ce que l'on appelle en Russie *Thèses*, ne sont le plus souvent que des compléments à ce qui a été développé dans la Dissertation. Mais elles peuvent se rapporter aussi à une tout autre branche de la Science. L.

vive du mouvement qui s'ensuit ne surpasseront pas des limites assignées à l'avance et aussi petites qu'on veut, *pendant toute la durée du mouvement* (1).

III. En entendant par J_0 le minimum du moment des quantités de mouvement pour les ellipsoïdes de Jacobi, désignons par J_1 le produit de J_0 par le nombre 1,2...(1,28). Cela posé, à toute valeur du moment des quantités de mouvement, qui est inférieure à J_1, il correspondra une figure ellipsoïdale d'équilibre stable, et cette figure sera celle à trois axes inégaux, dès qu'une telle figure d'équilibre est possible.

IV. Étant donné un entier n quelconque, surpassant 2, on peut trouver $E\frac{n}{2}+2$ surfaces algébriques d'ordre n infiniment voisines de celles des figures ellipsoïdales d'équilibre et vérifiant, à une première approximation, la condition d'équilibre. Parmi les figures délimitées par ces surfaces, *une* est infiniment voisine d'un ellipsoïde de Jacobi, et les $E\frac{n}{2}+1$ autres sont infiniment voisines des ellipsoïdes de Maclaurin.

(1) L'auteur a établi depuis que le minimum de l'énergie potentielle ne peut avoir lieu que pour la sphère (*Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 1re série, 1886). Il en résulte que, *s'il existe une figure pour laquelle l'énergie potentielle atteint sa plus petite valeur possible* (valeur dont l'existence est évidente), cette figure ne peut être que sphérique. *Voir*, à ce sujet, une Note de M. Poincaré, insérée dans les *Comptes rendus* pour 1887 (t. CIV). M. Poincaré donne à cette proposition un autre énoncé. Mais l'auteur croit que l'énoncé précédent est plus conforme à ce qui est établi. L.

TABLE DES MATIÈRES (Fascicule N° 1, 1904).

Librairie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55, à PARIS (6e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut. — **Traité de Mécanique rationnelle** (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences). 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I : *Statique, Dynamique du point*, avec 178 figures, 2e édition; 1902.......... 18 fr.

Tome II : *Dynamique des systèmes, Mécanique analytique*, avec 99 figures; 2e édition, 1904.......... 16 fr.

Tome III : *Équilibre et mouvement des milieux continus*, avec 70 figures; 1902.......... 17 fr.

APPELL (P.), Membre de l'Institut, et **CHAPPUIS (J.)**, Professeur à l'École Centrale. — **Leçons élémentaires de Mécanique** *à l'usage des élèves de Première C et D*. Un volume in-18 jésus, avec 76 figures; 1905.......... 2 fr. 75 c.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions**. *Exposé de la Théorie des ensembles*. Grand in-8; 1898.......... 3 fr. 50 c.

BOREL (Émile). — **Nouvelles Leçons sur la théorie des fonctions**. 4 volumes grand in-8, se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières; 1900.......... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes; 1901.......... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs professées au Collège de France, recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar; 1902.......... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes professées au Collège de France recueillies et rédigées par Ludovic Zoretti; 1903.......... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries de polynomes.......... (*Sous presse.*)

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal**. 4 volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément (Ouvrage complet) :

Ire Partie : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima*; 1887.......... 15 fr.

IIe Partie : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces*; 1889.......... 15 fr.

IIIe Partie : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces*; 1894.......... 15 fr.

IVe Partie : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique*; 1896.......... 15 fr.

FREYCINET (C. de), de l'Institut. — **De l'expérience en Géométrie**. Volume in-8 de xx-175 pages; 1903.......... 4 fr.

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Doyen de la Fa Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnée lignes**. Deux volumes grand in-8, se vendant séparément :

Tome I : Volume de iv-338 pages avec figures; 1898..........

Tome II.......... (*En prép*

RESAL (H.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytec à l'École des Mines, Inspecteur général des Mines, adjoint a d'Artillerie pour les études scientifiques. — **Traité de Mécan nérale** comprenant les *Leçons professées à l'École Polytechn l'École des Mines*. 7 volumes in-8, se vendant séparément :

Mécanique rationnelle.

Tome I : *Cinématique. — Théorèmes généraux de la Méca De l'équilibre et du mouvement des corps solides*. 2e éditi avec 47 figures; 1895.......... 6

Tome II : *Du mouvement des solides eu égard aux frotten Équilibre intérieur. — Élasticité. — Hydrostatique. — Hydrody — Hydraulique*. 2e édition. In-8, avec 41 figures; 1895..........

Mécanique appliquée (Moteurs et Machines).

Tome III : *Des machines considérées au point de vue des motions de mouvement et de la transformation du travail de — Application de la Mécanique à l'Horlogerie*. In-8, avec figures; 1875..........

Tome IV : *Moteurs animés. — De l'eau et du vent considé moteurs. — Machines hydrauliques et élévatoires. — Machi peur, à air chaud et à gaz*. In-8, avec 200 belles figures dessinées d'après les meilleurs types; 1876..........

Constructions.

Tome V : *Résistance des matériaux. — Constructions en ma çonneries. — Fondations. — Murs de soutènement. — Réserv* avec 308 belles figures, levées et dessinées d'après les meilleu 1880.......... 12

Tome VI : *Voûtes droites et biaises, en dôme, etc. — Pont — Planchers et combles en fer. — Ponts suspendus. — Pout Cheminées. — Fondations de machines industrielles. — Am des cours d'eau. — Substruction des chemins de fer. — N intérieure. — Ports de mer*. In-8, avec 519 figures et 5 planc molithographiques; 1881..........

Développements et Exercices.

Tome VII : *Développements sur la Mécanique rationnelle et la tique pure*, comprenant de nombreux *Exercices*. In-8, av. 43 fig.;

SAINT-GERMAIN (de), Doyen de la Faculté des Sciences de **Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle**, à l'usage didats à la Licence et à l'Agrégation des Sciences mathématique tion, revue et augmentée. In-8, avec figures; 1889..........

34813 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1904.

PARIS, GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE. ED. PRIVAT, IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1904

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

Deuxième fascicule.

SUR UN PROBLÈME

RELATIF A LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE

(SECOND MÉMOIRE),

PAR M. É. GOURSAT.

Ce Mémoire est consacré à l'étude du même problème que le précédent ([1]). Mais, au lieu de supposer la fonction $f(x, y, z, p, q)$ et les données analytiques, je suppose les variables essentiellement réelles et les conditions de continuité réduites au minimum. La marche suivie offre un parallélisme presque complet avec la marche suivie dans le premier travail; les méthodes seules sont différentes, en particulier celle qui est employée pour résoudre les équations fonctionnelles que l'on rencontre. Il est clair que, dans ce nouveau problème, il ne saurait être question de l'emploi des séries entières.

La nouvelle méthode s'appliquerait aussi sans difficulté au cas déjà traité des intégrales analytiques.

1. Je rappellerai d'abord les résultats obtenus par M. Picard ([2]) pour deux problèmes spéciaux, que l'on peut considérer comme deux cas particuliers importants du problème général dont je m'occupe.

Étant donnée une équation

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

il existe, sous certaines conditions de continuité inutiles à rappeler dans ce résumé, une intégrale qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, lorsque x varie de zéro à $\alpha (\alpha > 0)$, et y de zéro à $\beta (\beta > 0)$, et qui

([1]) *Voir* Tome V de ce Journal (2ᵉ Série, p. 405-436).

([2]) Note du Tome IV de la *Théorie générale des surfaces* de M. Darboux.

se réduit pour $y = 0$ à une fonction déterminée $\varphi(x)$ de x, et pour $x = 0$ à une fonction déterminée $\psi(y)$ de y.

Dans le cas particulier des équations linéaires

$$s = ap + bq + cz,$$

on peut énoncer le résultat sous une forme plus précise. Si les fonctions a, b, c sont continues dans le rectangle R obtenu en faisant varier x de 0 à l, et y de 0 à m, et si les fonctions données $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sont continues et admettent des dérivées partielles du premier ordre continues lorsque x varie de 0 à l et y de 0 à m, l'intégrale répondant aux conditions initiales est elle-même continue dans le rectangle R.

La méthode employée par M. Picard permet aussi, comme il l'indique rapidement, de déterminer une intégrale d'une équation linéaire, se réduisant, pour $y = 0$, à une fonction donnée $f(x)$ et, pour $y = x$, à une autre fonction $\varphi(x)$. Il n'y aurait aucune difficulté à étendre la méthode au cas d'une équation de la forme plus générale $s = f(x, y, z, p, q)$. On pourrait aussi, à l'aide d'une transformation que nous emploierons plus loin (n° 10), traiter le même problème lorsque la droite $y = x$ est remplacée par une courbe issue de l'origine, en ramenant ce problème au problème de M. Picard.

Il ne reste donc à examiner, dans le même ordre d'idées, que le cas où l'on se donne les valeurs de l'intégrale le long de deux courbes issues d'un même point, aucune de ces courbes n'étant une caractéristique.

2. Nous traiterons d'abord un certain nombre de problèmes préliminaires :

Problème I. — *Soit $\pi(x)$ une fonction définie dans l'intervalle* $(0, a)$, *où a est positif. Déterminer une autre fonction $\varphi(x)$, définie dans le même intervalle, et telle que l'on ait*

$$(1) \qquad \varphi(\alpha x) - \varphi(x) = \pi(x) \qquad (0 < x < a),$$

α étant une constante positive différente de l'unité.

Nous pouvons supposer $\alpha > 1$; en effet, en changeant x en $\frac{x}{\alpha}$ dans la relation précédente, elle devient

$$\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(x) = -\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

et nous obtenons une relation de même forme, où α est remplacé par $\frac{1}{\alpha}$, et $\pi(x)$ par $-\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Nous supposerons constamment dans la suite α supérieur à un.

Si la fonction cherchée $\varphi(x)$ doit être continue pour $x = 0$, ce que nous admettons aussi, $\varphi(\alpha x) - \varphi(x)$ tend vers zéro avec x; la fonction $\pi(x)$ doit donc tendre vers zéro lorsque x tend vers zéro pour que le problème soit possible. Cette condition étant vérifiée, on déduit de la relation (1), en y remplaçant successivement x par $\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha^2}, \dots, \frac{x}{\alpha^n}, \dots,$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) \quad &- \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \pi\left(\frac{x}{\alpha}\right),\\
\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad &- \varphi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) = \pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
\varphi\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) &- \varphi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) = \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) + \pi\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + \dots + \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right). \tag{2}$$

Lorsque le nombre n croît indéfiniment, $\frac{x}{\alpha^n}$ tend vers zéro et $\varphi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$ a pour limite $\varphi(0)$. Pour qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ répondant à la question, il faut donc que la série dont le terme général est $\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$ soit convergente, et, lorsqu'il en est ainsi, la fonction $\varphi(x)$ a pour expression

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \pi\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + \dots + \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) + \dots. \tag{3}$$

On voit que cette fonction $\varphi(x)$ est complètement définie, à une constante arbitraire près $\varphi(0)$, comme il était évident *a priori*, et l'on vérifie immédiatement sur la formule (3) que la fonction $\varphi(x)$ satisfait bien à la relation (1) dont on est parti.

Si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) \tag{4}$$

est convergente dans un intervalle $(0, b)$, où $0 < b < a$, elle sera convergente dans tout l'intervalle $(0, a)$, car, à partir d'une valeur de n assez grande, $\frac{x}{\alpha^n}, \frac{x}{\alpha^{n+1}}, \dots$ seront inférieurs à b. Tout dépend donc de la façon dont la fonction $\pi(x)$ tend vers zéro avec x. S'il existe une puissance positive de x, soit x^μ, telle que le rapport $\frac{\pi(x)}{x^\mu}$ tende vers une limite, la série est convergente. Plus

généralement, supposons qu'il existe trois nombres positifs μ, ε, K, tels que l'on ait

$$|\pi(x)| < \mathrm{K}x^{\mu} \quad \text{pour} \quad 0 < x < \varepsilon.$$

A partir d'une valeur de n assez grande, $\frac{x}{\alpha^n}$ sera inférieur à ε, et l'on aura

$$\left|\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)\right| < \mathrm{K}\frac{x^{\mu}}{\alpha^{n\mu}} < \frac{\mathrm{K}a^{\mu}}{\alpha^{n\mu}},$$

les termes de la série (4) sont donc inférieurs en valeur absolue aux termes d'une progression géométrique dont la raison $\alpha^{-\mu}$ est inférieure à l'unité.

Le même raisonnement prouve que la série est uniformément convergente dans l'intervalle $(0, a)$. Si la fonction $\pi(x)$ est continue dans cet intervalle, il en sera donc de même de la fonction $\varphi(x)$.

Remarques. — 1° Lorsque la série (4) est convergente, la fonction $\varphi(x)$ est définie dans un intervalle $(0, a\alpha)$, plus grand que l'intervalle $(0, a)$, mais la relation (1) n'est vérifiée que dans l'intervalle $(0, a)$, si la fonction $\pi(x)$ n'est définie que pour les valeurs de x inférieures à a.

2° Il est facile de former des exemples où la fonction $\pi(x)$ tend vers zéro avec x, sans que la série (4) soit convergente. Soit

$$\pi(x) = \frac{-1}{\log x} \qquad (a < 1),$$

on a

$$\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) = \frac{-1}{\log\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)} = \frac{1}{n\log\alpha - \log x},$$

et le produit $n\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$ a une limite positive $\frac{1}{\log\alpha}$: la série (4) est donc divergente.

3° Le problème que nous venons de résoudre n'offre aucune difficulté si l'on suppose la constante α négative.

Soit $\alpha = -\beta$, β étant positif. On peut choisir arbitrairement la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle $(0, a)$ et la relation

$$\varphi(-\beta x) - \varphi(x) = \pi(x)$$

fait connaître le prolongement de cette fonction dans l'intervalle $(-a\beta, 0)$. Le problème est donc tout à fait indéterminé dans ce cas.

3. Nous allons supposer maintenant que la fonction $\pi(x)$ est continue et admet une dérivée $\pi'(x)$ continue dans l'intervalle $(0, a)$, et, en outre, que cette dé-

rivée $\pi'(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive K_1 telle que l'on ait l'inégalité

$$(5) \qquad |\pi'(x)| < K_1 x$$

pour toute valeur de x comprise entre o et a. Si K est la valeur maximum de $\pi'(x)$ dans cet intervalle, on aura aussi, d'après la formule des accroissements finis,

$$(6) \qquad |\pi(x)| < Kx$$

pour toute valeur de x entre o et a.

Prenons $\varphi(0) = 0$. La série qui représente $\varphi(x)$ et celle que l'on obtient en prenant les dérivées

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} \pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$$

sont uniformément convergentes dans l'intervalle $(0, a)$. La remarque a déjà été faite pour la première; quant à la seconde, remarquons que l'on a

$$\left| \frac{1}{\alpha^n} \pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) \right| < \frac{K_1 x}{\alpha^{2n}} < \frac{K_1 a}{\alpha^{2n}},$$

et $\frac{K_1 a}{\alpha^{2n}}$ est le terme général d'une progression géométrique décroissante. La fonction $\varphi(x)$ admet donc aussi une dérivée $\varphi'(x)$ continue dans l'intervalle $(0, a)$, et nous pouvons écrire

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right), \qquad \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} \pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right).$$

Il est facile, d'après ces formules, d'avoir des limites supérieures pour les valeurs absolues de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$. Nous avons, en effet, d'après les inégalités (5) et (6),

$$(7) \qquad |\varphi(x)| < K\, x \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \ldots + \frac{1}{\alpha^n} + \ldots \right\} = \frac{Kx}{\alpha - 1},$$

$$(8) \qquad |\varphi'(x)| < K_1 x \left\{ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2n}} + \ldots \right\} = \frac{K_1 x}{\alpha^2 - 1}.$$

4. Problème II. — *Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le rectangle R défini par les inégalités*

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad 0 \leqq y \leqq a\alpha;$$

déterminer une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y), \tag{9}$$

continue dans ce rectangle, et s'annulant le long des segments des droites $y = x$ *et* $y = \alpha x$ $(\alpha > 1)$, *situés dans ce rectangle.*

L'intégrale générale de l'équation (9) est

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant deux fonctions arbitraires, et $F(x, y)$ étant l'intégrale double

$$F(x, y) = \int_0^x du \int_0^y f(u, v)\, dv \qquad (0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a\alpha).$$

Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont déterminées par les deux conditions

$$\begin{cases} F(x, x) \quad + \varphi(x) + \psi(x) \quad = 0, \\ F(x, \alpha x) + \varphi(x) + \psi(\alpha x) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

d'où l'on tire

$$\psi(\alpha x) - \psi(x) = F(x, x) - F(x, \alpha x) = \pi(x). \tag{11}$$

La fonction $\pi(x)$ qui est au second membre est définie dans l'intervalle $(0, a)$. On en déduira donc pour $\psi(x)$ une fonction continue définie dans l'intervalle $(0, a\alpha)$. Nous avons ensuite

$$\varphi(x) = -\psi(x) - F(x, x),$$

égalité qui détermine la seconde fonction $\varphi(x)$; cette fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle $(0, a)$. Les fonctions φ et ψ étant ainsi obtenues, l'intégrale

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

est continue dans le rectangle R, et satisfait à l'énoncé.

Il est facile d'avoir une limite supérieure de la valeur absolue de cette intégrale. Supposons que dans le rectangle R la valeur absolue de $f(x, y)$ reste inférieure à un nombre positif M; la valeur absolue de $F(x, y)$ est inférieure à Mxy, et les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^y f(x, v)\, dv, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^x f(u, y)\, du$$

sont respectivement inférieures en valeur absolue à My et à Mx,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| < My, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < Mx.$$

D'ailleurs on peut écrire

$$\pi(x) = (1-\alpha)x\,F'_y(x, \zeta x),$$

ζ étant compris entre 1 et α; on a donc

$$|\pi(x)| < M(\alpha - 1)x^2.$$

Si nous supposons $\psi(0) = 0$, nous avons

$$\psi(x) = \pi\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + \ldots + \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) + \ldots,$$

et, par suite,

$$|\psi(x)| < M(\alpha - 1)x^2\left\{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2n}} + \ldots\right\}$$

ou

$$|\psi(x)| < \frac{Mx^2}{\alpha + 1}. \tag{12}$$

Pour trouver une limite supérieure de $|\varphi(x)|$, remarquons que l'on déduit des relations (10), en changeant dans la première de ces relations x en αx, et en retranchant membre à membre,

$$\varphi(\alpha x) - \varphi(x) = F(x, \alpha x) - F(\alpha x, \alpha x) = \pi_1(x),$$

relation qui permet de définir la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle $(0, a)$, car le second membre $\pi_1(x)$ est défini dans l'intervalle $\left(0, \frac{a}{\alpha}\right)$. On a, dans cet intervalle,

$$\pi_1(x) = (1-\alpha)x\,F'_x(\xi x, \alpha x),$$

ξ étant compris entre 1 et α, et, par suite,

$$|\pi_1(x)| < M\alpha(\alpha - 1)x^2.$$

La fonction $\varphi(x)$ est elle-même représentée par la série convergente

$$\varphi(x) = \pi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \pi_1\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + \ldots + \pi_1\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) + \ldots$$

et l'on en conclut comme tout à l'heure que, dans l'intervalle (o, a), on a

$$(12') \qquad |\varphi(x)| < \frac{M\alpha x^2}{\alpha+1}.$$

Dans le rectangle R, on a donc

$$(13) \qquad |z| < Mxy + \frac{M\alpha x^2}{\alpha+1} + \frac{My^2}{\alpha+1}.$$

Cette fonction z admet elle-même des dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, continues dans le même domaine. On a, en effet,

$$\pi'(x) = F_1(x, x) + F_2(x, x) - F_1(x, \alpha x) - \alpha F_2(x, \alpha x),$$

en posant

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2(x, y),$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned}\pi'(x) &= F_1(x, x) - F_1(x, \alpha x) + F_2(x, x) - \alpha F_2(x, \alpha x) \\ &= (1-\alpha)xf(x, \eta x) + F_2(x, x) - \alpha F_2(x, \alpha x),\end{aligned}$$

η étant un nombre compris entre 1 et α. On aura donc, dans l'intervalle (o, a),

$$|\pi'(x)| < M(\alpha-1)x + M(1+\alpha)x = 2M\alpha x;$$

on en conclut que la série des dérivées

$$\frac{1}{\alpha}\pi'\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha^2}\pi'\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + \ldots + \frac{1}{\alpha^n}\pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) + \ldots$$

est uniformément convergente dans l'intervalle (o, $a\alpha$) et que la somme de cette série est plus petite en valeur absolue que la somme de la série

$$2M\alpha x\left\{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2n}} + \ldots\right\} = \frac{2M\alpha x}{\alpha^2-1}.$$

La fonction $\psi(y)$ admet donc une dérivée continue dans l'intervalle (o, $a\alpha$) dont la valeur absolue vérifie la condition

$$(14) \qquad |\psi'(y)| < \frac{2M\alpha y}{\alpha^2-1}.$$

On a de même

$$\begin{aligned}\pi'_1(x) &= F_1(x, \alpha x) + \alpha F_2(x, \alpha x) - \alpha F_1(\alpha x, \alpha x) - \alpha F_2(\alpha x, \alpha x) \\ &= \alpha[F_2(x, \alpha x) - F_2(\alpha x, \alpha x)] + F_1(x, \alpha x) - \alpha F_1(\alpha x, \alpha x),\end{aligned}$$

et l'on voit comme tout à l'heure que la valeur absolue de $\pi_1'(x)$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{a}{\alpha}\right)$ est inférieure à

$$\alpha(\alpha-1)\mathrm{M}x + \mathrm{M}\alpha x + \mathrm{M}\alpha^2 x = 2\mathrm{M}\alpha^2 x.$$

On en déduit ensuite que la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée $\varphi'(x)$ continue dans l'intervalle $(0, a)$ dont la valeur absolue satisfait à la condition

$$(14') \qquad |\varphi'(x)| < \frac{2\mathrm{M}\alpha^2 x}{\alpha^2-1}.$$

Il résulte de toutes ces inégalités que, dans le rectangle R, les valeurs absolues des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ont les limites suivantes :

$$(15) \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < \mathrm{M}y + \frac{2\mathrm{M}\alpha^2 x}{\alpha^2-1}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \mathrm{M}x + \frac{2\mathrm{M}\alpha y}{\alpha^2-1}.$$

Dans un rectangle R', homothétique au premier par rapport à l'origine et de dimensions r et $r\alpha\,(0 < r \leqq a)$, on aura les inégalités

$$(16) \qquad |z| < \mathrm{AM}r^2, \qquad |p| < \mathrm{BM}r, \qquad |q| < \mathrm{CM}r,$$

A, B, C étant trois nombres positifs qui ne dépendent que de α,

$$(17) \qquad \mathrm{A} = 2\alpha, \qquad \mathrm{B} = \alpha + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}, \qquad \mathrm{C} = 1 + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}.$$

5. Lorsque la fonction $f(x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz, on peut trouver des expressions différentes pour les limites supérieures de $|\varphi'(x)|$ et de $|\psi'(y)|$, ne contenant pas $\alpha - 1$ en dénominateur. Supposons, en effet, qu'il existe deux nombres positifs H et K tels que l'on ait

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \mathrm{H}|x'-x| + \mathrm{K}|y'-y|,$$

(x, y) et (x', y') étant les coordonnées de deux points quelconques du rectangle R. Nous pouvons écrire comme il suit la dérivée $\pi'(x)$

$$\pi'(x) = \mathrm{F}_1(x, x) - \mathrm{F}_1(x, \alpha x) + \mathrm{F}_2(x, x) - \mathrm{F}_2(x, \alpha x) + (1-\alpha)\,\mathrm{F}_2(x, \alpha x)$$

on a, comme plus haut,

$$|\mathrm{F}_1(x, x) - \mathrm{F}_1(x, \alpha x)| < \mathrm{M}(\alpha-1)x$$

et

$$|\mathrm{F}_2(x, \alpha x)| < \mathrm{M}x.$$

La différence $F_2(x, \alpha x) - F_2(x, x)$ est égale à

$$\int_0^x [f(u, x+\alpha x) - f(u, x)]\, du,$$

et la fonction sous le signe $\int$ est, d'après l'hypothèse faite, inférieure en valeur absolue en $K(\alpha - 1)x$; la valeur absolue de l'intégrale est donc elle-même inférieure à $K(\alpha - 1)x^2$, et, par suite, l'on a

$$|\pi'(x)| < 2M(\alpha - 1)x + K(\alpha - 1)x^2.$$

On en conclut, en reprenant les calculs du paragraphe précédent, les inégalités

$$|\psi'(y)| < \frac{2My}{\alpha+1} + \frac{Ky^2}{\alpha^2+\alpha+1}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < Mx + \frac{2My}{\alpha+1} + \frac{Ky^2}{\alpha^2+\alpha+1}.$$

En partant de l'expression de $\pi'_1(x)$, on établira par une marche toute pareille les inégalités

$$|\pi'_1(x)| < 2M\alpha(\alpha - 1)x + H(\alpha - 1)\alpha x^2,$$

$$|\varphi'(x)| < \frac{2M\alpha x}{\alpha+1} + \frac{H\alpha x^2}{\alpha^2+\alpha+1},$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < My + \frac{2M\alpha x}{\alpha+1} + \frac{H\alpha x^2}{\alpha^2+\alpha+1}.$$

6. Nous arrivons maintenant à l'objet essentiel de ce travail, qui est la résolution du problème suivant :

La fonction $f(x, y, z, p, q)$ étant continue dans le voisinage des valeurs $x = y = z = p = q = 0$, trouver une intégrale de l'équation

$$(18) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

continue dans le voisinage de l'origine, et qui soit nulle sur deux segments de droites issues de l'origine.

Pour préciser entièrement les conditions du problème, nous supposerons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue pour tous les systèmes de valeurs des variables satisfaisant aux conditions

$$(19) \qquad 0 \leqq x \leqq a, \quad 0 \leqq y \leqq a\alpha, \quad |z| \leqq Z, \quad |p| \leqq P, \quad |q| \leqq Q,$$

et que sa valeur absolue reste inférieure à un nombre positif déterminé M, dans ce domaine. Nous supposons de plus qu'il existe trois nombres positifs H, K, L,

tels que l'on ait

$$(20)\quad |f(x, y, z', p', q') - f(x, y, z, p, q)| < \mathrm{H}|z' - z| + \mathrm{K}|p' - p| + \mathrm{L}|q' - q|,$$

x, y, z, p, q et x, y, z', p', q' étant deux systèmes quelconques de valeurs des variables satisfaisant aux inégalités (19). On se propose de déterminer une intégrale continue, ainsi que ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, dans un rectangle situé dans l'angle $x\mathrm{O}y$ et défini par les inégalités

$$0 \leqq x \leqq r, \qquad 0 \leqq y \leqq r\alpha,$$

r étant un nombre positif inconnu; cette intégrale doit être nulle le long des deux segments de droite situés dans ce rectangle, appartenant aux droites $y = x$, $y = \alpha x$ (α désignant toujours un nombre positif supérieur à un).

La méthode des approximations successives conduit à former une suite de fonctions

$$(21)\qquad z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1}, \quad z_n, \quad \ldots$$

se déduisant l'une de l'autre par le procédé suivant : on pose $z_0 = 0$, et l'on prend pour z_n l'intégrale (que nous avons appris à former aux paragraphes précédents), de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right),$$

qui est nulle le long des deux segments de droite considérés. Montrons d'abord que, si le nombre positif r est assez petit, toutes ces fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ sont continues dans le rectangle R' de dimensions r et αr. Supposons, en effet, que dans ce rectangle on ait

$$|z_{n-1}| < \mathrm{Z}, \qquad |p_{n-1}| < \mathrm{P}, \qquad |q_{n-1}| < \mathrm{Q};$$

alors la valeur absolue de

$$f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})$$

est inférieure à M dans R'. La fonction z_n est donc continue ainsi que ses dérivées $\frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}$ dans le même rectangle, et l'on a dans ce domaine

$$|z_n| < \mathrm{MA}r^2, \qquad |p_n| < \mathrm{MB}r, \qquad |q_n| < \mathrm{MC}r,$$

A, B, C étant trois nombres positifs *qui ne dépendent que de* α. Si l'on choisit r assez petit pour que l'on ait

$$(22)\qquad \mathrm{MA}r^2 \leqq \mathrm{Z}, \qquad \mathrm{MB}r \leqq \mathrm{P}, \qquad \mathrm{MC}r \leqq \mathrm{Q},$$

la fonction z_n satisfera aux mêmes conditions que z_{n-1} dans le rectangle R'. Comme la première fonction z_0 est nulle, on voit que toutes les fonctions z_i de la suite (21) sont continues ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial z_i}{\partial x}$, $\frac{\partial z_i}{\partial y}$, dans le rectangle R', si le nombre r satisfait aux inégalités (22).

Pour savoir si la fonction z_n tend vers une limite lorsque le nombre n augmente indéfiniment, il suffit de rechercher si la série

$$z_1 + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots \tag{23}$$

est convergente. Or, nous avons, d'après la façon dont les fonctions z_n ont été définies,

$$\frac{\partial^2 (z_n - z_{n-1})}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2}), \tag{24}$$

et la différence $z_n - z_{n-1}$ est nulle le long des deux portions de droites $y = x$, $y = \alpha x$, situées dans le rectangle R'. Nous avons, d'après l'inégalité (20),

$$\begin{aligned} &|f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2})| \\ &\quad < \mathrm{H}|z_{n-1} - z_{n-2}| + \mathrm{K}|p_{n-1} - p_{n-2}| + \mathrm{L}|q_{n-1} - q_{n-2}|; \end{aligned}$$

si dans le rectangle R' on a constamment

$$|z_{n-1} - z_{n-2}| < \mathrm{T}, \qquad |p_{n-1} - p_{n-2}| < \mathrm{T}, \qquad |q_{n-1} - q_{n-2}| < \mathrm{T}, \tag{25}$$

le second membre de l'équation (24) reste inférieur à $(\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L})\mathrm{T}$ et, d'après les résultats établis plus haut, on aura aussi, dans le même rectangle R',

$$\left\{ \begin{aligned} &|z_n - z_{n-1}| < \mathrm{A}(\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L})\mathrm{T} r^2, \\ &|p_{n-1} - p_{n-2}| < \mathrm{B}(\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L})\mathrm{T} r, \\ &|q_{n-1} - q_{n-2}| < \mathrm{C}(\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L})\mathrm{T} r, \end{aligned} \right. \tag{26}$$

A, B, C étant les nombres positifs donnés par les formules (17), qui ne dépendent que de α.

Supposons que l'on ait choisi r assez petit pour vérifier, en même temps que les inégalités (22), les conditions nouvelles

$$\mathrm{A}(\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L}) r^2 < \lambda, \qquad \mathrm{B}(\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L}) r < \lambda, \qquad \mathrm{C}(\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L}) r < \lambda, \tag{27}$$

λ étant un nombre positif inférieur à l'unité; le nombre r étant ainsi choisi, nous aurons dans le rectangle R', de côtés r et $r\alpha$, les nouvelles inégalités

$$|z_n - z_{n-1}| < \lambda \mathrm{T}, \qquad |p_n - p_{n-1}| < \lambda \mathrm{T}, \qquad |q_n - q_{n-1}| < \lambda \mathrm{T}, \tag{28}$$

de même forme que les inégalités (25) où T est remplacé par λT.

Cela étant, soit $\mathfrak{M}$ le plus grand des trois nombres Z, P, Q. On a d'abord, dans le domaine considéré,

$$|z_1 - z_0| < \mathfrak{M}, \qquad |p_1 - p_0| < \mathfrak{M}, \qquad |q_1 - q_0| < \mathfrak{M},$$

puis

$$|z_2 - z_1| < \mathfrak{M}\lambda, \qquad |p_2 - p_1| < \mathfrak{M}\lambda, \qquad |q_2 - q_1| < \mathfrak{M}\lambda,$$

et d'une manière générale

$$|z_n - z_{n-1}| < \mathfrak{M}\lambda^{n-1}, \qquad |p_n - p_{n-1}| < \mathfrak{M}\lambda^{n-1}, \qquad |q_n - q_{n-1}| < \mathfrak{M}\lambda^{n-1}.$$

Les trois séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n - z_{n-1}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(p_n - p_{n-1}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(q_n - q_{n-1})$$

sont donc uniformément convergentes dans le rectangle R'; $\omega(x, y)$ étant la somme de la première, les sommes des deux autres sont respectivement $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial\omega}{\partial y}$. En d'autres termes, lorsque le nombre n augmente indéfiniment, les trois fonctions z_n, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ tendent respectivement vers $\omega(x, y)$, $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$. La démonstration prouve aussi que les dérivées $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ sont continues dans le rectangle R'.

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial^2(z_n - z_{n-1})}{\partial x\,\partial y}$$

est aussi uniformément convergente. Nous avons, en effet, d'après la façon dont on a choisi r,

$$\left|\frac{\partial^2(z_n - z_{n-1})}{\partial x\,\partial y}\right| < (\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L})\mathfrak{M}\lambda^{n-2};$$

il s'ensuit que $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y}$ a aussi pour limite la dérivée $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}$ lorsque n croît indéfiniment. Cela étant, imaginons que dans la relation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right)$$

le nombre n augmente indéfiniment; la fonction f étant continue, il vient à la limite

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}\right). \tag{29}$$

D'ailleurs, il est clair que la fonction $\omega(x, y)$ est nulle le long des droites $y = x$ et $y = \alpha x$, dans le rectangle R'. Cette fonction $\omega(x, y)$ est donc une intégrale de l'équation proposée, continue dans le rectangle R', et satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé.

7. Il n'existe pas d'autre intégrale que celle-là satisfaisant aux mêmes conditions. Soit, en effet, $u(x, y)$ une intégrale de l'équation (18), continue ainsi que ses dérivées partielles dans une portion de l'angle xOy, voisine de l'origine, limitée par les axes eux-mêmes, et nulle le long des droites $y = x$ et $y = \alpha x$. Choisissons un nombre $r' \leqq r$ assez petit pour que les fonctions $u(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ soient continues dans le rectangle R'' de dimensions r', $\alpha r'$, et que l'on ait dans ce rectangle

$$|u| < Z, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < P, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < Q,$$

ce qui est toujours possible, puisque les trois fonctions $u(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ doivent être nulles à l'origine. En partant de la relation

$$\frac{\partial^2(u - z_n)}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) - f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}),$$

et en raisonnant comme au paragraphe précédent, on en conclut de proche en proche les inégalités

$$|u - z_n| < \mathfrak{M}\lambda^n, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x} - p_n\right| < \mathfrak{M}\lambda^n, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y} - q_n\right| \mathfrak{M}\lambda^n;$$

la différence $u - z_n$ tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et la fonction $u(x, y)$ est identique à $\omega(x, y)$ dans le rectangle R''.

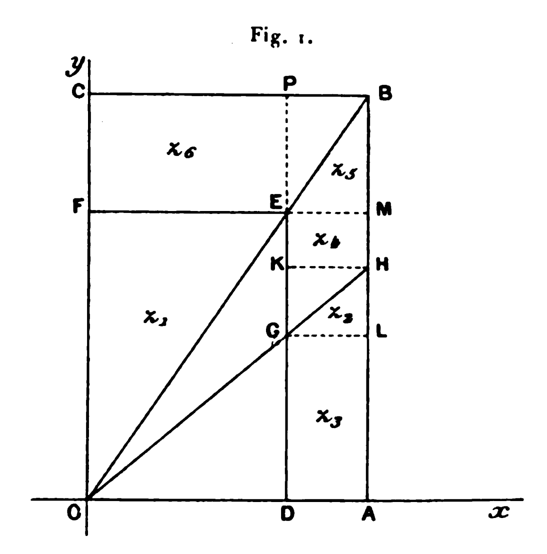
La limite que nous avons obtenue pour le nombre r est, en général, beaucoup trop faible, et l'intégrale cherchée existe dans un domaine plus étendu. Un cas particulier intéressant est celui où la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue pour tous les systèmes de valeurs de z, p, q, pourvu que x et y restent compris respectivement entre 0 et a et 0 et $a\alpha$; on n'a pas alors à se préoccuper des conditions (22), et le nombre r doit vérifier seulement les inégalités (27). C'est ce qui arrive en particulier lorsque la fonction f est linéaire en z, p, q. On peut même, dans ce cas, démontrer l'existence de la fonction intégrale dans un champ beaucoup plus étendu. Considérons l'équation

$$(30) \qquad s = ap + bq + cz + g,$$

a, b, c, g étant des fonctions des variables x, y, continues dans le rectangle OABC,

ayant pour diagonale OB la droite $y = \alpha x$, et soient $OA = l$, $OC = l\alpha$ les deux côtés (*fig.* 1). La méthode générale prouve que l'équation (30) admet une inté-

Fig. 1.



grale $z_1 = \varphi(x, y)$, continue dans le rectangle ODEF, homothétique au premier, et s'annulant le long de la diagonale OE et le long du segment OG de la bissectrice de l'angle xOy. On peut prolonger cette intégrale dans la portion du rectangle OABC qui est extérieure au rectangle ODEF. Il suffit, pour cela, de s'appuyer sur les remarques suivantes.

Soit $z = F(x, y)$ une intégrale d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z, p, q),$$

continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, le long d'une portion de caractéristique. Supposons, par exemple, pour fixer les idées, que, pour $x = x_0$, et y compris entre deux limites y_0, y_1, la fonction $F(x_0, y)$ coïncide avec une fonction déterminée de y, soit $\psi(y)$. La dérivée partielle

$$q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

est connue par là même lorsque y varie de y_0 à y_1. Quant à la dérivée partielle

$$p = \frac{\partial F}{\partial x},$$

elle satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dy} = f\big(x_0, y, F(x_0, y), p, F'_y(x_0, y)\big);$$

il suffira donc de connaître la valeur de p en un point de la caractéristique pour qu'elle soit déterminée en tous les points de cette caractéristique. Nous voyons par là que, *si deux surfaces intégrales, représentées par les équations*

$$z = F(x, y), \qquad z' = \Phi(x, y),$$

ont une portion de caractéristique commune, et si elles se raccordent en un point de cette caractéristique, elles se raccordent tout le long de la portion de caractéristique commune.

Cela posé, soit H le point où la bissectrice de l'angle xOy rencontre le côté AB du rectangle extérieur; soit KH la parallèle à l'axe Ox. Nous supposerons, comme c'est le cas de la figure, que cette parallèle rencontre le côté DE du rectangle intérieur en un point K compris entre G et E. Les fonctions a, b, c, g étant continues dans le rectangle GLHK, il existe une intégrale de l'équation linéaire (30), continue ainsi que ses dérivées partielles dans ce rectangle, s'annulant le long de GH, et prenant le long de GK la même valeur que l'intégrale $z_1 = \varphi(x, y)$ qui est supposée définie dans le rectangle intérieur ODEF et sur son contour. Soit z_2 la nouvelle intégrale ainsi définie dans le rectangle GLHK; les deux intégrales z_1 et z_2 se raccordent au point G, puisqu'elles sont nulles l'une et l'autre quand on se déplace suivant la bissectrice OGH. Donc elles se raccordent tout le long de GK et en particulier au point K.

Dans le rectangle ALGD il existe de même une intégrale z_3, continue ainsi que ses dérivées, coïncidant avec z_1 le long de DG et avec z_2 le long de GL. Les trois intégrales z_1, z_2, z_3 se raccordent au point G; donc z_1 et z_3 se raccordent le long de GD, et z_2 et z_3 se raccordent le long de GL. Dans le rectangle EKHM, on a de même une intégrale z_4, continue ainsi que ses dérivées, se raccordant avec z_1 le long de EK et avec z_2 le long de KH.

Dans le rectangle EMBP il existe aussi une intégrale z_5, continue ainsi que ses dérivées, nulle le long de la diagonale EB et prenant la même suite de valeurs que z_4 le long de EM. Les deux intégrales z_1 et z_4 se raccordant au point E, leur plan tangent commun renferme la bissectrice OB; il s'ensuit que les intégrales z_4 et z_5 se raccordent aussi au point E et, par suite, tout le long de EM. Enfin, dans le dernier rectangle EPCF, nous avons de même une intégrale z_6, continue ainsi que ses dérivées, se raccordant avec z_1 le long de EF et avec z_5 le long de PE. Nous avons ainsi, dans chacun des six rectangles partiels que forme le rectangle complet OABC, une intégrale $z_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, et en un point commun au contour de deux de ces rectangles les intégrales se raccordent toujours. L'ensemble de ces six intégrales z_i forme donc une intégrale, qui est continue, ainsi que ses dérivées

partielles du premier ordre, dans tout le rectangle OABC. D'après la façon dont elle a été obtenue, cette intégrale est nulle le long des droites OH et OB.

On raisonnerait d'une façon analogue si la parallèle menée par H à l'axe Ox coupait la droite DE au-dessus du point E. Il suffirait d'employer un ou plusieurs rectangles intermédiaires, homothétiques au rectangle OABC et compris entre OABC et ODEF.

Le même procédé de prolongement par raccordements successifs s'appliquerait aussi à l'intégrale de l'équation non linéaire $s = f(x, y, z, p, q)$, qui s'annule pour $y = x$ et pour $y = \alpha x$, mais on ne peut assigner à l'avance l'étendue du domaine où cette intégrale est continue, sauf dans des cas particuliers analogues à celui que nous venons de traiter.

8. Le résultat obtenu paraît très particulier, mais il est facile de le généraliser. On a d'abord une généralisation immédiate en se proposant de déterminer une intégrale continue dans un rectangle ayant un de ses sommets à l'origine, un second sommet A sur Ox, un troisième sommet B sur Oy, et se réduisant pour $y = mx$ à une fonction donnée $\varphi(x)$, et pour $y = m_1 x$ à une autre fonction donnée $\varphi_1(x)$, en supposant, bien entendu, $\varphi(0) = \varphi_1(0)$. Les coefficients m et m_1 sont supposés positifs, et les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont supposées continues, ainsi que $\varphi'(x)$ et $\varphi'_1(x)$ lorsque x varie de 0 à un nombre positif a. Il suffit (en supposant $m_1 > m$) de poser $mx = x'$, puis

$$z = Z + \varphi\left(\frac{y - \frac{m_1}{m} x'}{m - m_1}\right) + \varphi_1\left(\frac{y - x'}{m_1 - m}\right) - \varphi(0)$$

pour être ramené au problème déjà traité. La fonction Z doit satisfaire à une équation de même forme, et s'annuler le long des droites $y = x'$, et $y = \frac{m_1}{m} x'$ dans le voisinage de l'origine.

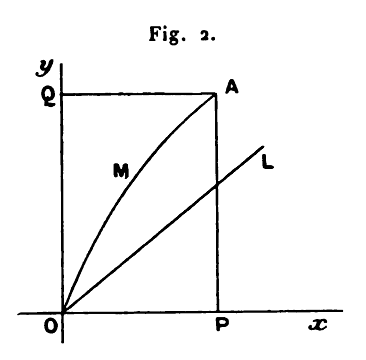
Nous allons maintenant passer à un problème plus général, en supposant que l'on se donne les valeurs de la fonction intégrale le long de deux courbes issues de l'origine. Nous examinerons d'abord le cas où l'une des courbes est la bissectrice elle-même de l'angle xOy, l'autre courbe OMA étant située tout entière au-dessus d'une droite $y = \alpha x$, α étant un coefficient supérieur à un. Cette condition exige que l'arc OMA ne soit pas tangent à l'origine à la bissectrice OL et ne rencontre pas cette bissectrice, sauf à l'origine. Soit

$$y = \varpi(x) \tag{31}$$

l'équation de l'arc OMA; la fonction $\varpi(x)$ est supposée continue et croissante lorsque x croît de 0 à a (*fig.* 2).

Nous supposerons de même que la dérivée $\varpi'(x)$ est continue dans l'intervalle (o, a), sauf peut-être à l'origine (ce qui arrivera si l'arc de courbe OMA

Fig. 2.



est tangent à l'axe Oy), et que cette dérivée $\varpi'(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (o, a), ce qui aurait lieu s'il y avait sur OMA un point d'inflexion avec une tangente parallèle à Ox. Dans ces conditions, la fonction inverse

$$x = \varpi^{-1}(y)$$

est une fonction continue de la variable y dans l'intervalle (o, b), b étant l'ordonnée du point A. En désignant toujours la variable indépendante par la lettre x, nous voyons que la fonction $\varpi^{-1}(x)$ est continue et positive dans l'intervalle (o, b); elle croît de o à a lorsque x croît de o à b. La dérivée

$$\frac{d}{dx}\{\varpi^{-1}(x)\} = \xi(x)$$

est elle-même continue dans l'intervalle (o, b). On a, en outre, les inégalités

$$\varpi(x) > \alpha x, \qquad \varpi^{-1}(x) < \frac{x}{\alpha},$$

dont la première s'applique à toutes les valeurs de x dans l'intervalle (o, a), et la seconde à toutes les valeurs positives de x inférieures à b.

Nous poserons encore

$$\varpi^{-2}(x) = \varpi^{-1}(\varpi^{-1}(x)),$$
$$\varpi^{-3}(x) = \varpi^{-1}(\varpi^{-2}(x)),$$

et, d'une manière générale,

$$\varpi^{-n}(x) = \varpi^{-1}(\varpi^{-(n-1)}(x));$$

en raisonnant de proche en proche, on voit aisément que toutes ces fonc-

tions $\varpi^{-n}(x)$ sont continues et admettent une dérivée première continue dans l'intervalle (o, b). On a, de plus,

$$\varpi^{-2}(x) < \frac{\varpi^{-1}(x)}{\alpha} < \frac{x}{\alpha^2}$$

et, en général,

$$\varpi^{-n}(x) < \frac{x}{\alpha^n}. \tag{32}$$

Il est facile d'avoir une limite supérieure de la valeur absolue de la dérivée

$$\frac{d\varpi^{-n}(x)}{dx}.$$

Nous avons, en effet,

$$\frac{d}{dx}[\varpi^{-n}(x)] = \frac{d}{dx}[\varpi^{-1}\{\varpi^{-(n-1)}(x)\}] = \xi\big(\varpi^{-(n-1)}(x)\big)\frac{d}{dx}\big(\varpi^{-(n-1)}(x)\big)$$

et par suite

$$\frac{d}{dx}[\varpi^{-n}(x)] = \xi\big(\varpi^{-(n-1)}(x)\big)\,\xi\big(\varpi^{-(n-2)}(x)\big)\ldots\xi\big(\varpi^{-1}(x)\big)\,\xi(x).$$

La dérivée $\xi(x)$ a un certain maximum N lorsque x varie de o à b, et, d'autre part, cette dérivée tend vers une limite que nous pouvons supposer inférieure ou au plus égale à $\frac{1}{\alpha}$, en choisissant convenablement le nombre α, qui n'a pas été complètement précisé jusqu'ici, puisqu'on peut le remplacer par tout autre nombre plus petit supérieur à un. Nous choisirons ce nombre α de telle façon que, pour toute valeur de x inférieure à un nombre $c < b$, on ait

$$\xi(x) \leqq \frac{1}{\alpha}.$$

D'autre part, il ne peut y avoir dans la suite

$$\varpi^{-1}(b),\quad \varpi^{-2}(b),\quad \ldots,\quad \varpi^{-n}(b),\quad \ldots$$

qu'au nombre limité de termes supérieurs à c, puisque l'on a $\varpi^{-n}(b) < \frac{b}{\alpha^n}$. Supposons qu'il y en ait p; il y aura *a fortiori* p termes au plus de la suite

$$\varpi^{-1}(x),\quad \varpi^{-2}(x),\quad \ldots,\quad \varpi^{-n}(x),\quad \ldots$$

supérieurs à c. Cela étant, si $n \leqq p$, on a évidemment

$$\left|\frac{d}{dx}\{\varpi^{-n}(x)\}\right| < \mathrm{N}^n < \mathrm{N}^p;$$

si $n > p$, on a

$$\left| \frac{d}{dx} \{ \varpi^{-n}(x) \} \right| < \mathrm{N}^p \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n-p}.$$

Dans les deux cas, on peut écrire

$$(33) \qquad \left| \frac{d}{dx} \{ \varpi^{-n}(x) \} \right| < \frac{(\mathrm{N}\alpha)^p}{\alpha^n} < \frac{\mu}{\alpha^n},$$

μ étant un nombre positif déterminé qui ne dépend que de la fonction $\varpi(x)$.

9. Cela posé, nous n'avons qu'à suivre absolument la même méthode que dans le cas particulier déjà traité où la fonction $\varpi(x)$ se réduit à αx. Les modifications qu'il faut apporter sont peu importantes, et nous les indiquerons rapidement.

Problème I *bis*. — *Soit* $\pi(x)$ *une fonction définie dans l'intervalle* $(0, a)$. *Déterminer une fonction* $\varphi(x)$ *satisfaisant dans cet intervalle à la relation*

$$(34) \qquad \varphi(\varpi(x)) - \varphi(x) = \pi(x),$$

où $\varpi(x)$ *est la fonction qui a été définie au paragraphe précédent.*

Si l'on admet encore que la fonction $\varphi(x)$ tend vers zéro avec x, cette fonction doit être la limite, pour n infini, de l'expression

$$\pi(\varpi^{-1}(x)) + \pi(\varpi^{-2}(x)) + \ldots + \pi(\varpi^{-n}(x));$$

il faut donc, pour que le problème soit possible, que la série

$$(35) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \pi(\varpi^{-n}(x))$$

soit convergente. Il en est ainsi toutes les fois que la fonction $\pi(x)$ satisfait à une condition de la forme

$$|\pi(x)| < \mathrm{K}x,$$

K étant un nombre positif déterminé. On en déduit, en effet, d'après l'inégalité (32),

$$|\pi(\varpi^{-n}(x))| < \frac{\mathrm{K}x}{\alpha^n},$$

et les différents termes de la série (35) sont inférieurs en valeur absolue aux termes d'une progression géométrique décroissante. Si, de plus, la fonction $\pi(x)$ est continue, il en est de même de la fonction $\varphi(x)$, et l'on trouve pour limite

supérieure de $|\varphi(x)|$ l'expression suivante :

$$|\varphi(x)| < K\frac{x}{\alpha} + K\frac{x}{\alpha^2} + \ldots + K\frac{x}{\alpha^n} + \ldots$$

ou

$$|\varphi(x)| < \frac{Kx}{\alpha - 1},$$

formule toute pareille à la formule (7) du n° 3.

Si la fonction $\pi(x)$ admet elle-même une dérivée $\pi'(x)$ continue dans l'intervalle $(0, a)$ et satisfaisant à la condition de Lipschitz, on a encore, pour toute valeur de x dans cet intervalle,

$$(36) \qquad |\pi'(x)| < K_1 x,$$

K_1 étant un nombre positif convenablement choisi. La dérivée du terme général de la série (35)

$$\frac{d}{dx}\left[\pi\left(\varpi^{-n}(x)\right)\right] = \pi'\left(\varpi^{-n}(x)\right)\frac{d}{dx}\{\varpi^{-n}(x)\}$$

est elle-même continue entre 0 et a, et sa valeur absolue est inférieure, d'après les conditions (32), (33) et (36), à

$$K_1 \varpi^{-n}(x)\frac{\mu}{\alpha^n} = K_1 \mu \frac{x}{\alpha^{2n}}.$$

La fonction $\varphi(x)$ admet donc elle-même une dérivée continue $\varphi'(x)$ dans l'intervalle $(0, a)$ et l'on a

$$|\varphi'(x)| < K_1 \mu x\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2n}} + \ldots\right) = \frac{K_1 \mu x}{\alpha^{2n}},$$

formule qui ne diffère de la formule (8) que par la présence d'un facteur μ, ne dépendant que de la fonction $\varpi(x)$.

Problème II *bis*. — *Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le rectangle R défini par les inégalités*

$$0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq y \leq b,$$

déterminer une intégrale de l'équation

$$(37) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y),$$

continue dans ce rectangle et s'annulant le long de la bissectrice $y = x$, et le long de l'arc OMA représenté par l'équation $y = \varpi(x)$.

Posons, comme plus haut,

$$F(x,y) = \int_0^x du \int_0^y f(u,v)\,dv$$

l'intégrale générale de l'équation (37) est

$$z = F(x,y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ désignant deux fonctions arbitraires que l'on déterminera par les deux conditions

$$F(x,x) + \varphi(x) + \psi(x) = 0,$$
$$F\big(x, \varpi(x)\big) + \varphi(x) + \psi\big(\varpi(x)\big) = 0.$$

On en déduit, par exemple,

$$\psi\big(\varpi(x)\big) - \psi(x) = F(x,x) - F\big(x,\varpi(x)\big) = \pi(x),$$

et la fonction $\psi(x)$ est égale, en supposant $\psi(0)=0$, à la somme de la série

$$\psi(x) = \pi\big(\varpi^{-1}(x)\big) + \pi\big(\varpi^{-2}(x)\big) + \ldots + \pi\big(\varpi^{-n}(x)\big) + \ldots.$$

Si la valeur absolue de $f(x,y)$ dans le rectangle R reste inférieure à M, on a encore

$$|\pi(x)| < Mx\,|\varpi(x) - x| < M(\alpha - 1)x^2$$

et, par suite,

$$|\psi(x)| < M(\alpha-1)\Big\{\big[\varpi^{-1}(x)\big]^2 + \big[\varpi^{-2}(x)\big]^2 + \ldots + \big[\varpi^{-n}(x)\big]^2 + \ldots\Big\},$$

ou enfin, d'après les inégalités (32),

$$(38)\qquad |\psi(x)| < \frac{Mx^2}{\alpha+1},$$

formule identique à la formule (12) du n° 4.

Pour avoir une limite supérieure de $|\psi'(x)|$, remarquons qu'on peut encore écrire la série qui donne $\psi(x)$

$$(39)\qquad \psi(x) = \zeta(x) + \zeta\big(\varpi^{-1}(x)\big) + \ldots + \zeta\big(\varpi^{-n}(x)\big) + \ldots$$

en posant

$$\zeta(x) = \pi\big(\varpi^{-1}(x)\big) = F\big(\varpi^{-1}(x), \varpi^{-1}(x)\big) - F\big(\varpi^{-1}(x), x\big).$$

On en déduit

$$\zeta'(x) = \left[F_1(\varpi^{-1}(x), \varpi^{-1}(x)) + F_2(\varpi^{-1}(x), \varpi^{-1}(x)) - F_1(\varpi^{-1}(x), x)\right] \frac{d\varpi^{-1}(x)}{dx},$$
$$- F_2(\varpi^{-1}(x), x),$$

$F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ désignant les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $F(x, y)$. Mais on a

$$\left| F_1(\varpi^{-1}(x), \varpi^{-1}(x)) - F_1(\varpi^{-1}(x), x) \right| < M|\varpi^{-1}(x) - x| < M\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)x$$

et, par suite,

$$|\zeta'(x)| < \frac{\mu}{\alpha}\left\{M\frac{(\alpha-1)}{\alpha}x + M\frac{x}{\alpha}\right\} + Mx = Mx\frac{\mu+\alpha}{\alpha}.$$

La dérivée du terme général de la série $\psi(x)$, ou

$$\zeta'\left[\varpi^{-n}(x)\right] \frac{d}{dx}(\varpi^{-n}(x))$$

est moindre en valeur absolue, d'après cela, que le produit

$$M\frac{\mu+\alpha}{\alpha}\frac{x}{\alpha^n}\frac{\mu}{\alpha^n} = M\frac{\mu(\mu+\alpha)}{\alpha^{2n+1}}x.$$

On en déduit que la série des dérivées est uniformément convergente et que l'on a

$$(40) \qquad |\psi'(x)| < M\frac{\mu+\alpha}{\alpha}\left\{1 + \frac{\mu}{\alpha^2 - 1}\right\}x.$$

On trouverait de même des limites pour $|\varphi(x)|$ et $|\varphi'(x)|$, et par suite pour $|z|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$. D'une façon générale, dans un rectangle homothétique au rectangle R relativement à l'origine et de dimensions r et $r\alpha$ (r étant un nombre positif inférieur à a), on a des inégalités de la forme (16)

$$|z| < AMr^2, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < BMr, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < CMr,$$

A, B, C étant des constantes positives dont il est inutile de donner l'expression, et qui ne dépendent que de la fonction $\varpi(x)$.

La démonstration du n° 6 s'applique maintenant sans modification, et l'on en conclut que l'équation (18) admet une intégrale continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans un rectangle homothétique au rectangle donné R

par rapport à l'origine (le rapport d'homothétie étant suffisamment petit) et s'annulant sur la bissectrice et sur l'arc de courbe OMA.

Plus généralement, on peut se proposer de déterminer une intégrale, connaissant les valeurs qu'elle prend le long de la bissectrice et le long de l'arc de courbe OMA. Pour fixer les idées, supposons que l'intégrale cherchée doive se réduire à une fonction donnée $F(x)$ quand on y remplace y par x, et à une autre fonction donnée $\Phi(x)$ quand on y remplace y par $\varpi(x)$. Il est clair que l'on doit avoir $F(o) = \Phi(o)$, et il est permis, sans restreindre la généralité, de supposer $F(o) = \Phi(o) = o$. Nous supposerons de plus que les fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$ admettent des dérivées du premier ordre continues lorsque x varie de o à a. Pour ramener ce problème au précédent, on peut procéder de la façon suivante. Formons d'abord une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = o,$$

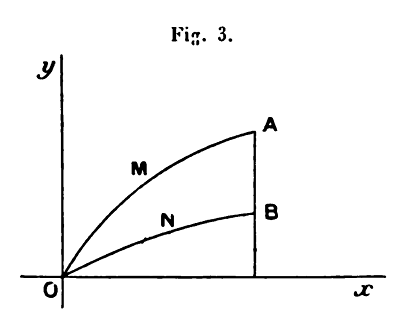
satisfaisant à ces conditions; il suffit, comme on vient de le voir, de déterminer deux fonctions φ et ψ satisfaisant aux deux relations

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(x) \quad\quad &= F(x), \\ \varphi(x) + \psi\big(\varpi(x)\big) &= \Phi(x). \end{aligned}$$

Soit $Z = \varphi(x) + \psi(y)$ la fonction ainsi obtenue. Il suffira de poser $z = Z + u$ pour être ramené au problème précédent.

10. Arrivons enfin au cas où l'on se donne les valeurs de l'intégrale le long de deux arcs de courbe OMA, ONB partant de l'origine (*fig.* 3), et situés dans

Fig. 3.



l'angle xOy. Soient $y = \varpi(x)$ l'équation de OMA, $y = \varpi_1(x)$ l'équation de ONB. Nous supposerons que ces deux fonctions $\varpi(x)$, $\varpi_1(x)$ satisfont aux mêmes conditions que la fonction $\varpi(x)$ considérée dans les derniers paragraphes, et de plus qu'il existe un nombre $\alpha > 1$, tel que l'on ait $\varpi(x) \geqq \alpha\varpi_1(x)$ pour toute valeur

de x comprise dans un intervalle $(0, a)$, où $a > 0$; ce qui exige que les deux arcs de courbe OMA et ONB ne soient pas tangents en O et n'aient pas d'autres points communs que l'origine. Enfin nous supposerons que l'arc ONB n'est pas tangent à l'origine à l'axe Ox. La dérivée $\varpi_1'(x)$, qui est supposée continue entre 0 et a, ne s'annule pas dans cet intervalle. Il en résulte que si l'on pose

$$\varpi_1(x) = \mathrm{X}, \tag{41}$$

x sera inversement une fonction continue, admettant une dérivée continue, de la variable X, dans l'intervalle $\big(0, \varpi_1(a)\big)$. Soit

$$x = \varpi_1^{-1}(\mathrm{X})$$

cette fonction inverse. La fonction

$$\chi(\mathrm{X}) = \varpi\big(\varpi_1^{-1}(\mathrm{X})\big)$$

obtenue par la substitution dans $\varpi(x)$ est une fonction de la nouvelle variable X satisfaisant aux mêmes conditions dans l'intervalle $\big(0, \varpi_1(a)\big)$ que la fonction $\varpi(x)$ de x; en particulier, on aura

$$\chi(\mathrm{X}) > \alpha \mathrm{X}.$$

Si donc l'on prend X pour nouvelle variable indépendante à la place de x, toute équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z, p, q)$$

conserve la même forme et les deux courbes OMA, ONB sont remplacées respectivement d'une part par la ligne droite $y = \mathrm{X}$, d'autre part par un arc de courbe $y = \chi(\mathrm{X})$. Nous retrouvons encore le cas qui vient d'être traité.

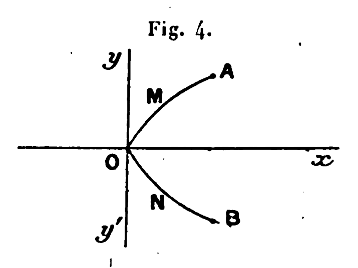
L'intégrale dont on vient ainsi de démontrer l'existence dans un petit rectangle ayant un sommet à l'origine peut, en général, être prolongée dans un domaine plus étendu par des raccordements successifs, comme on l'a déjà expliqué en détail lorsque les courbes sont des lignes droites.

11. Nous avons supposé jusqu'ici que les deux arcs de courbe OMA et ONB étaient situés dans le même des quatre angles formés par les caractéristiques issues du point O. Lorsque ces deux arcs sont situés dans des angles différents, il ne suffit pas de se donner les valeurs d'une intégrale le long de OMA et le long de ONB pour que cette intégrale soit déterminée.

Supposons d'abord que les arcs OMA et ONB sont situés dans deux angles adjacents (*fig.* 4).

Une intégrale de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ est déterminée dans l'angle $x\mathrm{O}y$ (ou du moins dans un rectangle de dimensions suffisamment petites ayant un sommet en O et les côtés issus de O dirigés suivant $\mathrm{O}x$ et $\mathrm{O}y$), si l'on se donne

Fig. 4.



les valeurs de l'intégrale le long de l'arc OMA, et si on l'assujettit en outre à se réduire à une fonction donnée $\pi(x)$ le long de $\mathrm{O}x$; soit z_1 l'intégrale ainsi obtenue, qui n'est définie par les conditions précédentes que dans l'angle $x\mathrm{O}y$.

Il existe de même une intégrale z_2, qui est définie dans un rectangle placé dans $x\mathrm{O}y'$, prenant les valeurs données le long de ONB et se réduisant pour $y = 0$ à la fonction $\pi(x)$. Si l'on choisit la fonction arbitraire $\pi(x)$ de façon que ces deux intégrales z_1 et z_2 se raccordent à l'origine, ce que l'on peut faire d'une infinité de façons, elles se raccordent tout le long de $\mathrm{O}x$, et leur ensemble constitue une intégrale répondant à la question.

Pour achever de déterminer le problème, on peut compléter les conditions aux limites, en se donnant les données de Cauchy sur l'un des arcs, OMA par exemple, et les valeurs de l'intégrale le long de ONB. On est ainsi conduit à un *problème mixte,* qui a été étudié récemment par M. Hadamard dans le cas des équations linéaires (*Bulletin de la Société mathématique,* t. XXXI). Enfin, lorsque les deux courbes OMA, ONB sont dans deux angles opposés par le sommet, il est clair que l'on peut prendre arbitrairement les données de Cauchy sur chacun des arcs, pourvu que les intégrales obtenues se raccordent à l'origine.

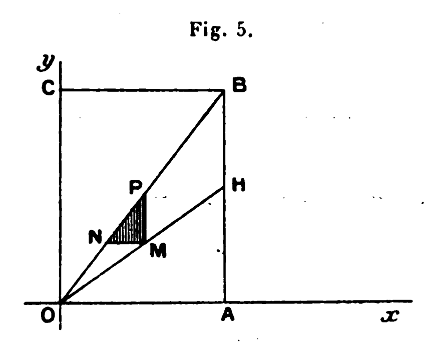
12. Dans le cas particulier de l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0, \tag{42}$$

le problème auquel ce travail est consacré peut se ramener au problème de Cauchy en résolvant d'abord un problème d'inversion d'intégrales définies. Pour fixer les idées, reprenons l'hypothèse primitive, et supposons que l'on veuille obtenir une intégrale se réduisant à $f(x)$ le long de la droite $y = x$ et à $\varphi(x)$ le long de la droite $y = \alpha x (\alpha > 1)$. Les coefficients a, b, c sont supposés réguliers dans le rectangle OABC (*fig.* 5) de dimensions $\mathrm{OA} = \mathrm{R}$, $\mathrm{AB} = \mathrm{R}\alpha$, et les fonctions $f(x)$,

$\varphi(x)$ sont continues et admettent des dérivées continues $f'(x)$, $\varphi'(x)$ dans l'intervalle $(0, R)$. Soit M un point de la bissectrice OH de coordonnées (x_0, x_0); la parallèle MP à l'axe Oy rencontre la droite OB en un point P de coordonnées

Fig. 5.



$(x_0, \alpha x_0)$, et la parallèle MN à l'axe Ox rencontre de même la droite OB en un point P de coordonnées $\frac{x_0}{\alpha}$ et x_0. Désignons par $u(x, y; x_0, y_0)$ l'intégrale de l'équation adjointe qui intervient dans la méthode de Riemann ([1]). L'application de la relation fondamentale

$$\int_{(S)} (\mathrm{M}\,dy - \mathrm{N}\,dx) = 0,$$

où

$$\mathrm{M} = auz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\mathrm{N} = buz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

et où z désigne l'intégrale cherchée, au contour du triangle MNP donne

$$(uz)_\mathrm{M} = \frac{(uz)_\mathrm{N} + (uz)_\mathrm{P}}{2} + \int_{(\mathrm{NP})} \mathrm{N}\,dx - \mathrm{M}\,dy. \tag{43}$$

Dans cette égalité on doit remplacer y_0 par x_0 dans la fonction $u(x, y; x_0, y_0)$, et tous les termes en dehors du signe $\int$ sont connus d'après les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction z. Il en est de même des intégrales définies qui ne renferment ni $\frac{\partial z}{\partial x}$, ni $\frac{\partial z}{\partial y}$, et le seul terme qui ne soit pas connu d'après les données est

$$\frac{1}{2}\int_{(\mathrm{NP})} u\left(\frac{\partial z}{\partial y}dx - \frac{\partial z}{\partial x}dy\right).$$

([1]) Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 70-80.

Si l'on parvenait à déterminer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et de $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long de la droite OB, on serait ramené au problème de Cauchy. Entre ces deux dérivées on a d'abord la relation

$$\varphi'(x) = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y};$$

la relation (43) nous fournit une autre relation de la forme

$$\int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{x_0} u(x, \alpha x; x_0, x_0) \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} - \alpha \frac{\partial z}{\partial x} \right\} dx = \mathrm{F}(x_0),$$

le second membre étant une fonction de x_0 dont la connaissance résulte de celle des données. On déduit de ces deux conditions

$$(1 + \alpha^2) \int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{x_0} u(x, \alpha x; x_0, x_0) \frac{\partial z}{\partial y} dx$$
$$= \mathrm{F}(x_0) + \alpha \int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{x_0} u(x, \alpha x; x_0, x_0)\, \varphi'(x)\, dx = \Phi(x_0).$$

On obtiendra donc $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long de OB en effectuant l'inversion de l'intégrale définie

$$\int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{x_0} u(x, \alpha x; x_0, x_0)\, \psi(x)\, dx,$$

c'est-à-dire en déterminant la fonction $\psi(x)$, de façon que cette intégrale définie soit égale à une fonction connue de x_0. Nous renverrons pour ce problème aux travaux de M. Volterra (¹).

(¹) *Atti della R. Accademia di Torino*, 1896. — *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1896. — *Voir* aussi deux Notes de M. Burgatti, dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1903.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

SUR

LES CLAPETS ÉLECTROLYTIQUES,

PAR M. ALBERT NODON.

Un clapet ou soupape électrique est un organe qui est susceptible d'interrompre le courant électrique dans une direction déterminée et de le laisser circuler librement dans une direction inverse.

Les clapets électrolytiques comportent une anode métallique de surface plus faible que la cathode, qui est constituée par un métal résistant à l'attaque chimique ou par du graphite. Les électrodes sont plongées dans un électrolyte généralement constitué par une dissolution saline.

Historique. — Buff découvrit en 1856 la propriété que possède l'aluminium, plongé dans une solution saline, d'arrêter le courant dans un sens et de le laisser circuler librement dans le sens opposé. Cette propriété fut utilisée par M. Ducretet en 1874 pour redresser le courant alternatif.

Une série de recherches furent poursuivies dans ce sens par MM. Pollack, Léo Gratz et Carl Liebenow, en modifiant la nature des solutions salines et le dispositif de montage de l'appareil. En 1899 nous reprîmes les essais antérieurs et nous fîmes une série de recherches sur ce sujet, jusqu'en juillet 1903.

Ces recherches nous ont amené à l'établissement d'un modèle définitif de *soupape électrique,* utilisé aujourd'hui couramment. Nous allons exposer rapidement les résultats de ces recherches.

Effet clapet. — L'effet clapet est un effet d'ordre général, qui peut être réalisé à l'aide d'un métal de nature quelconque, plongé dans un électrolyte et soumis à une différence de potentiel déterminée. L'effet clapet consiste à produire l'interruption d'un courant électrique dans une direction déterminée, au sein d'un électrolyte, et à rétablir la circulation du courant dans une direction inverse de ce courant.

Les phénomènes de *couches doubles* sont des effets clapets produits sous une différence de potentiel inférieure à un volt.

Phénomènes d'ionisation électrolytique présidant à l'effet clapet. — Par la mesure des capacités électrostatiques des clapets agissant comme condensateurs, on constate que le diélectrique qui entoure le métal en le séparant de l'électrolyte a une épaisseur de l'ordre de grandeur des molécules.

On constate, en outre, que la valeur de la charge électrique est fonction inverse du poids moléculaire du métal formant clapet.

Le pouvoir inducteur spécifique des oxydes métalliques paraissant croître en raison inverse du poids moléculaire des métaux correspondants, on peut admettre que l'ionisation a pour effet de former une couche d'oxyde d'épaisseur moléculaire à la surface de l'anode, et que les oxydes à poids moléculaire faible, tels que ceux de magnésium et d'aluminium, permettent de réaliser l'effet clapet sous une différence de potentiel plus élevée que les oxydes à poids moléculaire élevé, tels que ceux de mercure et de plomb. Dans ce dernier cas on obtient l'effet *couche double.*

Les métaux qui permettront de réaliser l'effet clapet de la façon la plus parfaite seront ceux qui ont le plus faible poids atomique, et qui pourront donner naissance à des oxydes insolubles. Les deux métaux réalisant le plus complètement ces deux conditions sont le *magnésium* et l'*aluminium.*

Cathode. — Dans les clapets électrolytiques, la cathode joue, en principe, un rôle secondaire. Elle doit être de nature telle, que les produits secondaires de la réaction électrolytique ne lui fassent subir aucune attaque chimique ni aucune modification physique nuisible. Sa surface doit être sensiblement plus étendue que celle de l'anode, afin que la densité de courant par unité de surface y soit toujours faible, et que les causes de destruction précédentes y soient réduites au minimum. Le plomb pur et l'acier poli réalisent le mieux ces conditions; mais on peut également utiliser comme cathodes : le graphite dur ou des alliages d'aluminium à forte teneur en cuivre ou en nickel.

Densité du courant à l'anode. — Pour un métal anode déterminé, qui est plongé dans un électrolyte à température fixe et qui est soumis à une différence de potentiel déterminée, la grandeur de la charge qu'il est susceptible d'acquérir pendant l'unité de temps, sous l'influence de l'effet clapet, est fonction de la densité de courant par unité de surface. Cet effet dépend également de la surface effective de l'anode, et enfin du rapport entre les surfaces de l'anode et de la cathode.

On constate généralement une différence de potentiel de l'ordre du volt entre les deux électrodes.

L'épaisseur de la couche du diélectrique est fonction, dans de certaines limites, de la densité de courant et de la durée de la charge.

Lorsque la durée de la charge n'excède pas $\frac{1}{40}$ à $\frac{1}{50}$ de seconde, comme dans le cas des courants alternatifs industriels, la surface active de l'anode doit être de l'ordre du centimètre pour un débit moyen de 1 ampère, sous une différence de potentiel moyenne de 100 volts, afin d'obtenir l'effet clapet maximum. La composition de l'alliage d'aluminium joue également un rôle important dans le phénomène. Par exemple, en se plaçant dans des conditions expérimentales semblables aux précédentes, une anode constituée par un alliage de 97 pour 100 d'aluminium pur et de 3 pour 100 de cuivre devra avoir une surface active 100 fois plus faible environ qu'une anode en aluminium pur pour fournir un effet clapet équivalent.

Électrolyte. — En principe, la nature de l'électrolyte ne joue, comme la cathode, qu'un rôle secondaire dans l'effet clapet; de l'eau ordinaire permet de réaliser un clapet avec de l'aluminium et du plomb.

Mais, en pratique, le choix de cet électrolyte a une grande importance, par suite de la nature des produits secondaires que fournit l'action électrolytique. Avec le *magnésium,* les meilleurs résultats sont obtenus à l'aide d'une dissolution saturée de *fluorures alcalins,* par suite de l'insolubilité du fluorure de magnésium et de la magnésie dans les fluorures alcalins. Avec l'*aluminium* ou avec ses alliages, on réalise les clapets les plus parfaits avec le *phosphate neutre d'ammonium,* par suite de l'insolubilité de l'alumine et du phosphate d'aluminium dans cette dissolution et dans l'ammoniaque. Les sels correspondants de potassium ou de sodium favorisent au contraire la dissolution de la pellicule isolante à la surface de l'aluminium, par suite de la production secondaire de potasse et de soude pendant l'électrolyse.

Nous avons résumé, dans le tableau ci-dessous, le résultat d'essais comparatifs effectués avec des métaux et des sels divers.

Les anodes en aluminium, magnésium, cadmium, bismuth, antimoine, étaient constituées par de petits barreaux prismatiques de surfaces égales. Les cathodes étaient constituées par des lames de graphite.

Les mesures étaient effectuées à l'aide d'un ampèremètre continu Carpentier, d'un ampèremètre thermique Chauvin et Arnoux, et d'un électrodynamomètre Siemens.

Les forces électromotrices étaient mesurées à l'aide d'un voltmètre continu Carpentier, d'un voltmètre thermique Chauvin et Arnoux, et d'un voltmètre alternatif réglé pour la période du courant. Les faibles forces électromotrices étaient effectuées à l'aide d'un galvanomètre apériodique de Desprez-d'Arsonval.

Le courant était fourni par une batterie d'accumulateurs.

Dans ce Tableau, nous désignerons par

S la solution saturée à froid;
M le métal de l'anode;
U la force électromotrice en volts entre les deux électrodes du clapet disposées en circuit sur le voltmètre;
U' la différence de potentiel du clapet à l'instant où se fait le changement de signe du courant continu à l'aide d'une clé d'inversion;
I' l'intensité du courant de fuite dans le clapet, du métal vers le graphite;
I l'intensité du courant direct, du graphite vers le métal utilisé comme cathode.

S.	M.	U.	U'.	I'.	I.
		volts	volts	ampères	ampères
Fluorure de potassium............	Aluminium	85	20	2,9	3,7
»	Cadmium	85	17	4,0	4,0
»	Bismuth	85	16	4,0	4,1
»	Antimoine	85	16	4,0	4,1
Fluorure d'ammonium............	Magnésium	16	19	0,1	3,9
»	Aluminium	25	24	0,1	3,8
Fluosilicate d'ammonium	Aluminium	54	3	1,2	3,4
»	Magnésium	54	3	1,2	3,4
»	Bismuth	Ne forme pas clapet.			
Carbonate d'ammonium...........	Aluminium	15	42	0	3,8
»	Bismuth	64	20	0,10	
»	Antimoine	64	20	0,10	
»	Magnésium	Ne forme pas clapet.			
Oxalate d'ammonium.............	Aluminium	4	56	0	1,7
»	Bismuth	45		0,2	2,65
»	Antimoine	75		0,5	
»	Cadmium	68		0,2	
Phosphate d'ammonium	Aluminium	4	50	0	2,11
»	Bismuth	20	38	0,1	2,85
»	Antimoine	Ne forment pas clapets.			
»	Cadmium				
»	Magnésium				
Phosphate double d'ammonium et	Aluminium				
de potassium..................	Aluminium	8	25	0	3,25
Phosphate de potassium		Attaque les anodes.			

De l'examen de ce Tableau ressortent les faits suivants :

1° Le magnésium, le cadmium, le bismuth et l'antimoine ne donnent pas l'effet clapet d'une façon complète.

2° Les sels à base de potassium et de sodium produisent une attaque des anodes; avec l'aluminium, on constate un précipité d'alumine au fond de l'électrolyte.

phate double de potassium et d'ammonium, de carbonate d'ammonium, de phosphate d'ammonium, sont d'un même ordre de grandeur, variable de 6 à 9 ohms-centimètres;

2° Le plomb donne une résistance propre de 2 ohms-centimètres, due à la formation d'une légère couche de peroxyde de plomb à sa surface;

3° La résistance qui se manifeste entre l'aluminium et la cathode passive au moment du retournement du clapet est trois fois plus élevée environ que celle de l'électrolyte. La résistance augmente après une certaine durée de fonctionnement du clapet; elle provient de la présence constante d'une gaine légère d'alumine qui subsiste autour de l'anode. La résistivité propre de l'électrolyte devient alors pratiquement négligeable par rapport à celle produite à l'anode;

4° La résistance de plusieurs clapets reliés en tension est proportionnelle au nombre de ces clapets.

Hystérésis électrolytique. — On peut désigner sous le nom d'*hystérésis électrolytique,* le retard qui se produit dans le phénomène de destruction du diélectrique à la surface du métal actif du clapet quand celui-ci est utilisé comme cathode après avoir été employé, immédiatement avant, comme anode. La valeur de l'hystérésis est donnée par le rapport des temps mis pour la formation et pour la destruction du clapet. L'étude de cette question amène aux conclusions suivantes :

1° Une valeur de l'hystérésis, sensiblement plus grande que l'unité, rend le clapet impraticable pour le redressement du courant alternatif;

2° Une valeur de l'hystérésis, plus petite que l'unité, rend le clapet d'autant plus parfait qu'elle est plus faible.

C'est le magnésium combiné avec le fluorure d'ammonium qui donne la plus faible valeur d'hystérésis.

Pour l'aluminium, l'hystérésis a sa plus faible valeur avec le phosphate d'ammonium.

Étude micrographique de l'anode d'aluminium. — Si l'on examine avec un microscope la surface de l'anode d'aluminium d'un clapet disposé d'une façon appropriée, on ne constate aucune modification appréciable de l'état de la surface pendant le fonctionnement du clapet. La production de la couche diélectrique passe donc inaperçue, et ce fait permet de supposer que l'épaisseur de cette couche est d'un ordre extrêmement faible.

Capacité électrostatique des clapets. — L'aluminium et l'électrolyte forment les armatures d'un condensateur dont le diélectrique est constitué par la pellicule

d'alumine qui se forme à la surface de l'aluminium, quand ce métal est utilisé comme anode.

La capacité de ce condensateur peut varier dans le rapport de 1 à 1000 environ, suivant la densité de courant par unité de surface, la durée de fermeture du clapet, la température, etc.

Nous avons fait la mesure de la capacité d'un clapet de surface extrêmement petite : $0^{mm^2},1$ de section, chargé sous une différence de potentiel de 2 volts pendant un temps extrêmement court, de l'ordre du $\frac{1}{100}$ de seconde, et nous avons trouvé des capacités variant de 7 à 10 microfarads environ. Ces capacités correspondent à des valeurs de 700 000 à 1 000 000 microfarads par décimètre carré. Si les surfaces utilisées sont de l'ordre du décimètre carré, les capacités ne sont plus alors que de l'ordre de 1 farad par 10^{m^2}.

La capacité diminue très rapidement avec le temps de la charge, par suite de l'augmentation d'épaisseur de la couche d'alumine.

Une charge effectuée pendant 1 seconde n'a plus que le millième de la valeur précédente. La charge du condensateur se conserve pendant un temps appréciable variant entre $\frac{1}{10}$ et 1 seconde. Si l'on calcule l'épaisseur de la couche diélectrique correspondant à la capacité de 1 farad par décimètre carré, on la trouve être de l'ordre de 10^{-7}, c'est-à-dire de l'ordre des grandeurs *moléculaires*.

Condensateur à lames d'aluminium. — La capacité très élevée des clapets permet de réaliser des condensateurs électrolytiques à l'aide de lames d'aluminium plongées dans un bain de carbonate d'ammonium par exemple. Ces condensateurs. qui ne conservent pas leur charge pendant un temps prolongé, ne sont susceptibles que d'applications spéciales, telles, par exemple, que le démarrage des moteurs alternatifs.

Redressement des courants alternatifs à l'aide des clapets. — Nous avons effectué de nombreuses recherches sur le redressement des courants alternatifs par les clapets. Les mesures ont été faites avec des appareils thermiques et l'étude comparée des phénomènes a été effectuée à l'aide de graphiques obtenus par l'*ondographe* Hospitalier.

Influence de l'électrolyte sur les constantes d'un clapet. — Dans le Tableau suivant, nous désignerons par

U force électromotrice efficace du courant alternatif, mesurée à l'aide d'un voltmètre thermique;

U_N force électromotrice efficace du courant redressé;

U_C force électromotrice mesurée à l'aide d'un voltmètre continu à aimant;

I intensité du courant alternatif mesurée avec un ampèremètre thermique;
I_c intensité du courant redressé mesurée avec le continu;
T température.

Alternatif			Redressé		
U.	I.	U_c.	U_x.	I_c.	T.
		Biphosphate d'ammonium.			
volts	ampères	volts	volts	ampères	degrés C.
105	6,3	38	42	5,6	35
103	6,7	37	43	5,6	75
		Phosphate neutre d'ammonium.			
103	6,1	37	41	5,45	23
104	6,7	38,5	43	5,70	70
		Phosphate double de sodium et d'ammonium.			
111	7,5	39	48	5,8	22
109	7,6	41,5	47	6,3	60
		Phosphate double de potassium et d'ammonium.			
103	6,1	36	40	5,2	35
107	7,2	39,7	45	5,9	87
		Phosphate d'ammonium et de zinc.			
104	6,7	38	43	5,0	25
104	7,3	36	45	5,4	60
		Biphosphate de sodium.			
104	8,2	31	52	4,6	25
103	11,7	16	73	2,6	69
		Chromate neutre d'ammonium.			
104	7,5	34,5	48	5,3	25
110	8,7	35	55	5,3	52
		Chromate double d'ammonium et d'aluminium.			
110	9,3	33	57	5	23
108	10,2	31	62	4,7	85

Les conclusions de ces mesures sont les suivantes :

1° Le redressement est complet jusqu'à la température de 30° C. environ. De

cette température jusqu'à l'ébullition, une *fuite* de plus en plus accentuée se manifeste;

2° Les sels ammoniacaux fournissent un meilleur résultat que les autres sels;

3° L'addition d'un autre sel aux sels ammoniacaux diminue l'effet clapet;

4° Le phosphate *neutre* d'ammonium est celui qui donne les meilleurs résultats parmi tous les sels essayés.

Dispositif adopté. — L'ensemble des divers résultats précédents nous ont amené à adopter un dispositif définitif caractérisé essentiellement par les points suivants :

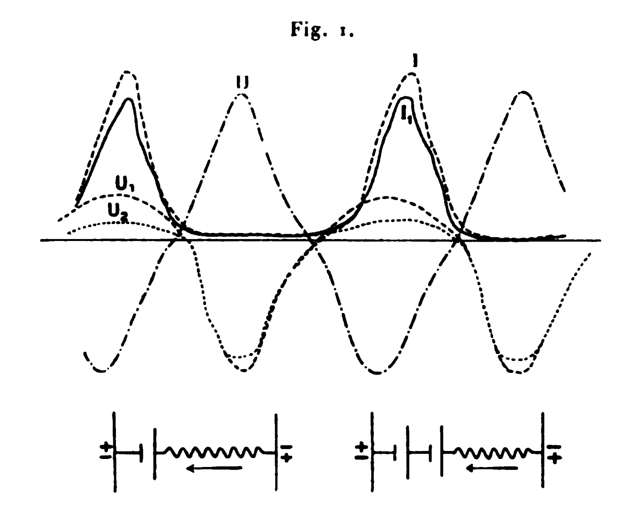
1° Une anode en aluminium allié à une faible proportion de cuivre ou de zinc;

2° Une cathode en plomb, formant récipient;

3° Une dissolution *concentrée* de phosphate neutre d'ammonium.

Forme ondulatoire du courant redressé. — En utilisant un clapet dont l'électrolyte était constituée par du phosphate double d'ammonium et de sodium, l'ondographe fournit le graphique suivant (*fig.* 1) :

Fig. 1.



U courant alternatif dont la force électromotrice efficace = 100 volts;
Fréquence = 42 périodes;
U' force électromotrice aux deux bornes extrêmes du clapet = 82 volts;
U_N force électromotrice entre les bornes d'un clapet unitaire = 75 volts;
I intensité du courant dans un clapet = 3 ampères;
I' intensité avec deux clapets en tension = 2,6 ampères.

L'étude de ces graphiques montre que :

1° Le courant redressé ne se manifeste que pendant chaque demi-phase du courant alternatif;

2° La force électromotrice et l'intensité sont déphasées par rapport à la différence de potentiel du courant alternatif;

3° L'intensité du courant est plus faible avec deux clapets en tension qu'avec un seul;

4° Le redressement, dans le cas particulier précédent (phosphate double d'ammonium et de sodium), est rendu plus complet par l'emploi de deux clapets en tension.

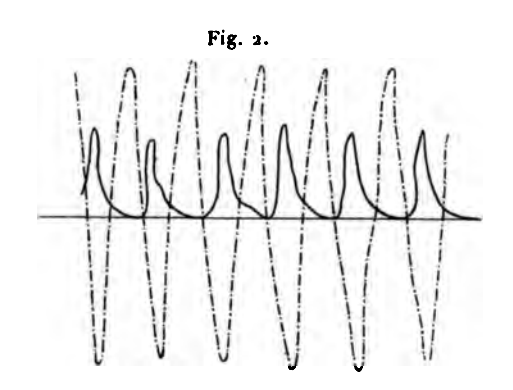
Il se manifeste une fuite au passage du courant alternatif au-dessus de l'axe d'origine pendant la période de fermeture.

La *forme de la courbe* de la force électromotrice varie suivant la nature de l'électrolyte.

Le *déphasage du courant redressé sur la différence de potentiel* s'observe dans tous les graphiques, il est dû à la capacité propre du clapet. Il est variable suivant la nature inductive du circuit extérieur.

Clapet au magnésium. — Le graphique (*fig.* 2) a été obtenu avec un clapet

Fig. 2.



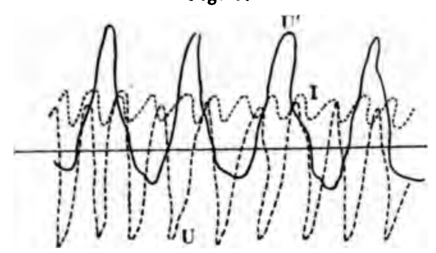
constitué par un fil de magnésium, un graphite et une dissolution de fluorure d'ammonium.

Le courant est complètement redressé et il présente un déphasage très net de l'intensité sur la différence de potentiel. Le fil de magnésium était entouré d'une gaine lumineuse pendant toute la durée du fonctionnement du clapet.

Différence de potentiel aux bornes d'un clapet. — Le clapet était constitué par : une anode en aluminium pur, une cathode en aluminium allié à 10 pour 100 de cuivre, dont la surface était 100 fois plus grande que celle de l'anode; l'électrolyte était formée par une solution concentrée de carbonate d'ammonium.

Dans le graphique (*fig.* 3), on a :

Fig. 3.



U' différence de potentiel en circuit ouvert aux bornes du clapet = 69 volts;
U différence de potentiel en fonctionnement = 89 volts;
I intensité du courant redressé = 1,3 ampères.

Influence ae la nature de la cathode. — Le *graphite* utilisé comme cathode se désagrège lentement sous l'influence du courant alternatif et il tombe en une boue épaisse au fond du récipient.

Le *fer* se recouvre d'une couche de phosphate double de fer et d'alumine, très adhérente, qui augmente progressivement la résistance intérieure du clapet.

La *tôle d'acier* polie ne subit qu'une attaque très faible. Un clapet ainsi constitué a pu fonctionner pendant 20 jours consécutifs sans présenter d'altération sensible de l'acier.

Le *plomb* se recouvre d'une couche de peroxyde qui introduit une légère résistance dans le circuit, mais dont l'épaisseur reste sensiblement stationnaire après quelque temps de marche.

Des *alliages d'aluminium*, contenant 8 à 10 pour 100 de cuivre ou 5 pour 100 de nickel, donnent des résultats inférieurs au plomb comme cathodes. Ces alliages ne subissent pas d'attaque sensible lorsque la surface active de la cathode est suffisamment développée.

Condensation à l'ouverture des clapets. — Nous avons vu que le temps de réduction de l'oxyde d'aluminium à l'ouverture du clapet était sensiblement égal à celui de sa formation, dans le cas d'un courant continu inversé. Avec un courant redressé sinusoïdal dans lequel l'intensité est diphasée par rapport à la différence de potentiel, la durée de la réduction est en général plus grande que celle de la formation du diélectrique. L'hystérésis électrolytique est alors supérieure à l'unité.

Du fait même de la persistance de la couche du diélectrique pendant une partie de la durée de la demi-période inverse, il résulte une charge électrostatique du condensateur dont le sens est inverse à celui de la charge directe, et dont l'effet est de détruire une partie de cette dernière.

D'autre part la résistance intérieure du clapet se trouve sensiblement accrue par la persistance du diélectrique à l'ouverture.

Influence d'une résistance de self-induction. — Soient :

$\mathcal{E}_{eff.}$ la force électromotrice de self-induction;

$U_{eff.}$ la différence de potentiel aux armatures du condensateur constitué par le clapet;

γ l'angle que fait la force électromotrice avec l'intensité;

f fréquence;

$\mathfrak{L}$ coefficient en henrys de self-induction du circuit;

C capacité du condensateur en farads;

R résistance ohmique des condensateurs.

On a

$$4\pi^2 f^2 \mathfrak{L} C = 1 \quad \text{quand} \quad \mathcal{E}_{eff} = U_{eff}$$

avec

$$\tang\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0;$$

il en résulte que

$$I_{eff.} = \frac{V_{eff.}}{R}.$$

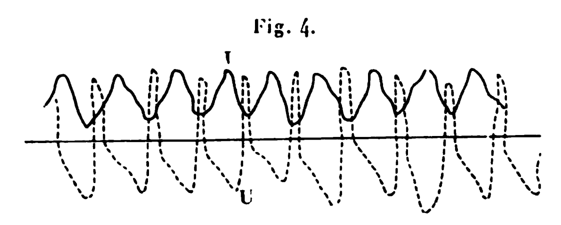
Tout se passe alors comme s'il n'y avait ni self-induction, ni condensateur.

Le courant reste en phase avec la différence de potentiel agissante, et sa valeur efficace est égale à celle de cette dernière, divisée par la résistance effective des conducteurs à laquelle se réduit l'impédance.

Si l'on dispose un clapet en série avec une inductance de valeur suffisante, on constate, en effet, que, pour de petits débits, le courant redressé ne présente plus de déphasage sensible de l'intensité sur la différence de potentiel.

Induction du courant redressé, dans un transformateur. — Si l'on utilise

Fig. 4.



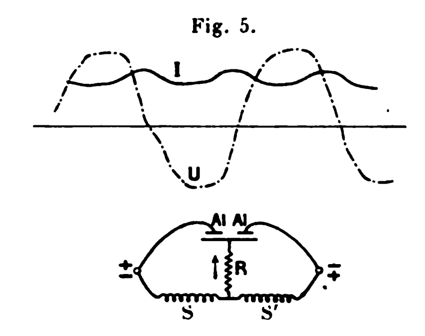
une bobine d'induction comme transformateur, en ayant soin de serrer le trembleur, on obtient à l'aide d'un courant redressé d'intensité T, lancé dans le gros fil inducteur, un courant ondulatoire alternatif, de force électromotrice U dans le fil fin induit (*fig.* 4).

Action du courant redressé sur les électromoteurs. — Le courant redressé à l'aide d'un seul clapet est fortement ondulatoire. Les électromoteurs, excités en série ou en dérivation, fonctionnent d'une façon imparfaite à l'aide de ces courants, par suite de la valeur élevée qu'y prend la self-induction. Le moteur s'échauffe et le collecteur donne de nombreuses étincelles. Les magnétos, et les dynamos excitées en magnétos, à l'aide d'un courant continu distinct, fournissent un fonctionnement meilleur que les précédents, par suite de la suppression presque complète de réaction de l'inducteur sur l'induit.

Clapet à anode double monté sur deux résistances opposées de self-induction. — Dans le mode de montage indiqué sur la figure ci-jointe, où la cathode est mise en circuit sur deux résistances de self-induction égales et opposées S et S', et dans lequel deux anodes d'aluminium Al Al sont disposées en présence de la cathode unique précédente, et reliées respectivement avec les pôles de la source alternative, on obtient dans le circuit d'utilisation A un courant I très peu ondulatoire.

Dans le graphique (*fig.* 5) ci-joint les constantes étaient :

Fig. 5.



I intensité du courant : 10 ampères;
U force électromotrice efficace du courant alternatif : 110 volts (53 périodes);
Différence de potentiel entre les deux extrémités de la résistance d'utilisation : 55 volts.

On constate que le rendement $\frac{55 \text{ volts}}{110 \text{ volts}}$ n'est que 50 pour 100.

Montage en pont de Wheatstone. — Dans le but d'utiliser successivement les deux demi-phases, positives et négatives, du courant alternatif, on emploie quatre clapets, montés en pont de Wheatstone (*fig.* 6).

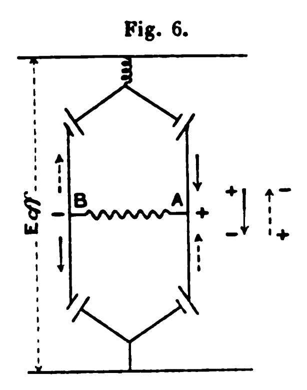
L'étude de ce mode de montage permet de constater que chaque demi-phase du courant traverse toujours deux clapets reliés en série, et que les deux demi-phases successives sont redressées dans une déviation unique et qu'elles ajoutent leurs effets dans le circuit extérieur.

Le réglage du débit est fait à l'aide de résistances de self-induction variables.

Chaque modèle de soupape est du reste réglé pour une intensité maxima déterminée.

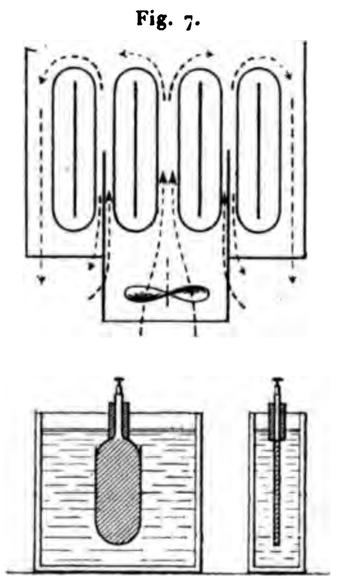
Les soupapes subissent un échauffement assez rapide, que l'on combat par un

Fig. 6.



simple rayonnement dans l'air pour les petits modèles, mais que l'on aide par un courant d'air insufflé par un ventilateur dans les modèles de moyenne puissance. Pour les fortes puissances, on a recours à des refroidisseurs à circulation d'eau froide. Les récipients des quatre clapets sont alors soigneusement isolés de la masse d'eau extérieure.

Fig. 7.



Le modèle le plus courant de soupapes électriques est celui représenté figure 7, qui est construit par la Société Mors et Cie de Paris et par M. Snoudon, ingénieur à Londres.

Cette soupape se compose essentiellement d'un vase cathode prismatique en plomb pur embouti, enfermé dans une enveloppe de tôle formant support.

L'anode, en alliage d'aluminium, a la forme d'une plaque mince, arrondie sur les bords; elle est reliée au conducteur extérieur à l'aide d'une tige en aluminium goupillée sur la plaque et isolée à l'aide d'un tube de caoutchouc (*fig.* 7).

La soupape renferme une solution saturée de phosphate neutre d'ammonium.

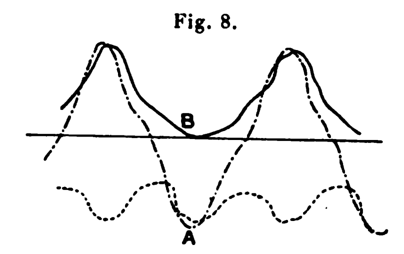
Les quatre clapets sont renfermés dans une boîte en bois, et ils sont soigneusement isolés à l'aide de caoutchouc.

Un ventilateur, disposé sur le côté de la boîte, est actionné par une dérivation prise sur la soupape.

L'air froid, insufflé par le ventilateur, circule en chicane autour des quatre clapets et les maintient à une température constante de 35° à 40° C.

Graphiques obtenus à l'aide du montage précédent. — Un courant alternatif, dont la force électromotrice A était égale à 117 volts sous 53 périodes, fournissait un courant redressé dont la force électromotrice était égale à 82 volts. L'intensité

Fig. 8.



du courant alternatif était de 5 ampères, et celle du courant redressé de 4,5 ampères (*fig.* 8).

L'électrolyte était constituée par du phosphate neutre d'ammonium maintenu à une température constante de 9° C.

La cathode était constituée par de la tôle d'acier poli. Le graphique ci-joint a été obtenu après une marche continue, correspondant au passage de 3800 ampères-heure dans la soupape.

Si l'on fait circuler le courant redressé dans une *résistance inductive,* on constate que la courbe de l'intensité est sensiblement plus tendue que celle obtenue avec une résistance non inductive.

Lorsque la différence de potentiel moyenne du courant alternatif est égale à 110 volts, celle du courant redressé est égale à 96 volts au début du fonctionnement de la soupape, puis elle s'abaisse rapidement jusqu'à 80 volts environ.

Cet abaissement de la force électromotrice semble provenir principalement de l'augmentation d'épaisseur du diélectrique.

On observe une *fuite* du courant alternatif qui atteint parfois 5 à 10 pour 100

de l'intensité totale employée, quand la température est trop élevée ou que la surface de l'anode est trop grande.

On peut éviter entièrement cette fuite, en utilisant une anode en aluminium pur de faible surface et une solution de carbonate d'ammonium, mais la force électromotrice du courant redressé s'abaisse alors à 35 volts, par suite de la résistance de la pellicule formée à la surface de l'anode.

La *nature de l'électrolyte* joue un rôle important dans les soupapes montées au pont de Wheatstone.

Si l'on utilise, par exemple, une solution saturée de borate d'ammonium, dans une soupape dont les anodes sont en aluminium pur, on obtient, pour une différence de potentiel de 108 volts du courant alternatif, une différence de potentiel de 43 volts pour le courant redressé, et une intensité de 7,4 ampères dans un circuit non inductif.

Si l'on remplace le borate d'ammonium par du phosphate d'ammonium, on obtient, dans les mêmes conditions expérimentales, une force électromotrice de 70 volts pour le courant redressé et une intensité de 10,5 ampères.

Dans une même soupape, la force électromotrice varie à peu près proportionnellement à l'intensité du courant redressé, et la fuite en intensité est sensiblement constante pour tous les débits.

Le *cloisonnement* de l'anode abaisse très sensiblement le rendement du clapet.

Le *cloisonnement* de la cathode affecte peu ce rendement.

L'*élévation de température* de l'électrolyte a pour effet de produire une augmentation de la force électromotrice du courant redressé. Si la fuite est nulle à 20° C., elle commence à se produire vers 27° C., et à 75° C. elle est très importante.

Le redressement est d'autant plus complet que la surface des anodes est plus faible.

Action des circuits sur les constantes du courant redressé. — Si le circuit inductif est externe, on observe que pour une faible intensité variant de 0,1 à 0,5 ampère, l'inductance du circuit masque l'effet de capacité propre aux clapets.

Si le circuit inductif est disposé entre les clapets, il se produit une réaction énergique de ce circuit sur la capacité propre des clapets, qui a pour effet d'accroître l'intensité apparente du courant et de tendre fortement les courbes d'intensité et de force électromotrice (*fig.* 9).

Dans le graphique ci-dessus, renfermant un double circuit inductif interne, on obtient en U la différence de potentiel alternative, en U′ la force électromotrice d'un seul clapet fermé sur un circuit non inductif, et en U″ la force électromotrice aux mêmes points, quand la résistance inductive *est mise* en circuit.

Les *anodes* sont constituées par un alliage d'aluminium de composition bien

uniforme; ces anodes doivent subir une *formation* préalable qui a pour effet de préparer leur surface et d'assurer la régularité de leur fonctionnement.

Fig. 9.

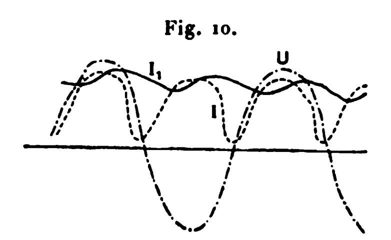
Si l'on examine dans l'obscurité l'intérieur d'une soupape en fonctionnement, on constate que les anodes sont entourées d'une auréole lumineuse, dont l'éclat diminue après l'interposition de circuits inductifs.

Condensateur électrolytique. — On peut réaliser un condensateur électrolytique à grande capacité, à l'aide de lames d'aluminium parallèles disposées dans une solution de phosphate d'ammonium.

Le condensateur doit subir une longue période de formation avant de pouvoir être employé, et il doit être maintenu à une basse température pour éviter toute fuite importante du courant alternatif.

La figure 10 montre l'action de ce condensateur sur le courant redressé :

Fig. 10.



U représente la force électromotrice effective du courant alternatif : 110 volts;

I' l'intensité de 8 ampères du courant redressé sur une résistance non inductive;

I'_1 l'intensité du courant redressé avec l'adjonction d'un condensateur électrolytique : 4,5 ampères.

On voit que le courant redressé prend la forme d'un courant sensiblement continu.

Les *causes de l'abaissement de la force électromotrice dans les clapets* peuvent se résumer ainsi :

1° Résistance ohmique produite à l'ouverture des clapets par la pellicule formée à la surface des anodes;

2° Résistance ohmique produite par la présence d'une pellicule à la surface des cathodes;

3° Effets de charge statique pendant les périodes d'ouverture et de fermeture des clapets;

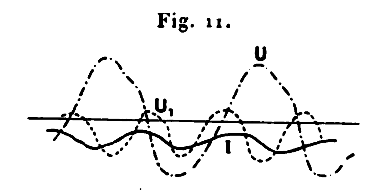
4° Inégalité *dans la composition* du métal des anodes.

Si l'on utilise le courant redressé pour actionner des *électromoteurs,* on obtient des effets du même ordre que ceux signalés précédemment avec un clapet unitaire.

Les moteurs magnéto-électriques (ou excités en magnétos), fournissent un bon fonctionnement et un rendement élevé, par suite de l'absence de réaction nuisible de l'induit sur l'inducteur.

Le graphique (*fig.* 11) donne la représentation des constantes d'un moteur

Fig. 11.



Edison excité en dérivation. I est l'intensité, U la différence de potentiel alternatif et U_1 la force électromotrice du courant redressé.

On voit que l'intensité est représentée par une courbe assez tendue, mais que la force électromotrice passe au-dessus de l'axe d'origine. Cet effet était dû à la self-induction. Les étincelles étaient nombreuses au collecteur et le rendement mauvais.

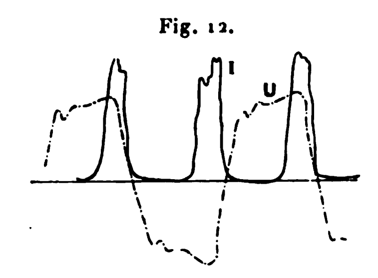
Influence des batteries d'accumulateurs sur les courants redressés. — Un accumulateur au plomb peut être assimilé à un condensateur électrolytique de grande capacité, dans lequel la charge se reproduirait, au fur et à mesure de sa disparition, grâce à des réactions chimiques internes.

Envisagé sous cette forme, on conçoit que l'accumulateur puisse produire, sur les courants redressés par les soupapes, un effet analogue à celui qui serait produit par un condensateur à lames d'aluminium.

Les réactions chimiques présidant à la charge de l'accumulateur ne peuvent utilement se produire qu'entre des limites de force électromotrice déterminées. Dans le courant ondulatoire, il convient de chercher à abaisser l'ordonnée maxima du potentiel de charge, jusqu'au régime de fonctionnement utile à l'accumulateur.

Le graphique (*fig.* 12) représente la charge d'une batterie d'accumulateurs

Fig. 12.



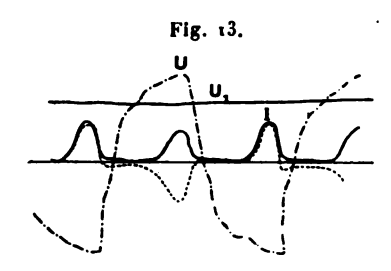
dont la force électromotrice est de 105 volts, à l'aide d'un courant redressé *très ondulatoire*.

La différence de potentiel efficace du courant alternatif était égale à 110 volts et elle atteignait 140 volts au sommet de l'ordonnée.

L'intensité affectait la forme I. Un abondant dégagement gazeux se manifestait dans la batterie pendant la période de charge, et le rendement à la décharge n'atteignait que 50 pour 100.

Dans le graphique (*fig.* 13), au contraire, U, la force électromotrice du cou-

Fig. 13.



rant alternatif, était égale à 119 volts, et U_1, la force électromotrice du courant redressé, était sensiblement parallèle à l'axe d'origine et égale à 102 volts.

L'intensité du courant alternatif, avant l'entrée dans les clapets, était égale à 10 ampères; l'intensité du courant redressé utilisé dans la batterie était égale à 9,50 ampères. L'ordonnée maxima de l'intensité ne dépassait pas celle nécessaire à la charge utile.

Les rendements deviennent alors semblables à ceux obtenus avec la charge par courant continu.

La batterie d'accumulateurs peut encore être utilisée comme *condensateur*, sur un courant dérivé aux bornes de cette batterie pendant la charge de celle-ci avec le courant ondulatoire obtenu avec un clapet unitaire.

L'étude des graphiques permet de conclure qu'avec une batterie à faible capacité, mais de résistance intérieure aussi réduite que possible, on peut obtenir un courant de décharge sensiblement rectiligne sous un rendement élevé.

Redressement des courants polyphasés. — Les courants diphasés ou triphasés montés en triangle ou en étoile peuvent être redressés à l'aide des clapets.

On peut utiliser un montage composé de six clapets qui donne un fonctionnemant analogue à celui de quatre clapets avec le courant monophasé. Les rendements sont les mêmes que dans ce cas et les courants redressés sont sensiblement rectilignes.

M. Émile Mors, concessionnaire de la Soupape électrique Nodon, en France, a fait des mesures de rendements à l'aide de ce montage, à la Société du Nord Lumière, dans ses sous-stations de Clichy et de Courbevoie, avec des courants triphasés de 25 périodes par seconde à 110 et 220 volts. Il a pu faire fonctionner d'une façon parfaite 6 arcs Bardon, en tension, avec le courant redressé à 230 volts sortant des soupapes. Les rendements mesurés avec deux compteurs Aron ont varié entre 75 et 78,5 pour 100, sans que l'échauffement de l'appareil ait dépassé de 20° la température ambiante (*Industrie électrique*, n° 294).

On peut encore utiliser un clapet constitué par une seule cathode mise en présence de deux anodes en aluminium, dans le cas des courants diphasés, et de trois anodes dans le cas du courant triphasé.

Les courants redressés pulsatoires correspondant aux demi-ondes successives sont utilisés à la charge d'une batterie de faible capacité et de résistance extérieure extrêmement faible. Le courant dérivé aux bornes de la batterie est sensiblement rectiligne.

Application des clapets pour le fonctionnement des bobines d'induction. — M. Rochefort a étudié un modèle spécial de clapet unitaire à capacité variable qui permet d'actionner des bobines d'induction à l'aide de récepteurs rapides et de courants alternatifs.

Les rendements obtenus sont élevés et le fonctionnement des transformateurs est très régulier.

Le fonctionnement des tubes à rayons X, pour la radiographie, se fait, avec cet appareil, dans d'excellentes conditions. On peut également employer le montage en pont de Wheatstone, avec un interrupteur rotatif.

Effet Wenhelt produit par le clapet. — Un clapet, dont la surface d'aluminium est très réduite, fonctionne avec le courant alternatif sur un transformateur, à la façon d'un interrupteur Wenhelt. Un effet analogue est obtenu avec du courant continu. Il semble probable que l'effet Wenhelt est un effet de capacité électrolytique du même ordre que celui des clapets.

Rendements des soupapes. — M. Hospitalier a établi les rendements industriels de notre soupape électrique (*Industrie électrique*, n° 263, 10 décembre 1902).

Les rendements en énergie varient entre 65 et 75 pour 100 suivant les conditions d'utilisation des soupapes. M. Émile Mors a trouvé des rendements variant de 75 à 78,5 pour 100 avec les courants triphasés.

Résumé. — Les soupapes et clapets électrolytiques sont susceptibles de recevoir de nombreuses applications dans les laboratoires et dans l'industrie.

Dans les laboratoires, ils permettent d'effectuer la mesure de courants oscillatoires, à l'aide des méthodes simples employées pour les courants continus.

Le fonctionnement des transformateurs à hauts potentiels à l'aide du courant alternatif et d'un clapet permet de rendre de signalés services. L'emploi de capacités élevées sous un volume réduit est également susceptible de recevoir des applications.

Dans l'industrie, les soupapes électriques sont utilisées d'une façon courante pour la charge des accumulateurs et pour le fonctionnement de petits électromoteurs continus à l'aide du courant alternatif simple ou polyphasé.

Les rendements des soupapes sont supérieurs à ceux des petits transformateurs tournants, et la surveillance en est beaucoup plus simple.

Les soupapes ne subissent aucune détérioration appréciable sous l'action d'un fonctionnement intermittent ou continu.

SUR LE THÉORÈME DE POISSON,

PAR M. HENRY BOURGET,

Maître de Conférences à l'Université et Astronome adjoint à l'Observatoire.

1. On sait qu'en rapportant les planètes aux axes habituellement employés, ayant pour origine le Soleil, la démonstration du théorème de Poisson exige quelques transformations de calcul assez délicates. Les difficultés proviennent de ce que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour toutes les planètes en présence. Il en résulte que, si l'on montre assez facilement que les variations des éléments d'une planète ne produisent pas de perturbation séculaire dans le grand axe de cette planète, il est plus malaisé de faire voir qu'il en est de même pour l'effet des variations des éléments des autres planètes.

C'est pour lever ces difficultés que Tisserand a fait usage des coordonnées Jacobi-Radau. Dans ce système, les fonctions perturbatrices des diverses planètes sont les mêmes à un facteur près.

M. Poincaré a proposé, en 1897 (*Bulletin astronomique,* t. XIV, p. 53), un système de coordonnées qui possède la même propriété.

J'ai pensé qu'on pourrait l'utiliser avantageusement pour simplifier la démonstration du théorème de Poisson. C'est l'objet du présent travail. Houël a indiqué, jadis, dans sa Thèse, une démonstration de l'invariabilité des moyens mouvements basée sur une idée analogue.

J'ai fait usage d'un mode particulier d'exposition de la méthode de la variation des constantes arbitraires. J'ai montré ailleurs [1] que ce mode d'exposition dû à Cauchy (*Comptes rendus,* 12 octobre 1840) pouvait être rattaché simplement à la belle méthode des approximations successives de M. Picard.

2. Désignons par m_0 la masse du Soleil; $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ les masses des diverses planètes. Soient x, y, z les coordonnées par rapport à des axes fixes quelconques de la masse m_0 et x_i, y_i, z_i les coordonnées de la masse m_i par rapport à des axes parallèles aux premiers, menés par m_0.

---

(1) *Bulletin astronomique,* t. XXI, 1894, p. 219.

La force vive et la fonction des forces du système sont

$$\left.\begin{aligned} 2T &= m_0(x'^2+y'^2+z'^2)+\sum_i m_i[(x'+x'_i)^2+(y'+y'_i)^2+(z'+z'_i)^2] \\ U &= \sum_i \frac{m_0 m_i}{r_i}+\sum_{ij}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \end{aligned}\right\} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où les lettres accentuées désignent des dérivées par rapport au temps, r_i la distance des masses m_0 et m_i et Δ_{ij} celle des masses m_i et m_j.

En supposant, ce qui est permis, que le centre de gravité du système est immobile, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} -x' &= \frac{1}{\mu}\sum_i m_i x'_i \\ -y' &= \frac{1}{\mu}\sum_i m_i y'_i \\ -z' &= \frac{1}{\mu}\sum_i m_i z'_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

en posant

$$\mu = m_0 + m_1 + \ldots + m_\nu.$$

La force vive devient

$$2T = \sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2) - \frac{1}{\mu}\left[\left(\sum_i m_i x'_i\right)^2+\left(\sum_i m_i y'_i\right)^2+\left(\sum_i m_i z'_i\right)^2\right].$$

Posons

$$\frac{\partial T}{\partial x'_i} = p_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial y'_i} = q_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial z'_i} = r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

nous en tirons

$$\left.\begin{aligned} m_i x'_i &= p_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_i p_i \\ m_i y'_i &= q_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_i q_i \\ m_i z'_i &= r_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_i r_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu);$$

$2T$ s'exprime alors en fonction des p_i, q_i, r_i et devient

$$2T = \sum_i \frac{1}{m'_i}(p_i^2+q_i^2+r_i^2) + \frac{1}{m_0}\sum_{ij}(p_i p_j + q_i q_j + r_i r_j)$$

en posant

$$\frac{1}{m'_i} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0}.$$

On sait que les équations du mouvement ont alors la forme canonique

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial K}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{\partial K}{\partial x_i}\\ \frac{dy_i}{dt}&=\frac{\partial K}{\partial q_i}, & \frac{dq_i}{dt}&=-\frac{\partial K}{\partial y_i}\\ \frac{dz_i}{dt}&=\frac{\partial K}{\partial r_i}, & \frac{dr_i}{dt}&=-\frac{\partial K}{\partial z_i}\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

où

$$K=T-U.$$

Cela étant, posons

$$\left.\begin{aligned}H&=\sum_i \frac{1}{2m'_i}(p_i^2+q_i^2+r_i^2)-\sum_i \frac{m_0 m_i}{r_i}\\ R&=\sum_{ij}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}-\frac{1}{m_0}\sum_{ij}(p_i p_j+q_i q_j+r_i r_j)\end{aligned}\right\}\quad (i,j=1,2,\ldots,\nu);$$

les équations du mouvement deviennent

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial R}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial x_i}\\ \frac{dy_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}, & \frac{dq_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial y_i}+\frac{\partial R}{\partial y_i}\\ \frac{dz_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial r_i}-\frac{\partial R}{\partial r_i}, & \frac{dr_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial z_i}+\frac{\partial R}{\partial z_i}\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\frac{p_i}{m'_i}-\frac{\partial R}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt}+\frac{m_0 m_i x_i}{r_i^{\frac{3}{2}}}&=\frac{\partial R}{\partial x_i}\\ \frac{dy_i}{dt}&=\frac{q_i}{m'_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}, & \frac{dq_i}{dt}+\frac{m_0 m_i y_i}{r_i^{\frac{3}{2}}}&=\frac{\partial R}{\partial y_i}\\ \frac{dz_i}{dt}&=\frac{r_i}{m'_i}-\frac{\partial R}{\partial r_i}, & \frac{dr_i}{dt}+\frac{m_0 m_i z_i}{r_i^{\frac{3}{2}}}&=\frac{\partial R}{\partial z_i}\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,\ldots,\nu).$$

Si l'on fait $R=0$ dans ces équations, on obtient les équations différentielles de l'orbite elliptique intermédiaire et en posant

$$\left.\begin{aligned}\xi_i&=\frac{p_i}{m'_i}\\ \eta_i&=\frac{q_i}{m'_i}\\ \zeta_i&=\frac{r_i}{m'_i}\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,\ldots,\nu),$$

on obtient, pour les équations de cette orbite,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \xi_i}, & \frac{d\xi_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \eta_i}, & \frac{d\eta_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_i} \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \zeta_i}, & \frac{d\zeta_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

et pour les équations du mouvement troublé

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial(\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial \xi_i}, & \frac{d\xi_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial(\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial x_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial(\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial \eta_i}, & \frac{d\eta_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial(\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial y_i} \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial(\mathrm{R}-\mathrm{R})}{\partial \zeta_i}, & \frac{d\zeta_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial(\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Il en résulte qu'en désignant par

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1^i, & \alpha_2^i, & \alpha_3^i \\ \beta_1^i, & \beta_2^i, & \beta_3^i \end{matrix}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

un système d'éléments canoniques conjugués, on aura pour les équations aux variations de ces éléments

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1^i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \beta_1^i}, & \frac{d\beta_1^i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_1^i} \\ \frac{d\alpha_2^i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \beta_2^i}, & \frac{d\beta_2^i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_2^i} \\ \frac{d\alpha_3^i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \beta_3^i}, & \frac{d\beta_3^i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_3^i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Il est à remarquer que l'orbite intermédiaire n'est pas tangente à l'orbite réelle, comme dans la méthode usuelle; mais que, par contre, il n'existe qu'une seule fonction perturbatrice R que l'on doit multiplier par la constante $\frac{1}{m'_i}$ pour écrire les équations du mouvement de la planète de masse m_i. C'est donc pour le grand axe de cette orbite elliptique que nous démontrerons le théorème de Poisson.

3. Désignons par

a le demi grand axe;
e l'excentricité;

Ω la longitude du nœud ascendant;
φ l'inclinaison;
ϖ la longitude du périhélie;
τ l'époque du passage au périhélie;
$T = n(t - \tau)$ l'anomalie moyenne à l'époque t;
$k = na^{\frac{3}{2}} = \sqrt{f\mu}$ la constante de Gauss;
$p = a(1 - e^2)$ le paramètre;
n le moyen mouvement diurne;
$\mu = m + m_0$ la somme des masses de la planète et du Soleil;
E la base des logarithmes népériens;

pour une quelconque des ν planètes en présence. Introduisons également pour chaque planète m_i les éléments canoniques suivants :

$$\alpha_1^i = -\frac{a_i^2 n_i}{2} = -\frac{k^2}{2a_i}, \qquad \beta_1^i = -\tau_i,$$
$$\alpha_2^i = k\sqrt{p_i}\cos\varphi_i, \qquad \beta_2^i = \Omega_i,$$
$$\alpha_3^i = k\sqrt{p_i}, \qquad \beta_3^i = \varpi_i - \Omega_i.$$

Nous supposerons la fonction R développée sous la forme

$$R = \sum (m_i, m_j)_{q,q'} E^{(qT_i + q'T_j)\iota},$$

ι désignant $\sqrt{-1}$;
le Σ indiquant des sommations à faire pour toutes les valeurs positives, négatives ou nulles des entiers q, q' pour chaque planète.

Nous désignerons, de plus, par $\mathcal{R}$ ce que devient R quand on y fait $t = \theta$, et nous poserons

$$\Theta_i = n_i(\theta - \tau_i).$$

Nous supposerons enfin qu'il n'y a entre les moyens mouvements aucune relation de commensurabilité.

4. Dans la Note que nous avons citée au début, Cauchy montre que la variation totale d'une fonction s des éléments canoniques des planètes est donnée par la formule

$$\Delta s = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' + \ldots$$

dans laquelle on a posé

$$\sigma' = -\int_t^\theta \Box\sigma\, d\theta, \qquad \sigma'' = -\int_t^\theta \Box\sigma'\, d\theta, \qquad \sigma''' = -\int_t^\theta \Box\sigma''\, d\theta$$

et

$$\square\sigma = [\mathfrak{R}_1, \sigma]_1 + [\mathfrak{R}_2, \sigma]_2 + [\mathfrak{R}_3, \sigma]_3 + \ldots + [\mathfrak{R}_\nu, \sigma]_\nu \qquad \text{où} \qquad \mathfrak{R}_i = \frac{1}{m'_i}\mathfrak{R},$$

σ désignant la valeur de s pour $t = \theta$ et le crochet $[P, Q]_i$ ayant la signification habituelle

$$[P, Q]_i = \frac{\partial P}{\partial\alpha_1^i}\frac{\partial Q}{\partial\beta_1^i} - \frac{\partial P}{\partial\beta_1^i}\frac{\partial Q}{\partial\alpha_1^i} + \frac{\partial P}{\partial\alpha_2^i}\frac{\partial Q}{\partial\beta_2^i} - \frac{\partial P}{\partial\beta_2^i}\frac{\partial Q}{\partial\alpha_2^i} + \frac{\partial P}{\partial\alpha_3^i}\frac{\partial Q}{\partial\beta_3^i} - \frac{\partial P}{\partial\beta_3^i}\frac{\partial Q}{\partial\alpha_3^i}.$$

σ', σ'', σ''' sont alors les variations d'ordre 1, 2, 3, ... par rapport aux masses.

Rappelons que $[P, Q]_i$ obéit aux lois de calcul suivantes :

$$[P, Q] = -[Q, P], \qquad [P, -Q] = -[P, Q],$$

$$[P + R, Q + S] = [P, Q] + [P, S] + [R, Q] + [R, S],$$

$$[PR, QS] = [P, Q]RS + [P, S]RQ + [R, Q]PS + [R, S]PQ.$$

5. Reprenons rapidement avec ces notations la variation du premier ordre de l'élément α_1^1.

On a, dans ce cas,

$$[\mathfrak{R}_1, \alpha_1^1]_1 = -\frac{1}{m'_1}\frac{\partial\mathfrak{R}_1}{\partial\beta_1^1}, \qquad [\mathfrak{R}_i, \alpha_1^1]_i = 0 \qquad (i = 2, \ldots, \nu);$$

d'où

$$\square\sigma = -\frac{1}{m'_1}\frac{\partial\mathfrak{R}_1}{\partial\beta_1^1} \qquad \text{et} \qquad \sigma' = \frac{1}{m'_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1^1}\int_t^\theta \mathfrak{R}_1\, d\theta.$$

Or, $\mathfrak{R}_1$ considérée comme fonction de θ contient deux sortes de termes :

a. Des termes indépendants de θ, de forme $(m_i, m_j)_{0,0}$, caractérisés par la relation

$$qn_i + q'n_j = h = 0.$$

b. Des termes contenant θ, pour lesquels $h \neq 0$, qui peuvent s'écrire

$$(m_i, m_j)_{q,q'}\,E^{-u}\,E^{h\theta\iota},$$

en posant

$$u = \iota(qn_i\tau_i + q'n_j\tau_j).$$

Il en résulte que $\int_t^\theta \mathfrak{R}_1\, d\theta$ contient aussi deux sortes de termes :

a. Des termes *séculaires* de type $(m_i, m_j)_{0,0}\,(\theta - t)$.

b. Des termes *périodiques* de type

$$\frac{(m_i, m_j)_{q,q'}}{\iota h}E^{-u}(E^{h\theta\iota} - E^{ht\iota}) \qquad h \neq 0.$$

On doit observer que le coefficient $(m_i, m_j)_{q,q'}$ ne contient pas les éléments β_1^i, β_1^j qui n'entrent que dans u par τ_i, τ_j.

En posant, pour abréger,

$$\mathrm{A}_{ij} = \frac{(m_i, m_j)_{q,q'}}{2h} \mathrm{E}^{-u}, \qquad \mathrm{P}_{ij} = \mathrm{E}^{h\theta\iota} - \mathrm{E}^{ht\iota},$$

les termes périodiques prennent la forme

$$\mathrm{A}_{ij}\,\mathrm{P}_{ij}.$$

On en conclut immédiatement que $\Delta\alpha_1^1$ ne contient aucun terme séculaire, puisque $(m_i, m_j)_{0,0}$ est indépendant de β_1^1.

$\sigma' = \Delta\alpha_1^1$ est donc une somme de termes périodiques de la forme

$$\frac{\partial \mathrm{A}_{ij}}{\partial \beta_1^1} \mathrm{P}_{ij} = q\,\iota\, n_i\, \mathrm{A}_{ij}\, \mathrm{P}_{ij}.$$

6. Arrivons maintenant au calcul de $\sigma'' = \int_t^0 \square\sigma'\, d\theta$.

On a

$$\square\sigma' = [\mathfrak{R}_1, \sigma']_1 + [\mathfrak{R}_2, \sigma']_2 + [\mathfrak{R}_3, \sigma']_3 + \ldots + [\mathfrak{R}_\nu, \sigma']_\nu$$

ou bien

$$\square\sigma' = \frac{1}{m'_1}[\mathfrak{R}, \sigma']_1 + \frac{1}{m'_2}[\mathfrak{R}, \sigma']_2 + \ldots + \frac{1}{m'_\nu}[\mathfrak{R}, \sigma']_\nu;$$

d'où

$$\sigma'' = -\sum_1^\nu{}_k \frac{1}{m'_k} \int_t^0 [\mathfrak{R}, \sigma']_k\, d\theta = \sum_1^\nu{}_k \frac{1}{m'_k} \int_t^0 [\sigma', \mathfrak{R}]_k\, d\theta.$$

Il suffit, pour démontrer le théorème de Poisson, de faire voir que $\int_t^0 [\sigma', \mathfrak{R}]_k\, d\theta$ ne contient aucun terme séculaire pour un indice k déterminé i.

$[\sigma', \mathfrak{R}]_i$ est une somme de crochets analogues obtenus en associant de toutes les manières possibles un terme de σ' avec un terme de $\mathfrak{R}$.

σ' ne contient que des termes périodiques de la forme

$$q\,\iota\, n_i\, \mathrm{A}_{ij}\, \mathrm{P}_{ij};$$

d'autre part, $\mathfrak{R}$ peut s'écrire

$$\mathfrak{R} = \sum \mathrm{B}_{il}\, \mathrm{Q}_{il},$$

en posant

$$B_{il} = (m_i, m_l)_{s,s'}, \qquad E^{-\nu} Q_{il} = E^{k\theta\iota},$$

$$\nu = \iota(s n_i \tau_i + s' n_l \tau_l), \qquad k = s n_i + s' n_l,$$

en appelant, pour éviter toute confusion, s et s' les entiers que contient $\mathfrak{R}$.

Nous aurons donc à intégrer des crochets de deux types, à savoir :

(a) $$[q \iota n_i A_{ij} P_{ij}, B_{il}]_i \qquad h \neq 0, \qquad k = 0,$$

(b) $$[q \iota n_i A_{ij} P_{ij}, B_{il} Q_{il}]_i \qquad h \neq 0, \qquad k \neq 0.$$

Ceux de type (a) peuvent s'écrire

$$[q \iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i P_{ij} + [P_{ij}, B_{il}]_i q \iota n_i A_{ij},$$

la première partie donne le terme

$$[q \iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i \int_t^\theta P_{ij} \, d\theta$$

qui est périodique, l'intégrale l'étant; la seconde partie donne, sans peine,

$$q \iota n_i [P_{ij}, B_{il}]_i = q \iota n_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial \alpha_1^i} \frac{\partial B_{il}}{\partial \beta_1^i} = -\iota q^2 s n_i^2 \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} B_{il} (\theta E^{h\theta\iota} - t E^{ht\iota})$$

dont l'intégrale ne contient que des termes périodiques et des termes périodiques multipliés par le temps, mais aucun terme séculaire, comme on le voit en remarquant que l'on a

$$\int_t^\theta \theta E^{h\theta\iota} \, d\theta = \frac{1}{\iota h} (\theta E^{h\theta\iota} - t E^{ht\iota}) + \frac{1}{h^2} (E^{h\theta\iota} - E^{ht\iota}) \qquad h \neq 0.$$

Les crochets du premier type ne peuvent donc amener dans $\int_t^\theta [\sigma', \mathfrak{R}]_i \, d\theta$ aucun terme séculaire.

Restent les crochets du second type qui peuvent se développer sous la forme

$$\begin{aligned} &[q \iota n_i A_{ij} P_{ij}, B_{il} Q_{il}]_i \\ &\quad = [q \iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i P_{ij} Q_{il} + [q \iota n_i A_{ij}, Q_{il}]_i P_{ij} B_{il} \\ &\qquad + [P_{ij}, B_{il}]_i q \iota n_i A_{ij} Q_{il} + [P_{ij}, Q_{il}]_i q \iota n_i A_{ij} B_{il}. \end{aligned}$$

Mais on a immédiatement

$$[P_{ij} Q_{il}]_i = 0,$$

$$[q\iota n_i A_{ij}, Q_{il}]_i = -q\iota n_i \frac{\partial A_{ij}}{\partial \beta_1^i} \frac{\partial Q_{il}}{\partial \alpha_1^i} = \iota q^2 s n_i^2 \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} A_{ij} Q_{il} \theta,$$

$$[P_{ij}, B_{il}]_i = \frac{\partial P_{il}}{\partial \alpha_1^i} \frac{\partial B_{il}}{\partial \beta_1^i} = -q s n_i \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} B_{il} (\theta E^{h\theta\iota} - t E^{ht\iota}),$$

d'où l'on conclut

$$[q\iota n_i A_{ij} P_{ij}, B_{il} Q_{il}]_i = [q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i P_{ij} Q_{il} - \iota q^2 s n_i^2 A_{ij} B_{il} \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} E^{ht\iota} (\theta - t) Q_{il},$$

et, dans $\int_t^\theta [\sigma', \mathfrak{R}]_i \, d\theta$, une série de termes de la forme

$$[q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i K - \iota q^2 s n_i^2 A_{ij} B_{il} \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} E^{ht\iota} K',$$

les intégrales K et K′ ayant les valeurs

$$K = \frac{1}{\iota(h+k)} [E^{(h+k)\theta\iota} - E^{(h+k)t\iota}] - \frac{E^{ht\iota}}{\iota k} [E^{k\theta\iota} - E^{kt\iota}],$$

$$K' = \frac{E^{k\theta\iota}}{\iota k} (\theta - t) + \frac{1}{k^2} [E^{k\theta\iota} - E^{kt\iota}],$$

avec les conditions

$$h \neq 0, \qquad k \neq 0.$$

Ces conditions et la forme de ces intégrales nous montrent que les termes qui en proviennent ne pourront être séculaires que si l'on a

$$h + k = 0,$$

auquel cas le terme correspondant deviendra

$$[q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i (\theta - t).$$

Or, la condition $h + k = 0$ développée donne

$$(q + s) n_i + q' n_j + s' n_l = 0,$$

qui implique, d'après nos restrictions,

$$q + s = 0, \qquad q' = 0, \qquad s' = 0, \qquad \text{si} \quad j \neq l,$$

$$q + s = 0, \qquad q' + s' = 0, \qquad \text{si} \quad j = l.$$

Dans le premier cas, $j \neq l$, q, s ne peuvent être nuls, mais à un terme

$$[q\iota n_l A_{lj}, B_{il}]_i = [(m_i, m_j)_{q,0} E^{-u}, (m_i, m_l)_{-q,0} E^{u}]_i,$$

correspondra le terme

$$[-q\iota n_l A_{il}, B_{lj}]_i = [(m_i, m_l)_{-q,0} E^{u}, (m_i, m_j)_{q,0} E^{-u}]_i,$$

égal et de signe contraire, en vertu des propriétés des crochets. Donc, dans ce cas, les termes séculaires s'annuleront deux à deux.

Dans le second cas, si q ou q' est nul, s ou s' sera nul. Si q est nul, le terme séculaire est aussi manifestement nul. Si q est le différent de zéro, à un terme

$$q\left[\frac{n_l}{h}(m_i, m_j)_{q,q'} E^{-u}, (m_i, m_j)_{-q,-q'} E^{+u}\right]_i$$

correspondra le terme

$$q\left[\frac{n_i}{h}(m_i, m_j)_{-q,-q'} E^{+u}, (m_i, m_j)_{q,q'} E^{-u}\right]_i,$$

ou bien, en posant

$$(m_i m_j)_{q,q'} E^{-u} = \mathrm{M}, \qquad (m_i m_j)_{-q,-q'} E^{+u} = \mathrm{M}',$$

au terme

$$q\left[\frac{n_i}{h}\mathrm{M}, \mathrm{M}'\right]_i$$

correspondra le terme

$$q\left[\frac{n_i}{h}\mathrm{M}', \mathrm{M}\right]_i.$$

La somme de ces deux termes est nulle, car on a

$$\left[\frac{n_i}{h}\mathrm{M}, \mathrm{M}'\right]_i = -\mathrm{MM}' q\iota n_l \frac{\partial}{\partial \alpha_1^i}\left(\frac{n_i}{h}\right) + [\mathrm{M}, \mathrm{M}']_i \frac{n_i}{h},$$

$$\left[\frac{n_i}{h}\mathrm{M}', \mathrm{M}\right]_i = +\mathrm{MM}' q\iota n_l \frac{\partial}{\partial \alpha_1^i}\left(\frac{n_i}{h}\right) + [\mathrm{M}', \mathrm{M}]_i \frac{n_l}{h}.$$

Donc les seuls termes séculaires qui pourraient, *a priori*, exister, s'annulent deux à deux.

Donc il n'y a pas dans σ'' de termes séculaires. C'est le théorème de Poisson.

SUR LES

MODULES D'ÉLASTICITÉ DE TRACTION

DU CAOUTCHOUC VULCANISÉ,

PAR M. H. BOUASSE,

Professeur à l'Université de Toulouse.

Dans deux Mémoires, parus ici même [1], j'ai déterminé, avec la collaboration de M. Carrière, la forme des courbes de traction d'un caoutchouc vulcanisé et étudié les particularités qu'elles présentent. Nous n'avons jamais prononcé le mot *module de traction*, nous bornant à classer les courbes et leurs variations.

Je vais montrer dans le Mémoire actuel la cause de cette réserve, et prouver à quel point il est illégitime de déduire la valeur du module de l'étude des courbes, ainsi que l'ont fait autant dire tous ceux qui se sont occupés de la question.

Je décrirai plusieurs appareils corrects pour l'étude du module et je comparerai les résultats qu'ils fournissent ; je reprendrai la question controversée de la variation du module avec la température ; je discuterai l'emploi des méthodes basées sur la propagation d'un ébranlement longitudinal ; enfin je mesurerai l'absorption d'énergie dans les parcours de faible étendue.

Je ne me propose pas tant de tout dire sur ces phénomènes que de poser le problème sur des bases indiscutables et de présenter un résumé critique des Mémoires qui abondent sur le caoutchouc. Chaque point pourra ensuite être développé à l'infini en faisant varier la nature du caoutchouc ; mais ces recherches longues et minutieuses, fort utiles pour la pratique, tout expérimentateur soigneux les conduira à bien, pourvu qu'il consente à partir de principes sûrs et à user de méthodes correctes.

(1) *Courbes de traction du caoutchouc vulcanisé* (*Annales de Toulouse*, t. V, p. 257). — *Réactivité du caoutchouc vulcanisé* (*Annales de Toulouse*, t. V, p. 285).

DÉFINITION DU MODULE DE TRACTION EN PARTANT DES COURBES DE TRACTION.

1. La définition du module de traction (ou module d'Young) qui mesure l'élasticité parfaite des métaux n'est pas applicable *a priori* à un corps aussi extensible que le caoutchouc. Il ne s'agit plus en effet d'allongements qui sont de l'ordre du millième de la longueur initiale, mais d'allongements qui peuvent atteindre huit fois sa valeur. Le premier problème à résoudre est donc le choix d'une définition.

Pour les petites déformations, les formules

$$L - L_0 = \frac{L_0 P}{s_0 E_1}, \tag{1}$$

$$L - L_0 = \frac{LP}{s E_2}, \tag{2}$$

$$L - L_0 = \frac{LP}{s_0 E_3}, \tag{3}$$

$$L - L_0 = \frac{L + L_0}{s + s_0} \frac{P}{E_4} \tag{4}$$

(où P est la charge, L, s la longueur et la section actuelles, L_0, s_0 la longueur et la section initiales) sont évidemment équivalentes.

On a proposé encore les formules suivantes :

$$\frac{dL}{L} = \frac{dP}{s E_5}, \tag{5}$$

$$\frac{dL}{L} = \frac{1}{E_6} d\left(\frac{P}{s}\right). \tag{6}$$

Pour distinguer les différents E, nous leur donnons comme indice les numéros de la formule.

Nous allons chercher d'abord ce que ces formules donnent pour la courbe de traction en admettant : 1° que E est constant ; 2° que le volume ne change pas ; 3° que l'élasticité est parfaite.

Dans un article paru dans le *Journal de Physique* en 1903, j'ai montré que la seconde hypothèse est très exactement vérifiée et qu'elle revient à prendre 0,5 comme valeur du coefficient σ de Poisson, en donnant à ce dernier une définition proposée par Röntgen pour les corps très extensibles. On se reportera à ce travail. (*Voir* une Note à la fin de ce Mémoire.)

La seconde hypothèse donne la condition $sL = s_0 L_0$, $s = s_0 \Lambda^{-1}$ en employant les notations déjà utilisées dans mes précédents Mémoires sur le caoutchouc.

Voici ce que deviennent les équations

$$(1') \qquad \Lambda - 1 = \frac{P}{s_0 E},$$

$$(2') \qquad \frac{\Lambda - 1}{\Lambda^2} = \frac{P}{s_0 E},$$

$$(3'), (4'), (5') \qquad 1 - \frac{1}{\Lambda} = \frac{P}{s_0 E},$$

$$(6') \qquad \frac{\log \Lambda}{\Lambda} = \frac{P}{s_0 E}.$$

Portons Λ en abscisses, P en ordonnées et faisons varier Λ entre 1 et ∞. Les courbes se classent en trois groupes. La courbe (1′) est une droite. La courbe (3′) (4′) (5′) est une hyperbole, elle a une asymptote horizontale; pour de grands allongements, la charge tend vers la valeur $P = s_0 E$. Enfin, pour le troisième groupe, la charge passe par un maximum. Nulle pour $\Lambda = 1$, elle redevient nulle pour $\Lambda = \infty$. La courbe (2′) admet un maximum pour $\Lambda = 2$ et un point d'inflexion pour $\Lambda = 3$; la courbe (6′) admet un maximum pour $\Lambda = 2,72$ et un point d'inflexion pour $\Lambda = 4,48$.

Or la forme de la courbe de traction est connue depuis Villari et représentée figure 1. Ce n'est ni une droite ni une hyperbole, puisqu'elle possède un point d'inflexion. D'ailleurs elle n'a pas de maximum. En définitive elle ne présente aucune analogie, *même lointaine*, avec les courbes que nous fournissent les six formules les plus simples. Assurément, comme nous le verrons, il n'est guère permis de définir le module par la courbe de traction ; toutefois l'allure du phénomène diffère si complètement de ce que nos hypothèses feraient prévoir, que nous pouvons déjà conclure que *le module d'élasticité* E *ne peut être constant, quelle que soit la définition que l'on choisisse,* même en superposant à l'élasticité parfaite que nous avons admise, un phénomène de réactivité que l'hystérésis considérable du caoutchouc rend absolument nécessaire.

2. Pour comprendre le sens des essais précédents il ne faut pas oublier qu'il n'existe aucune analogie entre les courbes dites *de traction* du caoutchouc et des métaux. Il n'est jamais venu à l'idée d'aucun expérimentateur de déduire le module d'Young de la considération des courbes de traction d'un métal, parce qu'elles correspondent évidemment à des déformations permanentes. Nous savons au contraire (*Sur les courbes de traction*, etc., n° 1) que les déformations du caoutchouc sont presque entièrement temporaires. *Si donc nous considérons provisoirement la réactivité comme accessoire*, il n'est pas absurde *a priori* de chercher à déduire de la forme des courbes de traction un paramètre, soit constant,

soit fonction bien déterminée de la longueur, ou de la charge, ou de la longueur et de la charge, qui caractérise les *propriétés purement élastiques* du caoutchouc. D'une manière plus générale, *si la réactivité n'intervenait que comme correction toujours petite dans la forme des courbes de traction,* on pourrait tirer de celles-ci des indications sur les propriétés purement élastiques du caoutchouc, vérifier si elles ne sont fonction que de la longueur et de la charge, ou si elles dépendent de l'histoire antérieure tout entière du fil considéré,... quitte ensuite à corriger les résultats de l'influence de la réactivité. Je rappelle, ce que j'ai développé bien souvent, et en particulier dans un travail paru dans la *Revue générale des sciences* pour 1904, que nous devons nous efforcer de classer les phénomènes en groupes, et ne pas rapporter *a priori* à la même cause des propriétés aussi différentes que les déformations purement élastiques et la réactivité.

3. Les considérations du n° 1 nous enlèvent l'espoir de trouver un paramètre *constant* pour caractériser les *déformations purement élastiques.* Il ne semble pas d'ailleurs qu'on puisse espérer découvrir un paramètre qui ne soit fonction que de la longueur ou de la charge. La relation qui existe entre la charge et la longueur n'est pas déterminée; pour une même longueur le fil peut, suivant les opérations antérieures, supporter une infinité de charges différentes; de même, pour une même charge, le fil peut avoir une infinité de longueurs différentes. En d'autres termes, le point figuratif peut occuper une portion plus ou moins étendue du plan longueur-charge. Dans ces conditions, il ne semble guère probable que les propriétés purement élastiques, *à supposer qu'on puisse les distraire des phénomènes de réactivité,* ne soient pas fonction de la position du point considéré dans le plan et, par conséquent, à la fois de la longueur et de la charge.

En d'autres termes, portant normalement au plan P, L, en un point donné de ce plan, une longueur qui représente la propriété considérée, généralement l'extrémité de cette longueur décrira une surface (à supposer qu'elle ne remplisse pas un volume) : il est difficile d'admettre *a priori* que cette surface est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'un des axes de coordonnées.

Mais on peut aller plus loin et montrer que l'hypothèse que *la réactivité n'intervient que comme correction dans la forme des courbes de traction est absolument erronée;* en d'autres termes, ces courbes sont le résultat complexe des deux groupes au moins de phénomènes, *du même ordre de grandeur,* agissant simultanément; il est impossible de tirer généralement de ces courbes une indication précise ni sur l'un ni sur l'autre des deux groupes, considérés isolément. Cette proposition résulte de l'énormité des phénomènes de réactivité, de l'extraordinaire variabilité des cycles suivant la technique, de l'influence considérable que la vitesse a sur les parcours : tous faits tendant à prouver l'importance de la variable *temps* dans les résultats. Dans ces conditions, le module d'Young, tel que l'ont

défini de trop nombreux physiciens, à partir des courbes de traction ou même plus spécialement à partir de cycles de grande étendue, ne peut servir qu'à énoncer d'une manière plus ou moins habile les propriétés infiniment variables et complexes des courbes de traction, et ne peut avoir aucune prétention à représenter, même approximativement, les propriétés purement élastiques, dégagées des autres phénomènes et en particulier de la réactivité.

4. Quoi qu'il en soit, envisageons d'abord la question sous cet aspect.

Au voisinage d'un point de coordonnées Λ, P, la courbe de traction est définie par sa tangente. Les formules (1), (2), (3), (4), qui font dépendre le module E de toute la partie de la courbe de traction comprise entre l'origine et le point considéré, ne peuvent être d'aucune utilité. Il nous reste donc le choix entre les formules

$$E_5 = \frac{dP}{dL}\frac{L}{s}, \tag{5}$$

$$E_6 = \frac{d\left(\frac{P}{s}\right)}{dL} L \tag{6}$$

déjà indiquées, et la formule

$$E_7 = \frac{dP}{dL}\frac{L_0}{s_0} = \frac{1}{s_0}\frac{dP}{d\Lambda}, \tag{7}$$

pour nous en tenir aux plus simples.

Ainsi Villari (*Pogg. Ann.*, t. CXLIII, 1871) calcule la valeur de E par la formule (5), à partir de la courbe de charge d'un caoutchouc neuf. Le volume variant peu, il pose

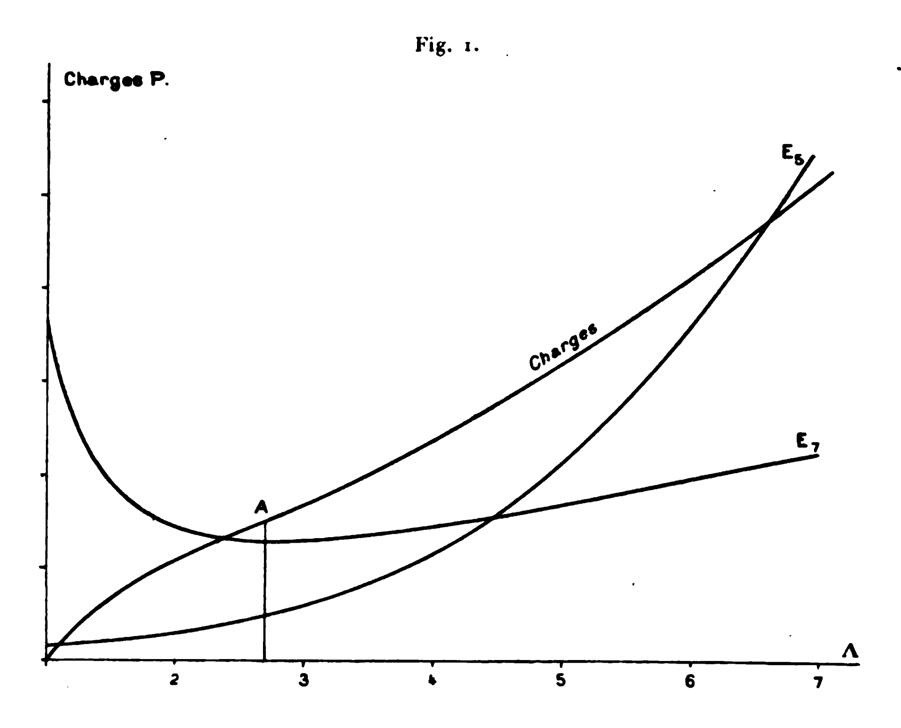
$$sL = V_0, \qquad \text{d'où} \qquad E_5 = \frac{dP}{dL}\frac{L^2}{V_0}.$$

La valeur V_0 lui est fournie par des mesures de diamètre faites en un grand nombre de points; elle pourrait être obtenue plus aisément par la balance hydrostatique. On a représenté figure 1 une courbe analogue à celles de Villari. Voici les conclusions que Villari tire de ses expériences :

Le caoutchouc possède trois modules d'élasticité, un premier constant et petit de l'ordre de 0,075; un second encore constant et grand de l'ordre de 30; et enfin un moyen et variable qui croît rapidement et relie le premier au troisième. Le premier s'applique de $\Lambda = 1$ à $\Lambda = 2$, le second pour $\Lambda > 4$, et le troisième pour les valeurs intermédiaires. Les nombres de Villari ne semblent pas vérifier ces conclusions; disons simplement que le paramètre E_5 de Villari, très petit et à peu près constant pour Λ voisin de 1, croît régulièrement quand Λ croît. La courbe E_5 (*fig.* 1), représente l'allure des variations de E en fonction de Λ.

Quant aux valeurs numériques, elles sont infiniment variables suivant le caoutchouc utilisé. E_5 est exprimé en kilogrammes par millimètre carré. Pour le caout-

Fig. 1.



chouc dont se sert Villari, une surcharge de $0^g,75$ serait donc capable d'allonger de 1 pour 100 un fil ayant 1^{mm^2} de section, quand il est tendu par une charge faible.

Pour faciliter les discussions et préciser les idées, nous admettrons que *la courbe de première traction* peut se représenter par l'expression

$$P = a\left(1 - \frac{1}{\Lambda}\right) + \frac{b}{2}(\Lambda^2 - 1);$$

on en tire

$$\frac{dP}{d\Lambda} = \frac{a}{\Lambda^2} + b\Lambda, \qquad \frac{d^2P}{d\Lambda^2} = -\frac{2a}{\Lambda^3} + b.$$

La courbe présente un point d'inflexion pour $\Lambda^3 = 2a : b$. La tangente à la courbe P, Λ s'incline donc au début (au voisinage de $\Lambda = 1$), devient le plus horizontale possible pour $\Lambda^3 = 2a : b$ (point d'inflexion A), puis se relève indéfiniment. On a

$$E_5 = \frac{L_0}{s_0}(a + b\Lambda^3), \qquad E_7 = \frac{1}{s_0}\left(\frac{a}{\Lambda^2} + b\Lambda\right).$$

La figure 1 représente en unités arbitraires P, E_5, E_7 en fonction de Λ; les

calculs ont été faits en posant $a = 800$, $b = 80$. Elle coïncide à peu près avec une des courbes de Villari.

Il ne s'agit ici que de préciser les idées. Il serait bien souvent plus exact de poser

$$P = a\left(1 - \frac{1}{\Lambda}\right) + \frac{b}{3}(\Lambda^3 - 1),$$

$$\frac{dP}{d\Lambda} = \frac{a}{\Lambda^2} + b\Lambda^2, \qquad \frac{d^2P}{d\Lambda^2} = -\frac{2a}{\Lambda^3} + 2b\Lambda.$$

La courbe présente alors un point d'inflexion pour $\Lambda^4 = a : b$. On a

$$E_6 = \frac{L_0}{s_0}(a + b\Lambda^4), \qquad E_7 = \frac{1}{s_0}\left(\frac{a}{\Lambda^2} + b\Lambda^2\right).$$

On peut avoir quelquefois à considérer le produit

$$E_6 s = \frac{dP}{dL} L = \frac{dP}{d\Lambda}\Lambda.$$

Il est, suivant les hypothèses,

$$\frac{a}{\Lambda} + b\Lambda^2, \qquad \frac{a}{\Lambda} + b\Lambda^3.$$

Il peut, suivant les valeurs de a et de b, présenter un minimum pour $\Lambda > 1$.

5. Les auteurs qui ont défini le module, à partir des courbes de traction, ont choisi tantôt l'une, tantôt l'autre des formules (5), (6), (7). Aussi ont-ils énoncé les mêmes résultats généraux sous des formes très différentes donnant l'illusion de véritables découvertes.

Voici, par exemple, Stevart qui, dans une brochure sur l'*Élasticité du caoutchouc vulcanisé* (Gauthier-Villars, 1888), prend pour définition du module la formule

$$E_7 = \frac{1}{s_0}\frac{dP}{d\Lambda}. \tag{7}$$

Naturellement, il conclut : « qu'à l'origine, il a une valeur maximum correspondant au minimum d'extensibilité (le mot *maximum* est incorrect); il diminue ensuite jusqu'au tiers de cette valeur au moment où la longueur est doublée (ceci ne vaut que pour l'échantillon utilisé par l'auteur), puis augmente de nouveau jusqu'au point de rupture ».

Imbert (*Thèse* de Marseille, 1880) pose la même définition, se sert encore de la courbe de charge et naturellement parvient aux mêmes résultats.

Wertheim avait, lui aussi, déduit le paramètre E de la courbe de charge.

Cantone (*Rend. Ist. Lumb.*, t. XXXI, 1898) fait parcourir des cycles au fil de caoutchouc et déduit les valeurs de E de la forme des courbes d'aller et de retour, par la définition suivante, dérivée de la formule (6) :

$$E_6 = \frac{\frac{P'}{s'} - \frac{P}{s}}{\log L' - \log L}.$$

A défaut d'autres avantages, ces derniers calculs ont au moins celui de mettre en évidence la relativité de la définition. En somme, dire avec Cantone que le module croît dans la première partie du cycle (charges croissantes) et décroît dans la seconde (charges décroissantes), revient à donner des indications sur la forme des courbes qui limitent le cycle *dans une expérience particulière*. Comme ces courbes sont différentes suivant les limites du cycle, la manière dont il est décrit et généralement toutes les opérations antérieures, les nombres E sont naturellement très variables. Ce n'est pas une objection contre leur emploi : mais il est essentiel de remarquer qu'ils ne peuvent, en aucune manière, caractériser les propriétés purement élastiques du caoutchouc, aucun procédé ne permettant l'élimination de l'influence de la réactivité sur la forme des courbes.

Les physiciens ont le droit de traduire leurs expériences comme il leur plaît, à la condition de ne pas donner le change sur le caractère de leurs résultats. Or, on attache au mot *module* l'idée d'un paramètre caractéristique des propriétés purement élastiques; on n'a plus le droit d'en faire une fonction arbitrairement choisie des coordonnées d'un point d'une courbe et de sa tangente, alors que cette courbe est le résultat de deux et même trois groupes de phénomènes : élasticité parfaite, réactivité, déformations permanentes.

De plus, il est bien inutile d'introduire dans la question le mot *module*, si le simple tracé des courbes donne des indications équivalentes : dans toutes les définitions rappelées, le module est une fonction plus ou moins complexe de L, P, s, $\frac{dP}{dL}$, quantités que l'on connaît immédiatement par le tracé de la courbe.

On ne supprime aucune difficulté en utilisant des cycles *étendus* fixés. Il n'est pas sûr que, même après un certain nombre de répétitions, les courbes qui les limitent deviennent indépendantes de l'histoire antérieure du fil; certainement elles restent sous la dépendance des phénomènes de réactivité, qu'il faut précisément s'efforcer d'éliminer pour obtenir une donnée nouvelle sur les propriétés de la matière.

6. *Définition du module par la vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal unique.* — Supposons que nous soyons parvenus en un point quel-

conque A d'une courbe de charge ou de décharge pour lequel la charge, la longueur et la section soient P, L, s. Après un temps d'arrêt plus ou moins long en ce point, déplaçons brusquement une des extrémités du fil d'une quantité *très petite,* soit pour diminuer, soit pour augmenter la tension. Il naît une onde longitudinale condensée ou dilatée qui se déplace avec une vitesse que l'on mesure.

La propagation d'un ébranlement longitudinal le long d'un cylindre se fait avec une vitesse uniforme donnée par la formule

$$v = \sqrt{\frac{g E_5}{\delta}}.$$

E_5 est défini par la relation (5); δ est le poids spécifique. Cette vitesse est relativement faible pour le caoutchouc, comme le montre le calcul suivant. Soient $E = 0,1$ en kilogrammes par millimètre carré, $\delta = 1$ en kilogrammes par décimètre cube; pour appliquer la formule nous devons poser $g = 9,81$ et exprimer toutes les quantités dans le système du kilogrammètre. On aura donc

$$E = 10^5 \text{ kilogrammes par mètre carré}, \qquad \delta = 10^3 \text{ kilogrammes par mètre cube},$$

d'où

$$v = 31^{m},3.$$

Je donne ce nombre seulement pour fixer les idées.

Assurément, la formule présente quelques incertitudes. Outre qu'on ignore si la déformation est isotherme ou adiabatique, le frottement intérieur, dont nous ne connaissons pas la loi, mais qui est considérable, peut modifier profondément la vitesse. Quoi qu'il en soit, admettons comme légitime de poser, *dans les conditions précédentes,* $E_5 = kv^2$, k étant un coefficient indépendant de la tension et de la température; la formule fournit un moyen de déterminer E_5 pour des tensions et des températures quelconques.

7. Il est essentiel de remarquer que la quantité $E_5 = \frac{dP}{dL}\frac{L}{s}$, déterminée d'après ces hypothèses, se rapporte au point A considéré de la courbe de charge et de décharge. Le quotient $\frac{dP}{dL}$ est celui qui correspond à la courbe de déformation obtenue à partir du point A quand la tension augmente ou diminue. Il résulte de là que ce quotient doit généralement avoir une valeur très différente, si l'on produit un allongement ou si l'on produit un raccourcissement. En d'autres termes, à partir d'un état déterminé de tension, obtenu par une suite déterminée d'opérations, une onde dilatée (qui correspond au déplacement brusque d'une des extrémités du fil dans le sens d'un accroissement de longueur) ne se propage pas avec

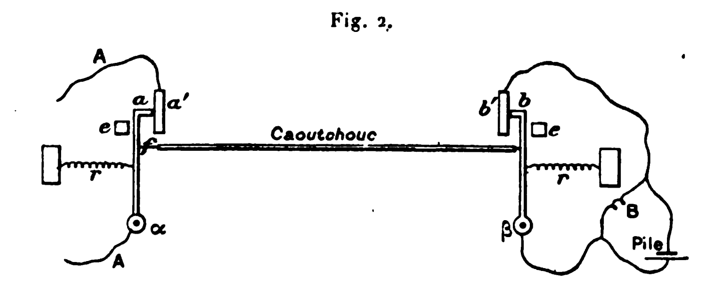
la même vitesse qu'une onde condensée (qui correspond au déplacement brusque d'une des extrémités du fil dans le sens d'une diminution de longueur). On peut même prévoir que cette vitesse variera notablement avec le temps que le fil aura passé sous une certaine charge et que, pour un temps suffisant, les deux vitesses que nous venons de distinguer se rapprocheront l'une de l'autre jusqu'à se confondre.

Ainsi, cette méthode donnera, *avec beaucoup de difficulté et quelque incertitude,* des résultats tout aussi variables que ceux qu'on obtiendrait en calculant E à partir des courbes de charge ou de décharge. Il serait assurément du plus haut intérêt de voir si l'expérience confirme ces raisonnements, mais cela n'a jamais été fait et, autant qu'on peut en juger, il faudrait une singulière habileté pour mener à bien des expériences aussi délicates.

8. En 1872, Stefan (*Wien. Acad. Sitzungsberichte,* t. LXV) a proposé une méthode, appliquée depuis par Exner (*ibid,* t. LXIX, 1874), qui s'appuie sur la mesure de la vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal, mais qui, malheureusement, est d'une interprétation extrêmement difficile.

Ils utilisent le chronoscope de Hipp. C'est un mouvement d'horlogerie à poids réglé par une lame vibrante. Un ou plusieurs électros, agissant sur une armature unique, peuvent instantanément embrayer ou désembrayer les aiguilles entraînées par le mouvement. L'une d'elles exécute un tour de son cadran en un dixième de seconde et donne les millièmes de seconde; l'autre fait un tour de son cadran en 10ˢ et donne les dixièmes de seconde. Nous supposerons, par exemple, que la rupture d'un circuit électrique A fait partir les aiguilles et que la fermeture d'un circuit B les arrête; peu importent les dispositions mécaniques. Voici maintenant le schéma de l'appareil employé et le résumé de la méthode (*fig.* 2).

Fig. 2.



Le caoutchouc tendu applique les pièces métalliques a et b, mobiles autour des axes α et β, contre les pièces fixes a' et b'. Le circuit A est alors fermé, le circuit B est mis en court-circuit et rien ne passe à travers. Les pièces a et b sont tirées vers les buttoirs e par les ressorts r. Enfin, le caoutchouc est relié à la pièce a par

un fil à coudre *f* : sa section est d'environ 2^{mm^2}, sa composition est telle que 100^g doublent sa longueur.

On brûle le fil *f*; brusquement le circuit A est rompu, les aiguilles du chronoscope se mettent à tourner. L'ébranlement se propage, la tension décroît le long du fil; au bout d'un certain temps, les pièces *b* et *b'* se séparent, le court-circuit disparaît, le courant passe dans le circuit B et les aiguilles s'arrêtent. On mesure ainsi le temps *t* qui s'écoule entre la rupture du contact *aa'* et la rupture du contact *bb'*. Le quotient de la longueur du fil (quelques mètres) par le temps *t* donne une vitesse *v* qu'il s'agit d'interpréter.

9. C'est justement ce qu'il est impossible de faire, l'expérience ne correspondant pas à des conditions bien déterminées. Nous sommes loin des définitions du n° 6. Dans l'expérience de Stefan, on n'impose pas un petit allongement ou raccourcissement à partir d'un point du plan longueur-charge; on revient jusqu'à la tension nulle à partir de longueurs qui peuvent atteindre 5 fois la longueur initiale. Or, pour que le ressort *r* écarte l'une de l'autre les pièces *b* et *b'*, il faut que la tension du caoutchouc au niveau de la pièce *b* soit descendue au-dessous de la tension actuelle du ressort *r*. Pour nous faire une idée du phénomène, supposons qu'on déplace successivement de très petites longueurs l'extrémité *f* du caoutchouc, conformément à la technique du n° 6. Pour chacun de ces petits déplacements, il naît une onde condensée qui se propage le long du caoutchouc et dont la vitesse varie (et, comme nous le verrons, diminue) à mesure que le caoutchouc se trouve de moins en moins tendu. *Donc la vitesse qu'on enregistre doit être peu supérieure à la vitesse qui correspond à la tension du ressort r, quelle que soit d'ailleurs la tension initiale du caoutchouc.* Pour qu'il soit possible d'interpréter les résultats, il faudrait donc que la tension du ressort *r* fût variable avec l'expérience et toujours très peu inférieure à la tension du caoutchouc au moment où l'on brûle le fil *f*. Il ne semble pas que les auteurs aient systématiquement réalisé cette condition; les résultats obtenus indiquent, en effet, une augmentation de la vitesse de propagation beaucoup trop petite quand la tension initiale croît, conformément au raisonnement précédent. La tension du ressort *r* devait être, en réalité, assez peu différente d'une expérience à l'autre.

Mais cette précaution eût-elle été prise, que la méthode n'en resterait pas moins mauvaise, puisqu'il est impossible, avec la technique employée, de déterminer la succession des valeurs de E le long d'un cycle. A la fin de chaque expérience, en effet, la tension est nulle; les résultats successifs ne correspondent pas aux divers points d'un même cycle, mais aux extrémités de cycles différents. Sans parler de la brutalité de la déformation et de la difficulté de comparer les résultats d'expériences séparées par de tels chocs.

Comme je l'annonce plus haut, ces considérations sont justifiées par les faits.

Voici les vitesses trouvées par Exner, à partir des allongements A (page 107 du Mémoire, Tableau II),

A.	2.	3.	4.	5.
v	$47^m,2$	$56^m,2$	$62^m,9$	$65^m,9$
E_5	1	1,41	1,77	1,95

Les valeurs de E_5 sont déduites de la formule $E_5 = kv^2$, en prenant $E = 1$ pour $A = 2$. Or, nous avons vu que Villari, calculant les valeurs numériques de E, à partir de la courbe de charge et avec la même définition, trouve des nombres qui varient dans les mêmes conditions de 1 à 13, ou de 1 à 34, suivant qu'on considère les Tableaux II et III ou le Tableau I de son Mémoire. Assurément, il faudrait faire le calcul sur la courbe de décharge du caoutchouc lui-même utilisé par Exner : il est cependant certain que les variations de E seraient d'un autre ordre de grandeur.

Considérons d'ailleurs la quantité E_7 qui est proportionnelle à $dP : dA$. On l'obtient, à un facteur constant près, en divisant E_5 par le carré de la longueur actuelle. Comme nous le verrons, dans une définition correcte de E_5, E_7 présente toujours un minimum au voisinage de $A = 2,5$, même sur une courbe de décharge. Or, nous trouvons, d'après les nombres d'Exner,

A.	2.	3.	4.	5.	
E_7	250	157	110	78	unités arbitraires,

ce qui est sûrement inexact.

Ainsi, même correctement appliquée, la méthode basée *sur la vitesse de propagation d'une déformation unique* revient à prendre, pour point de départ de la définition du module, les courbes de charge et de décharge et est sujette à de nombreuses incertitudes. Appliquée comme l'ont fait Stefan et Exner, il est impossible d'en tirer quoi que ce soit.

Ces auteurs ont aussi étudié l'influence de la température. La vitesse diminue notablement quand la température croît. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce résultat, intéressant au point de vue qualitatif.

DÉFINITION DU MODULE PAR LES CYCLES TRÈS PETITS.

10. Nous sommes donc amenés à baser sur les propriétés des cycles très petits répétés un grand nombre de fois une définition du module.

Un tel cycle est défini par son inclinaison $\frac{dP}{dL} = \mathcal{E}$; les deux principales

méthodes utilisées dans ce Mémoire fournissent directement cette quantité. Elle ne diffère du paramètre E_7 que par le facteur $L_0 : s_0$. Connaissant $\mathcal{E}$, on peut calculer la valeur de E_5 d'après la loi très suffisamment exacte, en général, *que le volume est invariable*. On a, en effet,

$$sL = s_0 L_0, \qquad \text{d'où} \qquad s_0 L_0 E_5 = \mathcal{E} L^2.$$

Il suffit de multiplier $\mathcal{E}$ par le carré de la longueur actuelle pour obtenir E_5 en valeur relative. Ce paramètre intervient directement dans la propagation des ondes longitudinales : il est immédiatement déterminable par l'expérience.

Le calcul de E_6, à partir de $\mathcal{E}$, exige que l'appareil permette de déterminer non seulement la longueur actuelle, mais encore la tension actuelle. Même en admettant la loi précédente, on trouve

$$s_0 L_0 E_6 = \mathcal{E} L^2 + PL.$$

La méthode statique, dont il sera parlé, fournit toutes les quantités nécessaires. Le paramètre E_6 ne correspond pas à une expérience directe; il a été proposé par M. Cantone, comme conséquence d'idées théoriques passablement confuses, sur lesquelles je me garderai bien d'insister, et qu'on trouvera tout au long dans le *Nuovo Cimento* pour 1898. J'ai déjà dit que M. Cantone le calcule à partir des courbes de traction.

11. Dans la première méthode de mesure du paramètre $\mathcal{E}$, ou *méthode statique à charge moyenne constante,* on applique strictement la définition. On impose une charge périodiquement variable, suivant une loi connue, entre deux limites fixes et rapprochées P_1 et P_2, et l'on mesure la variation correspondante de longueur. Je reviendrai plus loin sur la technique : on se reportera utilement au Chapitre I de mon Mémoire *Sur les courbes de déformation des fils métalliques,* où cette méthode est appliquée, pour la première fois, systématiquement et correctement (*Ann. de la Fac. de Toul.,* 1899). On obtient un coefficient proportionnel à E_7.

12. Dans la seconde méthode, ou *méthode dynamique à longueur moyenne constante,* on utilise l'élasticité du caoutchouc à entrenir des oscillations pendulaires. Voici la théorie de l'expérience (*fig.* 3).

Un pendule est suspendu au point O et oscille dans le plan du tableau. Soient $\mathfrak{M}$ son moment d'inertie, $C\theta$ le couple dû à la pesanteur pour une élongation θ; la durée d'oscillation T_1 est donnée par la formule

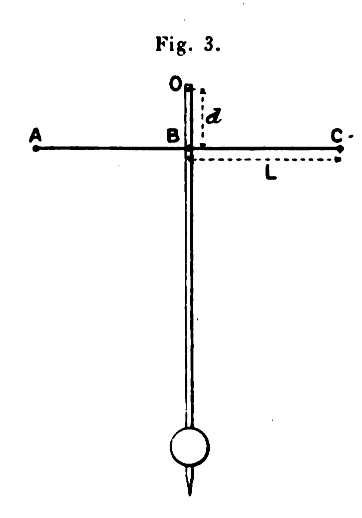
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{C}}.$$

Fixons maintenant au point B du pendule le milieu d'un caoutchouc AC, plus ou moins tendu entre les points fixes A et C. Soit $d = \overline{OB}$. Quand le pendule oscille, le point B se déplace de la longueur θd. Posons

$$\mathcal{E} = dP : dL.$$

Le couple qui résulte de la variation de tension des deux moitiés du caoutchouc

Fig. 3.



agissant dans le même sens est $2\mathcal{E}d^2\theta$. Sous l'influence combinée de ce couple et de la pesanteur, la durée d'oscillation devient

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{C + 2\mathcal{E}d^2}};$$

d'où l'on tire aisément

$$\mathcal{E} = \frac{C}{2d^2}\,\frac{T_1^2 - T_2^2}{T_2^2} = \frac{2\pi^2\mathfrak{M}}{d^2}\left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}\right).$$

Cette méthode permet les mesures absolues, mais se prête surtout aux mesures relatives, le coefficient $C : 2d^2$ étant rigoureusement invariable.

Il semble qu'il existe une méthode plus simple : fixons un fil de caoutchouc par son extrémité supérieure et suspendons librement à son extrémité inférieure une masse M qui donne un allongement A. Faisons osciller la masse : la durée des oscillations est

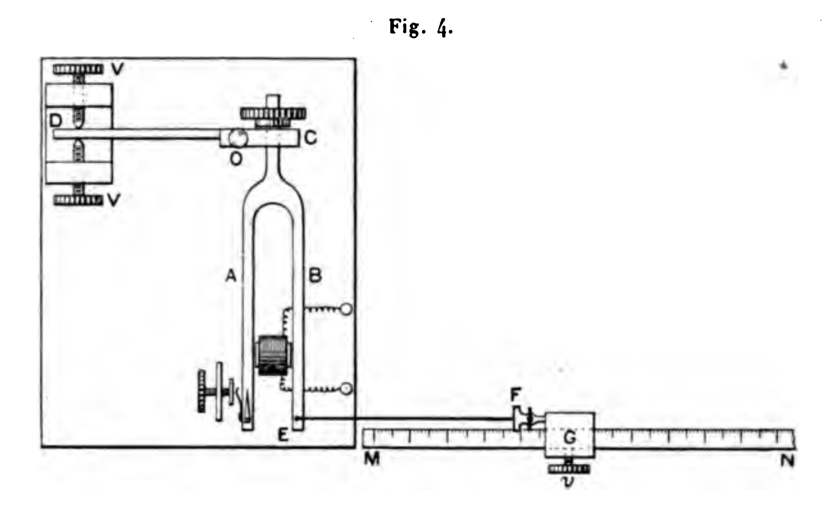
$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\mathcal{E}}}.$$

La difficulté technique d'application de la méthode dynamique, encore plus grande sous la seconde forme que sous la première, réside dans l'entretien des

sique de Melde pour l'obtention des vibrations transversales. La figure 4 représente l'appareil.

L'une des extrémités de caoutchouc est attachée à l'une des branches du diapason; l'autre est prise dans une pince qu'on peut déplacer le long d'un banc et

Fig. 4.



arrêter dans une position quelconque à l'aide de la vis de pression v. Le banc, long de 5^m, est facilement construit avec du feuillard et des règles de bois vissées sur une pièce de bois en forme de T renversé. Le banc est aussi rigoureusement que possible normal aux branches du diapason qui est entretenu électriquement.

Quand la tension du caoutchouc atteint et dépasse 1^{kg}, la pièce qui supporte le talon du diapason fléchit et l'une des branches frappe l'électro-aimant; le phénomène devient irrégulier. Pour obvier à cet inconvénient, j'ai fait monter le diapason sur une pièce qui peut tourner, à frottement dur, autour de l'axe O : elle est terminée par une pièce rigide prise entre les vis V. Par leur moyen, on règle convenablement la position du diapason, quelle que soit la tension du caoutchouc.

Les branches du diapason oscillent sans *battements,* malgré la tension du caoutchouc, ce qui est conforme à la théorie. Pour obtenir des battements, il faut, non pas exercer une tension sur l'une d'elles, mais ajouter une masse.

L'expérience actuelle, sur le détail et la discussion de laquelle je reviendrai plus loin, a un sens théorique précis. Les oscillations sont petites et nombreuses. On s'étonne que Stefan ait cherché à lui substituer une expérience (n° 8) beaucoup plus difficile et sans valeur théorique.

VARIATION DU MODULE AVEC LA TEMPÉRATURE ET HYPOTHÈSE DE LA LONGUEUR FONCTION DÉTERMINÉE DE LA CHARGE ET DE LA TEMPÉRATURE.

14. Nous avons vu combien la question de la définition du module est loin d'avoir reçu jusqu'à présent une solution satisfaisante. Nous n'étonnerons personne en disant que l'étude des variations de ce module avec la température est peu avancée.

Voici, rapidement résumées, les expériences faites à ce sujet :

Thomas (*Les Mondes,* 1869) écrit : « Tous les contremaîtres savent que le caoutchouc chaud est plus raide, comme ils disent, que le froid; c'est-à-dire que sa force d'élasticité est plus considérable, que le même effort l'allonge moins. » C'est là une affirmation sans précision et sans preuve.

Les expériences de Schmulewisch (*Pogg. Ann.*, t. CXLIV, 1871) ne prouvent pas davantage. Il chauffe un fil de caoutchouc *à longueur constante* et détermine la variation de tension. Le procédé expérimental est peu précis mais original.

L'auteur attache le fil de caoutchouc à une corde de boyau qui repose sur un sonomètre, les autres extrémités du fil et de la corde sont invariablement fixées. Le caoutchouc est entouré d'un manchon dans lequel on verse de l'eau pour modifier la température. L'expérience prouve que le son rendu par la corde de boyau (dont la tension est celle du caoutchouc et dont la longueur reste sensiblement constante et indépendante de la tension) monte quand on chauffe le caoutchouc, ce qui prouve uniquement que la tension du caoutchouc, *chauffé à longueur constante,* croît.

Ce résultat n'a aucun rapport avec le problème que Schmulewisch se proposait de résoudre.

Posons

$$\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \alpha\, dt + \frac{dP}{E_s s},$$

ce qui n'implique aucune hypothèse pour une transformation petite. Faisons

$$d\Lambda = 0;$$

il vient

$$dP = -\alpha E s\, dt.$$

Or, on sait que $\alpha < 0$, au moins si P n'est pas trop petit; donc on a simultanément $dt > 0$ et $dP > 0$, ce que confirme l'expérience : le signe du quotient $\frac{\partial E}{\partial t}$ importe peu.

Schmulewisch tire de ses expériences une seconde conclusion : P croît d'au-

tant plus pour un même écart de température, ou si l'on veut $\frac{\partial P}{\partial t}$ est d'autant plus grand que P est plus grand. Cela veut dire que le produit $\alpha E s$, envisagé comme fonction de P, croît en valeur absolue quand P croît. Or on sait bien que α croît en valeur absolue quand P croît; mais le produit $E_5 s$ varie d'une manière compliquée avec P; on ne sait pas si, généralement, $\alpha E s$ doit croître avec P.

En définitive, le Mémoire de Schmulewisch n'apprend rien sur les variations du module avec la température, et ce qu'il apprend était antérieurement connu.

Rüssner (*Carls Repertorium,* t. XVIII, 1882 et *Wied. Ann.,* t. XLIII, 1891) prend pour E la définition précédente (n° 5); il opère directement en imposant des charges variables; il trouve que E_5 décroît quand la température croît. Lundal (*Wied. Ann.,* t. XLVI, 1898) arrive à la conclusion opposée. Il est fort inutile de discuter les expériences de ces auteurs. Ils ne se rendent pas compte de la complexité du problème, et leur point de vue est si différent du nôtre que nous perdrions notre temps à relever leurs erreurs de raisonnement.

J'ai déjà signalé et discuté les expériences de Stefan et d'Exner (n°s 8 et 9). Voici comment ce dernier décrit ses résultats :

« Maintenant, pour pouvoir régler les expériences pour des températures plus élevées, le fil de caoutchouc est placé dans une chambre de chauffe à régulateur. On a étudié un morceau de caoutchouc vulcanisé, noir, qui a servi aux précédentes recherches. Le Tableau suivant montre la relation de la vitesse de propagation avec la température :

0°.	15°.	33°.	50°.	60°.	70°.
$54^{m},0$	$47^{m},0$	$37^{m},5$	$30^{m},7$	$30^{m},2$	$29^{m},0$

» Après cette expérience, on retrouvait à la température du laboratoire le même nombre 47^{m}; le caoutchouc n'avait donc éprouvé à peu près aucune modification permanente par l'application des hautes températures. » Pour savoir combien fausse est cette affirmation, au moins si on la généralise à toutes les espèces de caoutchouc, on relira le n° **14** de notre Mémoire *Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé.* « On voit donc d'après ce Tableau que la vitesse de propagation et, par conséquent, aussi, l'élasticité décroissent quand la température croît. »

Le texte n'indique pas si, pendant l'échauffement, la longueur du caoutchouc restait constante, ou si la tension était maintenue invariable. Il semble que la première technique ait été employée, parce qu'autrement l'auteur donnerait quelques renseignements sur la manière de ramener toujours la tension à la même valeur.

Quand on chauffe à longueur constante, P croît, au moins pour les Λ considérés. Donc, simultanément, la température s'élève et la tension croît. Exner

σ est le coefficient de Poisson défini par la condition

$$d\log\Delta = -\sigma\, d\log\Lambda.$$

Posons

$$\Phi = V : V_0;$$

il vient

$$(9)\qquad \frac{d\Phi}{\Phi} = 2\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{d\Lambda}{\Lambda} = (\alpha + 2\beta)\,dt + \frac{1-2\sigma}{Es}\,dP;$$

E a ici la définition E_3.

Posons

$$\alpha + 2\beta = \gamma;$$

α est le coefficient de dilatation longitudinale à charge constante; β est le coefficient de dilatation transversale à charge constante; γ est le coefficient de dilatation cubique à charge constante. J'ai déjà montré directement qu'il est absurde de supposer que α soit une fonction déterminée de P et de Λ et nous savons aussi que E ne peut jouir de cette propriété.

Quoi qu'il en soit, écrivons que $d\Lambda : \Lambda$ et $d\Delta : \Delta$ sont des différentielles exactes. Il vient

$$\frac{\partial\alpha}{\partial P} = \frac{\partial\left(\frac{1}{Es}\right)}{\partial t} = -\frac{1}{E^2 s}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{Es^2}\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Or

$$s = \pi D^2, \qquad \frac{ds}{s} = 2\frac{d\Delta}{\Delta}, \qquad \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{2}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial t} = 2\beta,$$

$$(10)\qquad s\frac{\partial\alpha}{\partial P} = -\frac{1}{E^2}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{2\beta}{E}.$$

On doit avoir de même

$$\frac{\partial\beta}{\partial P} = -\frac{\partial\left(\frac{\sigma}{Es}\right)}{\partial t} = -\frac{1}{Es}\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\left(\frac{1}{Es}\right)}{\partial t} = -\frac{1}{Es}\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\alpha}{\partial P},$$

$$(11)\qquad \frac{\partial\beta}{\partial P} + \sigma\frac{\partial\alpha}{\partial P} = -\frac{1}{Es}\frac{\partial\sigma}{\partial t}.$$

En particulier, si σ ne dépend pas de la température et vaut 0,5, on a

$$2\frac{\partial\beta}{\partial P} + \frac{\partial\alpha}{\partial P} = 0.$$

Ce sont ces conséquences de l'hypothèse qu'on a voulu mettre en œuvre.

16. Avant d'aller plus loin, nous devons dire quelques mots de l'ordre de

grandeur des coefficients de dilatation. Les trois coefficients α, β, γ ne sont pas les seuls que l'on rencontre. Il faut encore distinguer : 1° le coefficient γ_1 de dilatation cubique *sous tension uniforme constante;* on ne peut pratiquement en déterminer la valeur que sous la pression atmosphérique; 2° le coefficient γ' de dilatation cubique *à longueur constante.*

Voici ce que l'expérience apprend sur leur ordre de grandeur.

Sous la pression atmosphérique, Joule trouve $\gamma_1 = 0{,}00053$. Il pèse le caoutchouc dans l'eau aux températures 2°,25 au-dessus et 2°,25 au-dessous du maximum de densité.

La dilatation est positive et plus considérable que celle d'aucun autre corps solide, vingt fois plus grande que celle du platine, trois fois plus grande que celle du mercure.

Lebedeff (*Soc. chim. russe,* t. XIII) trouve un nombre encore plus grand : $\gamma_1 = 0{,}00067$.

Il s'agit dans ces expériences de caoutchouc vulcanisé. Pour du caoutchouc pure gomme, Lundal (*Wied. Ann.,* t. XLVI, 1898) trouve $\gamma_1 = 0{,}00070$ à 0° et $\gamma_1 = 0{,}00085$ à 60°.

Quoi qu'il en soit, γ_1 est certainement considérable.

Pour étudier le coefficient γ', on détermine la densité du caoutchouc enroulé sur un petit cadre muni de vis qui permettent d'imposer au fil une longueur invariable et connue dans chaque expérience, mais variable d'une expérience à la suivante. L'eau dans laquelle le cadre et le caoutchouc sont plongés est portée à des températures variables. Lebedeff a trouvé

$$\Lambda = 1, \quad \gamma_1 = 0{,}00067; \qquad \Lambda = 2, \quad \gamma' = 0{,}00068.$$

Ces coefficients sont donc à peu près égaux et γ' est plutôt un peu plus grand.

Lundal conclut que γ' est indépendant de Λ, ce qui revient à poser

$$\gamma_1 = \gamma'.$$

Ceci posé, reprenons les équations du n° 15 et écrivons

$$d\Lambda = 0;$$

il vient

$$\alpha\, dt + \frac{dP}{Es} = 0, \qquad \frac{d\Delta}{\Delta} = \beta\, dt - \frac{\sigma}{Es} dP = (\beta + \alpha\sigma)\, dt,$$

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \gamma'\, dt = 2(\beta + \alpha\sigma)\, dt = [\gamma - (1 - 2\sigma)\alpha]\, dt;$$

d'où enfin les relations

$$\gamma' = 2\beta + 2\alpha\sigma = \gamma - (1 - 2\sigma)\alpha.$$

Si l'on admet $\sigma = 0,5$, ce qui est peu éloigné de la vérité, on aurait donc

$$\gamma = \gamma' = \gamma_1.$$

Or on sait que α est généralement négatif; il faut donc que β soit positif et très grand, puisque l'on a $2\beta = \gamma' - \alpha$ et que γ' est lui-même positif et très grand.

En définitive, quand un caoutchouc est chauffé à charge constante, son diamètre doit augmenter considérablement, alors que sa longueur diminue, puisque son volume augmente malgré la diminution de longueur. Il est important de remarquer que, sous cette forme un peu vague, la proposition n'est que la traduction de l'expérience. Revenons aux conséquences de l'hypothèse.

17. Dans un Mémoire sur l'action de la tension sur les coefficients de dilatation des fils métalliques (*Pogg. Ann.*, t. CXLV, 1872), Dahlander arrive à la relation (p. 151)

$$s\frac{\partial\alpha}{\partial P} = -\frac{1}{E^2}\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Il néglige donc le terme $2\beta : E$ qui, effectivement, semble négligeable pour les fils métalliques.

On peut admettre que, pour le cuivre, $\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t}$ est de l'ordre de 0,0007; l'ordre de grandeur de β, qui est sensiblement alors égal à α, est 0,00002. Les deux termes $\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t}$ et 2β sont donc entre eux comme 18 : 1.

Mais cette formule a été employée par Graëtz pour calculer des expériences sur le caoutchouc (*Wied. Ann.*, t. XXVIII, 1886) dans un Mémoire véritablement ahurissant. L'auteur commence par admettre que la théorie de l'élasticité s'applique (ce qui est faux) et que, si l'on connaît σ, on pourra déduire le module de traction du module de torsion. Ceci posé, il étudie les variations du module de torsion avec la température, passe par le calcul au module de traction, admet que la longueur est fonction déterminée de la température et de la charge et en arrive, d'erreur en erreur, à appliquer la formule (10), sous la forme incomplète connue en Allemagne sous le nom de *Dahlander*.

Cherchons si le terme $2\beta : E$ est négligeable. D'après les expériences de Joule, on peut admettre que $-s\frac{\partial\alpha}{\partial P}$ est de l'ordre de 0,025 en kilogrammes par millimètre carré. Joule trouve en effet que la variation $\frac{\partial\alpha}{\partial P}$ est 0,0001 environ pour une corde de 240^{mm^2} de section, P étant évalué en kilogrammes.

Si la corde avait 1^{mm^2} de section, $\frac{\partial\alpha}{\partial P}$ aurait une valeur numérique 240 fois plus

grande environ, de l'ordre de 0,025 par conséquent. Or E, pour de petits allongements, est de l'ordre de 0,1; donc 2 : E est de l'ordre de 20. Il suffirait que β soit de l'ordre de 0,00125 pour que le second terme du deuxième membre de l'équation l'emportât sur le premier et nous avons démontré que β devait être positif et grand.

Graëtz introduit dans la formule les nombres de Joule obtenus pour un certain caoutchouc, puis des nombres obtenus par lui-même sur un autre caoutchouc : il trouve que la formule n'est pas vérifiée; il serait vraiment extraordinaire qu'elle le fût.

Il conclut alors que les résultats ne sont pas les mêmes suivant qu'on échauffe d'abord et que l'on tend ensuite, ou suivant que l'on procède dans l'ordre inverse. Et ce résultat fondamental, que la première expérience venue bien faite aurait prouvé directement avec surabondance, il s'efforce de le déduire de ce fait qu'une formule *incomplète* ne se vérifie pas.

18. La formule de Dahlander a pris une certaine importance, parce qu'elle paraissait résoudre le problème de la variation de E avec la température. Si, en effet, l'on peut poser

$$s\frac{\partial \alpha}{\partial P} = -\frac{1}{E^2}\frac{\partial E}{\partial t},$$

comme il est certain que le premier membre est négatif, il faut que E croisse avec la température, résultat singulier qui a beaucoup excité la curiosité. Mais nous venons de voir que cette formule est incomplète et que, complétée, elle contient des coefficients difficiles à déterminer et dont la définition même est incertaine.

On a cherché à tourner cette difficulté en prenant une autre définition pour le module d'élasticité. Posons en effet

$$dL = \alpha_1\, dt + \frac{dP}{\mathcal{E}}.$$

Le coefficient $\mathcal{E}$ est alors directement déterminable par l'expérience (n^{os} **11** et suivants). Dans l'hypothèse que L est une fonction bien déterminée de la charge et de la température, on a

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial P} = -\frac{1}{\mathcal{E}^2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \tag{12}$$

Or l'expérience prouve que le signe du premier membre est toujours négatif. Ce fait est d'ailleurs une conséquence nécessaire de l'hypothèse fondamentale que

nous discutons. On a, en effet,

$$\alpha_1 = \alpha L, \qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial P} = \frac{\partial \alpha}{\partial P} L + \frac{\partial L}{\partial P} \alpha;$$

or

$$\frac{\partial L}{\partial P} > 0, \qquad \alpha < 0,$$

sauf pour les petites charges; le second terme est donc généralement négatif et, quand il est positif, il est plus petit que le premier. Donc $\frac{\partial \alpha_1}{\partial P}$ est bien négatif et $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ est positif. D'où la conclusion :

$\mathcal{E}$ considéré comme fonction déterminable une fois pour toutes de P *et de t, croît quand t croît, à tension constante. Mais cette conclusion ne vaut que ce que vaut l'hypothèse, c'est-à-dire rien du tout.*

Imbert (*Thèses de Marseille,* 1880) emploie le paramètre $\mathcal{E}$. Mais, après avoir posé la formule (12) et admis que le premier membre est toujours négatif, il conclut que $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ peut être tantôt positif, tantôt négatif, suivant le signe de α_1. Je ne reproduirai pas l'étrange raisonnement qui est censé légitimer cette conclusion déconcertante; je me garderai bien d'entrer dans la discussion d'un Mémoire que je signale seulement pour qu'on ne puisse m'accuser de l'ignorer.

En définitive, la question de la variation du module avec la température doit être reprise *sans faire aucune hypothèse,* et en partant de définitions du module qui, appliquées aux déformations isothermiques, soient précises et correctes.

MODULE $\mathcal{E}$ A LONGUEUR CONSTANTE. MÉTHODE DYNAMIQUE.

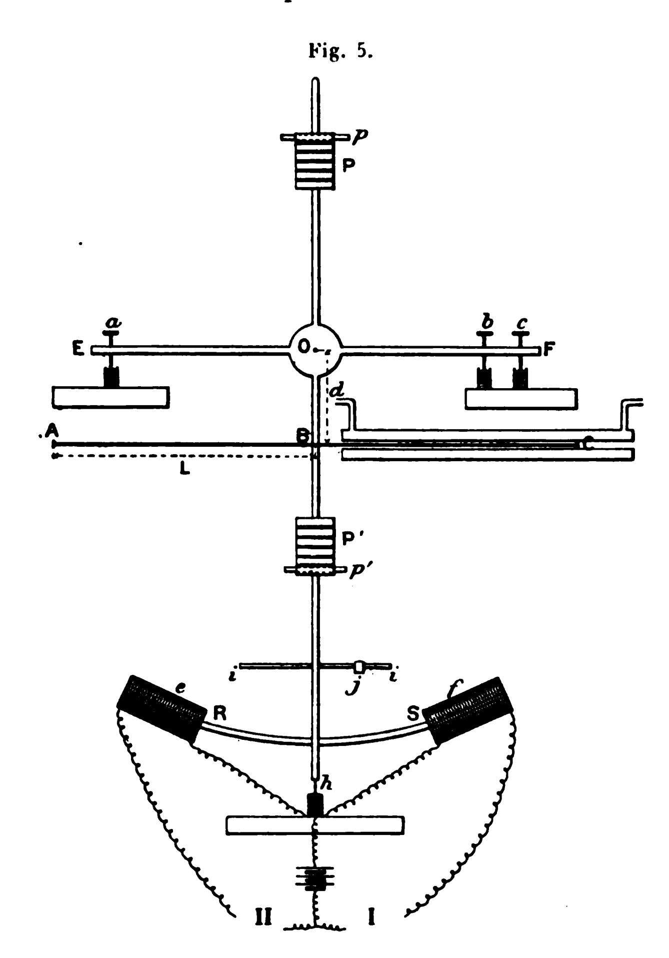
19. *Description schématique du pendule et du procédé d'entretien des oscillations.* — La figure 5 représente schématiquement le pendule. Il oscille autour de l'axe horizontal O, porte des masses PP′, une tige horizontale légère en bois EF et un aimant courbe RS dont le centre est au point O. En *a*, *b*, *c* sont des ponts en fil de cuivre dont les branches plongent dans deux godets pleins de mercure pour une position convenable du pendule. Les godets *a*, qui se projettent l'un sur l'autre dans la figure, sont reliés quand le pendule est dévié d'un petit angle vers la droite à partir de la verticale; les godets *b* et *c* sont reliés deux à deux, quand le pendule est dévié d'un petit angle vers la gauche à partir de la verticale. Ainsi se trouvent fermés des circuits que nous appellerons *a*, *b* et *c*.

En *h* se trouvent deux nacelles de porcelaine (qui se projettent l'une sur

l'autre dans la figure) pleines de mercure ; elles font partie du circuit des bobines *e* et *f* et sont reliées électriquement pendant un instant quand le pont de cuivre qui termine le pendule passe par la verticale.

Toute la difficulté d'entretien du pendule consiste en ceci : lors de deux pas-

Fig. 5.



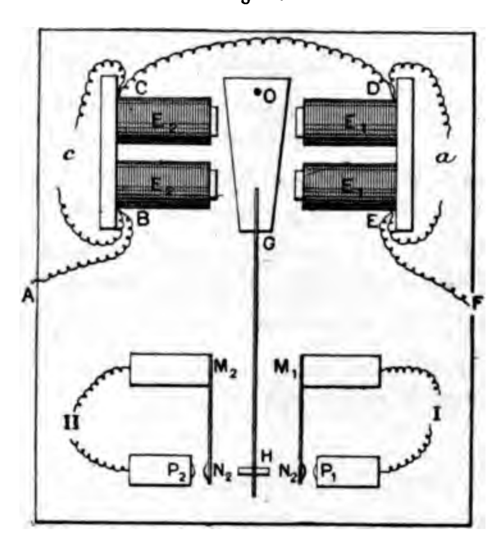
sages successifs par la verticale, les bobines doivent agir dans des sens différents. Il faut donc, par un procédé quelconque, soit changer le sens du courant, soit n'utiliser alternativement qu'une des bobines *e* et *f*. C'est à ce dernier parti que je me suis arrêté : pour augmenter la régularité de l'entretien, les bobines n'agissent que par attraction.

La figure 6 représente l'appareil qui élimine automatiquement l'une des bobines. Le courant de deux accumulateurs passe constamment dans les électros E_1 et E_2, montés en série. Quand l'armature OG, mobile autour de l'axe de O, est rapprochée d'un des électros, E_1 par exemple, elle reste collée contre lui. Supposons que nous mettions cet électro un instant en court-circuit, l'armature est

attirée davantage par l'électro E_2 et va s'y coller. Elle reste en contact avec lui quand on supprime le court-circuit.

Les courts-circuits sont produits par les ponts *a* et *c* placés sur la tige horizontale EF. Donc, quand l'extrémité inférieure du pendule passe par la verticale

Fig. 6.



en venant de la gauche, le court-circuit *c* vient de se produire, l'armature OG est, par conséquent, au contact de l'électro E_1. Quand, au contraire, l'extrémité inférieure du pendule passe par la verticale en venant de la droite, c'est le court-circuit *a* qui vient de cesser, et, par conséquent, l'armature OG est au contact de E_2.

L'armature OG porte un ressort flexible GH terminé par une sorte de petit marteau isolant H. On voit aussi, en MN, deux ressorts flexibles qui peuvent être amenés au contact de P et fermer ainsi les circuits I et II. Quand OG touche E_1, le marteau H appuie sur $M_1 N_1$ et ferme le circuit I. Quand l'armature touche E_2, c'est le circuit II qui est fermé. Les circuits I et II sont ceux des bobines *f* et *e*.

En définitive, voici comment les choses se passent :

Supposons que le pendule soit en repos à l'extrémité gauche de son oscillation. Le pont *c* est abaissé, l'électro E_2 en court-circuit, l'armature OG au contact de E_1, le circuit I fermé en $N_1 P_1$. Rien ne passe cependant dans la bobine F, dont le circuit est encore coupé en H. Les choses se maintiennent en l'état tant que le pendule n'est pas arrivé à la verticale. Un peu avant qu'il y arrive, le court-circuit *c* cesse, ce qui ne modifie pas la position de l'armature OG. Au moment où il y passe, un courant instantané circule dans *f*, l'aimant RS est aspiré, le pendule reçoit une petite impulsion.

position du centre de gravité (et, par conséquent, simultanément T_1 et T_2) tout en maintenant $\mathfrak{M}$ invariable, en plaçant la même masse dans deux positions symétriques par rapport à O. Théoriquement, on peut donc résoudre le problème posé : malheureusement, la mesure de $\mathcal{E}$ perd toute précision dès que le centre de gravité est bas, parce que T_1 et T_2 diffèrent alors peu l'un de l'autre. J'indique néanmoins la méthode qui peut avoir d'autres applications.

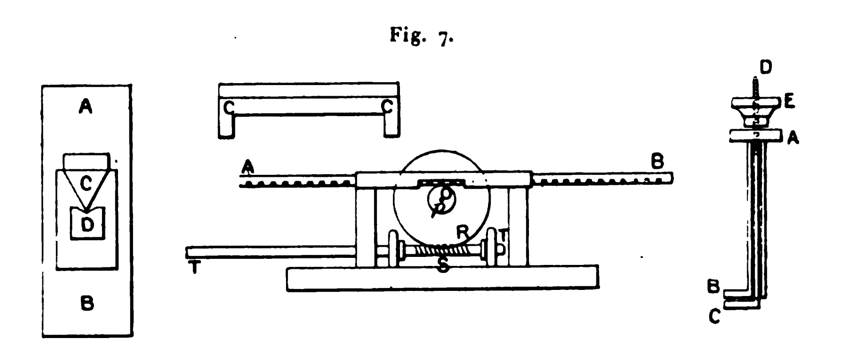
Les contacts de mercure sont faits par des ponts dont les branches sont formées par des vis qui permettent les réglages. Le réglage minutieux du pont *h* est particulièrement indispensable, puisque le mercure ne dépasse les bords des nacelles que de 1^{mm} environ.

A cause de la longueur de l'aimant RS (40^{cm}), les bobines n'agissent chacune que sur un pôle. Donc, la position du pôle dans la bobine est à peu près sans effet sur la grandeur de l'impulsion, pourvu que le pôle entier s'y trouve au moment du passage par la verticale. On s'arrange de manière que l'extrémité de l'aimant soit alors vers le milieu de la bobine.

Le chronographe est du modèle courant à deux plumes, de la maison Hipp et Favarger, réglé par une lame vibrante. Il déroule 1^{cm} de papier à la seconde et permet d'évaluer à la rigueur le centième de seconde. La seconde est fournie par une horloge entretenue électriquement. Souvent je déterminais la durée directement avec un compte-seconde, en comptant 50 ou 100 oscillations.

21. Reste à fixer le caoutchouc et à faire varier arbitrairement sa longueur. La difficulté est d'allonger simultanément de longueurs égales les deux parties AB et BC, de manière que leurs tensions restent égales et le point B le milieu de la longueur totale. J'ai résolu ce problème à l'aide des appareils représentés figure 7.

Fig. 7.



A gauche on voit le couteau C de bronze fixé sur une plaque évidée AB et reposant sur le sillon creusé dans la pièce D. Celle-ci est solidement vissée au bâti général par ses deux extrémités. On donne au couteau une grande longueur (15^{cm}) pour maintenir invariable le plan d'oscillation. Il est à peu près impossible de

faire rigoureusement rectiligne une arête aussi longue; aussi n'en conserve-t-on que les extrémités, comme le montre le dessin CC, qui représente la vue latérale. On pourrait aussi constituer le couteau par deux pointes reposant dans deux crapaudines; nous verrons plus loin un exemple de cette disposition.

Normalement à la plaque B est fixée horizontalement, par une mâchoire non représentée, la pièce dessinée à droite de la figure : elle rend le milieu du caoutchouc solidaire du pendule. Dans un carré creusé dans la tige AB passe une seconde tige CD, carrée à une de ses extrémités, cylindrique et filetée à l'autre. Les deux tiges portent les pièces cylindriques B et C formant mâchoires. Le serrage entre B et C est obtenu à l'aide de l'écrou E, qui se visse sur le filet D. Les pièces B et C sont écartées par un ressort à boudin non représenté et situé dans la tige AB.

Enfin, au milieu de la figure, on voit l'appareil qui sert à étirer le caoutchouc. Une roue dentée R tourne autour de l'axe O et est entraînée par la vis sans fin S, filetée sur la tige TT. La roue R porte un pignon p qui engrène sur la crémaillère AB. Quand la tige TT tourne, la crémaillère AB se déplace vers la droite ou la gauche. A l'une de ses extrémités A elle porte une pince dans laquelle l'une des extrémités du caoutchoue est serrée. Imaginons deux appareils identiques placés à 3^{m} de distance l'un de l'autre et commandés par la même tige TT; leur seule différence consiste en ce que pour l'un la vis S est *à droite,* pour l'autre la vis S est *à gauche*. Le moteur entraîne la tige TT par l'intermédiaire de poulies et d'un inverseur de mouvement qu'il est inutile de décrire.

Grâce au filetage inverse des vis S, la rotation de la tige T produit des mouvements inverses rigoureusement égaux des crémaillères et des pinces qui les terminent. Le caoutchouc est donc symétriquement étiré par rapport au point B (*fig.* 5) solidaire du pendule, qui reste au milieu du caoutchouc.

Il peut arriver que le morceau de caoutchouc ne soit pas parfaitement cylindrique et qu'un allongement égal des deux moitiés ne corresponde pas tout à fait à la même tension. On est alors forcé de desserrer la pince qui rend le caoutchouc solidaire du pendule et de la resserrer après avoir laissé le caoutchouc équilibrer ses tensions.

Quand on veut opérer à des températures différentes de la température ordinaire, on emploie deux manchons, dont l'un est représenté schématiquement figure 5. Ils sont parcourus par un courant d'eau chaude fournie par un radiateur dont on trouvera la description dans mon premier Mémoire : *Sur les courbes de traction du caoutchouc*. Il est nécessaire que les manchons laissent entre eux un intervalle de quelques centimètres, pour permettre l'oscillation de l'extrémité de la pince qui rend le milieu du caoutchouc solidaire du pendule. On ne maintient ouvert que juste l'espace nécessaire, grâce à une lame de cuivre qui forme un cylindre presque complet, sauf un espace de 2^{cm} ou 3^{cm} compris entre deux

génératrices; elle relie l'une à l'autre les surfaces extérieures des deux manchons. Pour éviter les courants d'air, les crémaillères de la figure 7 portent, à leur extrémité voisine des pinces, un bouchon qui glisse à frottement doux dans le tube intérieur des manchons.

22. On règle l'amplitude de l'oscillation en modifiant le courant qui traverse les bobines d'entretien e et f (*fig*. 5). Quelques considérations générales facilitent le réglage. Considérons un pendule dont le moment d'inertie $\mathfrak{M}$ est donné : sa durée d'oscillation est

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{C}}.$$

Supposons d'abord qu'il y ait *un amortissement proportionnel à la vitesse :* l'équation est

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

Cherchons l'énergie absorbée pour une oscillation d'amplitude θ'. On trouve

$$S = \int_0^{T_1} f\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dt = f\theta'^2\frac{2\pi^2}{T_1}.$$

Elle est évidemment en raison inverse de la période, le frottement étant lui-même en raison inverse de cette période. Elle est évidemment proportionnelle au carré de l'amplitude.

Qu'on se reporte maintenant aux formules du n° **12**, on a

$$W = \mathfrak{M}\frac{2\pi^2\theta'^2}{T_1^2}, \qquad \frac{S}{W} = \frac{fT_1}{\mathfrak{M}}.$$

La fraction de l'énergie totale absorbée à chaque oscillation est proportionnelle à la période. D'ailleurs, l'intégrale de l'équation est

$$\theta = \theta' e^{-\lambda t}\sin 2\pi\frac{t}{T_1}, \qquad \lambda = \frac{f}{2\mathfrak{M}}.$$

Calculons le temps t nécessaire pour passer de l'amplitude θ'_0 à l'amplitude θ'_1; on a

$$\log\theta'_0 - \log\theta'_1 = \lambda t = \frac{ft}{2\mathfrak{M}}.$$

Ce temps est indépendant de la période, pourvu que, dans le changement de la période, le moment d'inertie reste constant. Le nombre d'oscillations nécessaires pour passer de θ'_0 à θ'_1 est, dans ces conditions, en raison inverse de la période.

Il s'agit de compenser ces pertes d'énergie.

Nous pouvons admettre que l'énergie fournie à chaque oscillation est indépendante de la période. Elle est, en effet, mesurée par le produit du couple qui résulte de l'action des bobines sur l'aimant, par le déplacement angulaire pendant le passage du courant dans les bobines, quantité indépendante de la vitesse angulaire, pourvu qu'on puisse admettre que l'espace du contact avec le mercure est constant et que le courant s'établit à peu près instantanément par rapport à la période. Si, de plus, on admet que l'énergie fournie est proportionnelle à l'intensité du courant, il résulte de l'expression de S que, pour maintenir l'amplitude uniforme, il faut que l'intensité du courant soit en raison inverse de la période et proportionnelle au carré de l'amplitude.

On arrive donc, quand on suppose les frottements proportionnels à la vitesse, à ce résultat paradoxal : que le nombre d'oscillations qui amortit le mouvement est en raison inverse de la période, que chaque période produit, par conséquent, un amortissement d'autant plus grand qu'elle est plus longue ; que cependant le courant nécessaire pour maintenir l'amplitude constante est d'autant plus petit que cette période est plus longue. Cela tient à ce que, dans l'expression de l'énergie W accumulée dans le pendule, la période entre par le carré de son inverse.

23. Étudions expérimentalement le fonctionnement de l'appareil précédent et cherchons dans quelle mesure l'hypothèse d'un frottement proportionnel à la vitesse est réalisée. Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de caoutchouc. L'expérience montre nettement que l'absorption d'énergie, mesurée par la grandeur du courant d'entretien, n'est pas proportionnelle à la vitesse et, par conséquent, n'est pas en raison inverse de la période. Assurément il est impossible de trop compter sur les indications fournies par la grandeur du courant; les contacts à mercure h (*fig.* 5) ne se font pas sur une longueur absolument invariable et les contacts métalliques (*fig.* 6) ne sont pas parfaits. Cependant l'expérience prouve que l'intensité i du courant d'entretien et la période sont reliées par une formule

$$i = \frac{K}{T} + K',$$

où K′ est fort loin d'être nul. Si, par exemple, on évalue T en secondes, on trouve des courants représentés en unités arbitraires par la formule précédente, avec $K' = 1$, $K = 4{,}4$. Les durées d'oscillations variaient de 2^s à 7^s par déplacement des masses P (*fig.* 5). Il n'importe pas, d'ailleurs, que le moment d'inertie du pendule reste invariable, pourvu que, dans le déplacement des masses, la forme varie assez peu pour que la résistance de l'air ne change pas, *la période étant supposée constante*.

Le résultat précédent s'explique par le nombre des contacts à mercure et par la perfection toute relative du couteau. D'ailleurs, pour des amplitudes de l'ordre de celles que j'emploie, le frottement de l'air n'est pas proportionnel à la vitesse (*voir* n° 53).

Installons maintenant le caoutchouc; la même formule relie encore le courant d'entretien et la période *en modifiant seulement la constante* K'. Donc, à la précision de cette méthode et dans les limites indiquées pour les variations de la période, l'amortissement par le caoutchouc est à peu près indépendant de la vitesse. De toutes manières il n'est pas proportionnel à celle-ci (*voir* n° 47).

La mesure du courant d'entretien nous fournit une seconde conclusion pratiquement importante. Faisons varier l'amplitude : l'expérience prouve que l'intensité du courant et, par conséquent, l'énergie fournie, sont sensiblement proportionnelles au carré de l'amplitude. C'est ce que nous apprend la formule du n° 22 dans l'hypothèse de frottements proportionnels à la vitesse; mais c'est ce que nous ne pouvions pas prévoir quand cette hypothèse n'est plus vraie. Nous aurons l'occasion de revenir là-dessus aux n°s 53 et suivants.

De ces résultats nous pouvons conclure que, tant pour la bonne définition des expériences que pour obtenir un entretien correct, il faut prendre des amplitudes aussi petites que possible. Les impulsions sont alors fort réduites et l'on s'écarte peu du pendule libre.

Mais il se présente alors une objection : supposons que la distance des positions extrêmes du contact h soit de 10^{cm} et que la largeur du mercure dans les nacelles soit de $1^{cm},5$. L'impulsion ne se fait plus au passage par la verticale, elle n'est plus instantanée. Ne va-t-elle pas modifier la durée de l'oscillation? Je renvoie pour la discussion à mon Mémoire *Sur les oscillations à peu près sinusoïdales à longue période* (*Ann. de Toulouse,* 1897, p. 22). On verra que la durée n'est pas modifiée, pourvu que la position d'équilibre coïncide avec le milieu du mercure. On obtient ce résultat par le déplacement de masses légères j sur la baguette ii (*fig.* 5).

Pour s'assurer que l'amplitude a bien une valeur invariable, un fil métallique lié à la base du pendule se déplace devant une plaque de verre sur laquelle sont gravés des traits. On fait varier le courant d'entretien jusqu'à obtenir l'amplitude convenable. On ne peut pas réduire indéfiniment celle-ci pour ne pas gêner le fonctionnement des contacts a, b et c.

Il est nécessaire que l'amplitude soit invariable, parce que la durée en dépend d'une manière appréciable. Le parcours de l'index fixé à la partie inférieure du pendule est 7 fois plus grand que le parcours de la pince qui relie le milieu du caoutchouc au pendule. Si ce parcours passe de 14^{cm} à 7^{cm}, l'allongement total du caoutchouc pendant l'oscillation (qui représente le double de l'amplitude) passe de 2^{cm} à 1^{cm}; la durée diminue sensiblement, surtout pour de petits A. Je prenais

généralement 10^{cm} pour parcours de l'index; l'amplitude de l'allongement sinusoïdal du caoutchouc est alors de $0^{cm},72$ environ. J'ai expliqué plus haut pourquoi il est difficile de diminuer davantage cette amplitude.

24. *Résultats généraux.* — Voici d'abord quelle est l'allure générale des phénomènes. On opère sur de la corde de 4^{mm} de diamètre (pure gomme et soufre), qui n'a jamais été allongée que d'une petite fraction de sa longueur. On lui fait parcourir des cycles entre $\Lambda = 1$ et $\Lambda = 5$. En un certain nombre de points de ces cycles, on maintient la longueur constante le temps nécessaire pour déterminer le module $\mathcal{E}$.

La longueur initiale est de 18^{cm}; les valeurs de L pour lesquelles on détermine $\mathcal{E}$ sont 25^{cm}, 35^{cm}, 50^{cm}, 65^{cm}, 80^{cm}, 90^{cm}. Avant de procéder à la mesure de $\mathcal{E}$, on attend 3 minutes et l'on détermine la durée de 20 oscillations, soit en enregistrant, soit à l'aide d'un compte-seconde. Les allongements sont effectués à l'aide du moteur, à vitesse constante. Si rapides que soient les opérations, la description d'un cycle exigeant 11 déterminations de $\mathcal{E}$ ne peut s'effectuer en moins d'une heure et demie; en une matinée de travail, il est difficile de décrire plus de trois cycles complets.

Voici les nombres obtenus pour le premier et le troisième cycle :

		L.	25.	35.	50.	65.	80.	90.
Cycle I.......	$\mathcal{E}$	aller..........	472	296	281	351	566	816
		retour........	413	243	192	214	340	
Cycle III.....	$\mathcal{E}$	aller..........	413	225	184	194	290	460
		retour........	418	230	179	193	267	

La courbe I de la figure 8 représente le cycle I. On déduit du Tableau précédent les conclusions suivantes :

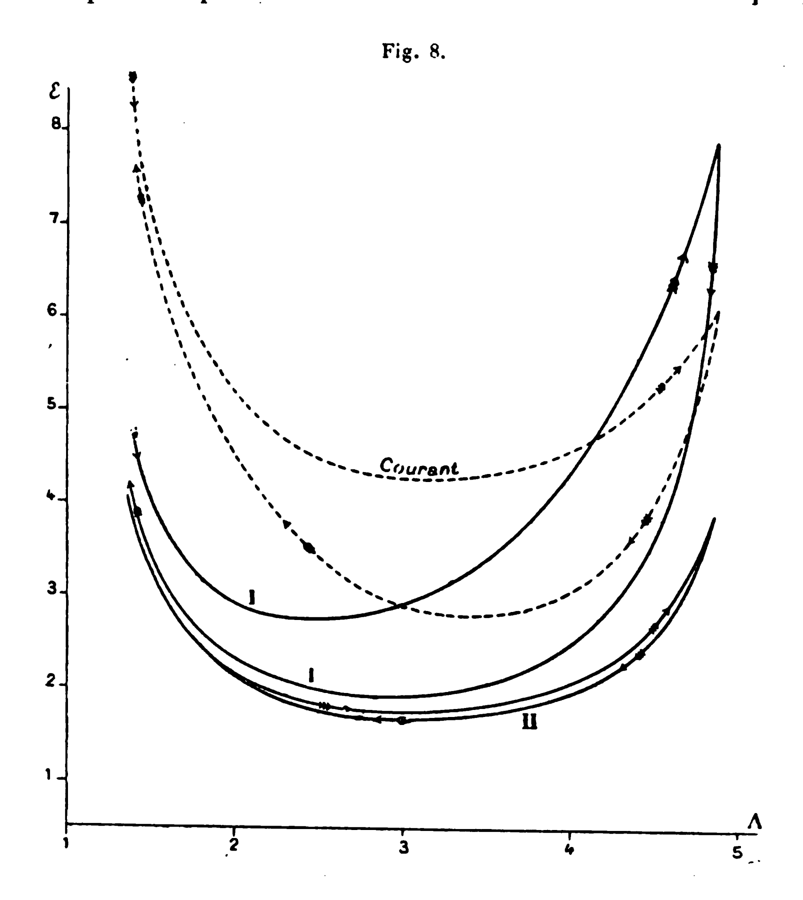
1° Les modules $\mathcal{E}$, *déterminés à longueur constante,* décroissent quand Λ croît, à partir de 1; ils passent par un minimum ou, pour mieux dire, restent à peu près constants pour toute une série de valeurs comprises entre $\Lambda = 2$ et $\Lambda = 4$; puis croissent très vite jusqu'aux plus grands allongements possibles. En particulier pour le premier cycle, c'est-à-dire quand le caoutchouc n'a jamais été allongé, le module $\mathcal{E}$ peut devenir, pour les plus grands allongements que le caoutchouc soit capable de supporter, plus du double de ce qu'il est pour $\Lambda = 1$.

2° A mesure que le nombre des cycles croît, les valeurs que prend $\mathcal{E}$ pour un Λ déterminé décroissent, d'abord vite puis lentement. Cette diminution porte principalement sur les $\mathcal{E}$ qui correspondent à de grands Λ. L'expérience montre par exemple que les valeurs de $\mathcal{E}$ pour $\Lambda = 5$ sont dans les trois cycles 816, 535, 460.

3° Les modules possèdent une hystérésis énorme pour le premier cycle et qui

décroît à mesure que le nombre des cycles augmente. Les courbes d'aller et de retour sont déjà presque confondues pour le troisième cycle, surtout dans la partie des courbes qui correspondent aux Λ voisins de 1. Il semble même que pour ce

Fig. 8.



cycle la courbe de retour passe au-dessus de la courbe d'aller au voisinage de $\Lambda = 1$. Bien que les différences soient faibles, le phénomène se reproduisant toujours, on ne peut douter qu'il existe dès que le nombre de cycles parcourus est grand. Il a pour cause très probablement une déformation permanente.

4° L'énergie nécessaire pour entretenir les oscillations, plus exactement l'énergie absorbée dans chaque oscillation, qui est mesurée par l'intensité du courant comme je l'ai expliqué au n° 22, est représentée pour le premier cycle par la courbe pointillée de la figure 8. Elle suit donc une loi analogue à celle du module; elle a aussi de l'hystérésis. A mesure que le nombre des cycles augmente les courbes d'aller et de retour du courant se rapprochent et finissent par se confondre approximativement, celle de retour étant cependant toujours un peu plus basse que celle d'aller.

Les phénomènes précédents sont généraux et se retrouvent pour toutes les

espèces de caoutchouc, même pour ceux qui contiennent une surcharge énorme de matières étrangères.

L'après-midi du jour où ont été parcourus les cycles dont je viens de parler, j'ai décrit 5 fois le cycle $\Lambda = 1$, $\Lambda = 5$ *sans aucun arrêt,* puis un cycle identique à ceux du matin. Voici les modules obtenus toujours en unités arbitraires :

	L.	25.	35.	50.	65.	80.	90.
$\mathcal{E}$.	Aller.........	392	221	178	186	255	398
	Retour.......	407	222	170	180	243	

Ces résultats sont représentés par la courbe II (*fig.* 8). Ils confirment les règles données ci-dessus.

Enfin sur un fil *neuf* j'ai repris l'expérience pour de petits allongements compris entre $\Lambda = 1$ et $\Lambda = 1,330$. Voici les résultats :

	Λ.	1,055.	1,110.	1,165.	1,220.	1,275.	1,330.
$\mathcal{E}$.	Aller.........	889	800	720	660	593	555
	Retour.......	855	766	684	626	578	

Les résultats sont conformes aux précédents. Pour $\Lambda = 1$ rigoureusement, il est impossible d'expérimenter, puisque dans une partie de la course du pendule un des caoutchoucs ne serait pas tendu. On constate, surtout pour la courbe d'aller, une légère diminution de $\mathcal{E}$ à mesure que le nombre des oscillations augmente, résultat conforme aux résultats plus généraux du n° 25.

Enfin les courants d'entretien, qui diminuent rapidement de $\Lambda = 1,05$ à $\Lambda = 1,30$ (ils passent de 1 à 0,60), sont notablement plus petits pour la courbe de retour.

25. ***Influence d'une station sous une longueur donnée et influence des oscillations sous cette longueur.***

A partir du moment où l'on parvient à un allongement donné, le module $\mathcal{E}$ à longueur constante croît d'abord très vite, puis plus lentement, pour tendre vers une valeur limite.

Cette règle a une importance théorique toute particulière.

Il est très difficile de savoir ce qui se passe *juste au moment* où l'on impose un allongement. Les réglages (serrage de la pince médiane, réglage du courant, mise en marche de l'enregistreur, etc.) prennent un temps notable (2 ou 3 minutes au moins). A partir de ce temps on peut suivre les variations de $\mathcal{E}$ avec commodité, puisqu'il suffit de laisser dérouler le papier de l'enregistreur.

On constate que le module $\mathcal{E}$ croît avec une rapidité relativement grande. Voici quelques nombres pour fixer les idées.

Un caoutchouc qui avait déjà beaucoup servi ($L_0 = 18^{cm}$) et venait de passer plus d'une heure à la longueur 60^{cm}, est porté à 90^{cm}. Aussitôt après le réglage, on met en marche le pendule de l'enregistreur, et l'on détermine $\mathcal{E}$ par la durée de 4 fois 10 oscillations. On trouve les valeurs suivantes : 376, 378, 386, 386. La durée d'une oscillation étant voisine de 5^s, en 200^s le module a passé de 376 à 386 augmentant de plus de $\frac{1}{40}$ de sa valeur. On attend 15 minutes, $\mathcal{E} = 407$; on attend encore 40 minutes, $\mathcal{E} = 427$. En 1 heure le module a augmenté de 51 unités, soit de $\frac{1}{8}$ environ. Il est probable que, si l'on pouvait le mesurer immédiatement après l'imposition de la longueur, on trouverait au début un module assez inférieur à 376, de l'ordre de 350 par exemple.

Même phénomène, lorsqu'on aboutit à une longueur déterminée par longueurs décroissantes. Voici des exemples.

Un fil ayant beaucoup servi ($L = 18^{cm}$) est maintenu pendant plus de 12 heures à la longueur $L = 90^{cm}$. On le ramène alors à $L = 80^{cm}$. On détermine $\mathcal{E}$ aussitôt le réglage fait et 15 minutes après; on trouve les nombres 270, 284. Après 1 heure sous cette longueur, on ramène à $L = 60^{cm}$. Les 30 premières oscillations après le réglage donnent, par groupes de 10, $\mathcal{E} = 183$, 184, 185. Après 15 minutes on trouve $\mathcal{E} = 193$.

L'expérience montre que l'*énergie absorbée par chaque oscillation décroît au début des oscillations, pour tendre rapidement vers une limite*. Le courant d'entretien d'une amplitude donnée est au début un peu plus intense qu'après quelques dizaines d'oscillations. Pratiquement je réglais les premières oscillations à une amplitude légèrement inférieure à ce qu'elle devait être en définitive; l'amplitude croît peu à peu et se fixe bientôt à une valeur constante. La durée d'oscillation étant à peu près indépendante de l'amplitude, pour des variations de cet ordre de grandeur, cette technique n'a aucun inconvénient. Ces indications seront complétées au n° 56.

Un problème se pose : on peut maintenir le fil sous une longueur donnée soit au repos, soit en entretenant les oscillations. Quelle est sur le module $\mathcal{E}$ l'influence de ces oscillations dont le nombre peut se chiffrer par milliers?

On utilise un caoutchouc neuf ($L_0 = 18^{cm}$); on l'amène à $L = 90^{cm}$ et l'on détermine de temps en temps le module $\mathcal{E}$, soit en maintenant au repos dans l'intervalle des enregistrements, soit en entretenant les oscillations. Le Tableau suivant résume les résultats.

Repos	T	0m	30	60	1030		
	$\mathcal{E}$	639	649	660	705		$\mathcal{E}$ croît de + 66
Oscillations.	T	0m	30	60	120	180	
	$\mathcal{E}$	705	704	700	694	691	$\mathcal{E}$ décroît de − 14
Repos	T	0m	180	1335			
	$\mathcal{E}$	691	691	707			$\mathcal{E}$ croît de + 16
Oscillations.	T	0	135				
	$\mathcal{E}$	707	698				$\mathcal{E}$ décroît de − 9
Repos	T	0	140	1090			
	$\mathcal{E}$	698	709	716			$\mathcal{E}$ croît de + 18

Quand on entretient les oscillations, $\mathcal{E}$ *décroît.* On a donc simultanément deux influences inverses; le fait que la longueur moyenne est invariable tend à augmenter $\mathcal{E}$; le mouvement oscillatoire tend à le diminuer. Au début du séjour sous une longueur donnée la première influence l'emporte, au moins quand le fil vient d'être suffisamment allongé. C'est la seconde quand le fil est maintenu à la même longueur depuis assez longtemps, ou lorsque l'allongement est très petit.

26. *Conséquences théoriques des faits précédents.* — Les faits relatés dans les deux numéros précédents nous permettent de poser la question suivante : Est-il possible de trouver une fonction bien déterminée de la longueur et de la charge qui représente le module $\mathcal{E}$? Par *fonction bien déterminée* il faut entendre une fonction qui ne dépende que de la valeur actuelle de P et de L, et non des opérations par lesquelles on a amené le fil au point P, L du plan charge-allongement.

L'hystérésis de $\mathcal{E}$ ne prouve rien. En effet, quand on passe par une longueur L sur une courbe de charge et qu'on y revient sur une courbe de décharge, les valeurs P de la charge à l'aller et au retour sont différentes : même dans l'hypothèse d'une fonction bien déterminée, $\mathcal{E}$ ne doit pas reprendre la même valeur. Cependant cette hystérésis donne un premier renseignement. Sur une courbe de décharge, $\mathcal{E}$ est généralement plus petit que sur une courbe de charge, au moins pour des A assez grands; nous savons d'autre part que sur la courbe de traction, pour une même longueur L, les valeurs P_c et P_d (c = charge, d = décharge) satisfont à la relation $P_c > P_d$. Si la fonction bien déterminée existe, il faut que $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} > 0$, puisque $\mathcal{E}$ diminue pour une même longueur quand P diminue.

La détermination directe de $\mathcal{E}$ en tout point du plan P, L est impossible avec notre appareil, puisque nous ne connaissons pas la tension. Si même nous nous bornons à des raisonnements qualitatifs sur les résultats du n° **24** par comparaison avec ceux du n° 2 du Mémoire *Sur les courbes de déformation du caoutchouc vulcanisé,* l'hypothèse d'une fonction bien déterminée n'a rien d'absurde.

Les résultats du n° 25 modifient complètement cette manière de voir. Ils prouvent en effet qu'*à longueur constante* $\mathcal{E}$ croît à partir du moment où la longueur est imposée. Or, sur la courbe de charge nous savons que, à longueur constante, P décroît, et considérablement; donc $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} < 0$; cette conclusion contredit la précédente. Sur la courbe de décharge au contraire, à partir du moment où la longueur est imposée (pourvu encore que certaines conditions soient satisfaites), on sait que la tension croît; on aurait donc bien $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} > 0$; mais cette concordance importe peu devant la discordance constatée sur les courbes de charge.

On peut présenter le même raisonnement d'une manière différente.

Supposons que l'on s'arrête à une longueur L sur une courbe de charge, en un point correspondant à un Λ notable. La tension P_c décroît. Sur la courbe de décharge, pour la même longueur, la tension P_d croît : du moins nous pouvons nous arranger de manière qu'il en soit ainsi. Les deux tensions vont donc se rapprochant l'une de l'autre, au moins dans les premiers instants à longueur constante sur la courbe de décharge. Par conséquent, si $\mathcal{E}$ est une fonction bien déterminée de P et de L, $\mathcal{E}$ devrait décroître dans le premier cas, croître dans le second, puisque nous savons que $\mathcal{E}_c > \mathcal{E}_d$.

Nous ne savons cependant pas si, oui ou non, les variations de $\mathcal{E}$, quand on maintient la longueur constante, sont liées à la réactivité. Nous pouvons seulement affirmer que les variations sont de même signe, que la réactivité entraîne un accroissement ou une diminution de la tension.

27. Avant d'aller plus loin, comparons nos résultats à ce qu'on aurait obtenu en définissant $\mathcal{E}$ par l'inclinaison de la tangente aux courbes de traction. On se reportera à la figure 2 du Mémoire *Sur les courbes de déformation du caoutchouc vulcanisé*.

La courbe de charge donnerait pour $\mathcal{E}$ des variations analogues à celles que l'on trouve en appliquant la définition basée sur les petits cycles. Nous avons vu qu'on peut la représenter en gros par l'équation suivante, ou toute autre de même forme (n° 5),

$$P = a\left(1 - \frac{1}{\Lambda}\right) + \frac{b}{3}(\Lambda^3 - 1), \tag{1}$$

$$\frac{dP}{d\Lambda} = \frac{a}{\Lambda^2} + b\Lambda^2. \tag{2}$$

La courbe (2) a l'allure générale de la courbe expérimentale.

Mais la courbe de décharge ne conduit généralement à rien de semblable. Par exemple le quotient $dP:dL$ sur la première courbe de décharge de la figure 2

(*loc. cit.*) est d'abord très grand et négatif, croît jusqu'à $-\infty$, passe à $+\infty$, puis diminue considérablement pour devenir vers $\Lambda = 5$ beaucoup plus petit que sur la courbe de charge. La réactivité influe énormément sur la forme de ces courbes : le choix que nous avons fait de la définition par les petits cycles maintes fois répétés a précisément pour but d'éliminer cette influence, au moins en partie.

Naturellement, à mesure qu'on opère sur des courbes moins étendues et correspondant à des Λ plus petits, l'impossibilité de définir un module par la tangente à ces courbes est moins évidente; mais les cas extrêmes servent justement à nous prémunir contre des erreurs grossières. Toutefois la définition par les petits cycles fournit à l'extrémité des parcours un seul nombre, comme on doit le prévoir, si le module caractérise (au moins approximativement) les propriétés purement élastiques actuelles; tandis que la définition par les tangentes donne deux valeurs distinctes, c'est-à-dire une discontinuité dans ces propriétés, ce qui est inadmissible (*voir* le n° **34**).

D'après les nombres du n° **24** et du cycle I, calculons les valeurs de E_5 en admettant que le volume ne change pas; il faut multiplier la valeur de $\mathcal{E}$ par le carré de l'allongement actuel. Voici les nombres obtenus :

	L.	25.	35.	50.	65.	80.	90.
	Λ..........	1,38	1,94	2,77	3,60	4,44	5,00
Cycle I. — E_5.	Aller.......	100	123	240	507	1237	2270
(Unités arbitraires.)	Retour.....	87	101	164	309	743	

Ils croissent d'abord lentement, puis de plus en plus vite : la courbe a une forme simple et régulière. Les autres cycles donneraient des résultats analogues. La vitesse de propagation longitudinale d'une onde, étant reliée au paramètre E_5 par la formule $E_5 = K v^2$, où K est un nombre constant, croît donc d'une manière continue suivant une courbe d'allure parabolique, ainsi que nous le vérifierons plus loin directement. Dans le cas précédent les vitesses v seraient (en unités arbitraires) :

L.	25.	35.	50.	65.	80.	90.
v (aller)....	100	111	155	225	352	476
v (retour)..	93	100	128	176	273	

Maintenant l'on comprend mieux ce que nous disions au n° **9** de la méthode de Stefan. Entre les $\Lambda = 2$ et 5, nous venons de trouver que la vitesse de propagation varie dans le rapport 100 : 430. Exner trouve une variation dans le rapport beaucoup trop faible 659 : 472 = 100 : 139.

Quel que soit le caoutchouc qu'on emploie, quelque surcharge de matières étrangères qu'il renferme, les variations du module E_5 sont de l'ordre que nous venons d'indiquer.

Quelles sont les valeurs de $\mathcal{E}$ et de E_5 pour $\Lambda = 1$?

Nous avons dit (n° **24**) qu'il est impossible de faire l'expérience jusque-là : cherchons comment il faut extrapoler. La forme des courbes représentant $\mathcal{E}$ et E_5 en fonction de Λ conduit à l'hypothèse que l'extrapolation est plus sûre pour E_5 ; nous poserons donc que *pour de petits allongements le paramètre* E_5 *est constant.* L'expérience confirme cette manière de voir ; reprenons l'expérience qui est à la fin du n° **24**. Multiplions les $\mathcal{E}$ par les carrés des allongements Λ, nous trouvons :

Λ.	1,055.	1,110.	1,165.	1,220.	1,275.	1,330.
$\mathcal{E}\Lambda^2$......	989	968	977	982	964	982
	952	927	928	931	960	

La moyenne des 6 nombres d'aller est 977 et les écarts à cette moyenne correspondent à des erreurs sur la durée des oscillations de l'ordre de grandeur des erreurs d'expériences; la moyenne des quatre derniers nombres sur la courbe de retour est 934. L'étude de la vitesse de propagation confirme cette hypothèse très naturelle, puisqu'elle revient à dire que la matière se transforme peu.

28. Continuons l'exposé des résultats expérimentaux.

Prenons un caoutchouc neuf, portons-le à la longueur $\Lambda = 5$, mesurons $\mathcal{E}$; ramenons à $\Lambda = 1$, retournons aussitôt à $\Lambda = 5$; attendons quelques minutes, mesurons $\mathcal{E}$; et ainsi de suite de manière que les mesures de $\mathcal{E}$ se fassent de 15 en 15 minutes.

Voici les nombres obtenus ; ils sont conformes à ce que nous savions (n° **24**) :

$\mathcal{E}$............	670		448		399		375		357
Différences....		222		49		24		18	

Le dernier nombre obtenu, abandonnons 105^m sous la longueur $\Lambda = 5$, mesurons $\mathcal{E}$ à nouveau, puis recommençons la série des opérations :

$\mathcal{E}$..................	386		340		330		326
Différences..........		46		10		4	

Il y a augmentation pour le premier résultat conformément au n° **25**, puis on retrouve des nombres régulièrement décroissants. Le dernier nombre obtenu, ramenons à $\Lambda = 1$ et abandonnons 2 heures sous tension nulle. Recommençons alors la série des opérations ; allongeons jusqu'à $\Lambda = 5$ et déterminons $\mathcal{E}$:

$\mathcal{E}$......................................	369		331
Différences..............		38	

Ainsi le repos sous tension nulle produit un accroissement de $\mathcal{E}$.

Enfin laissons 14 heures sous $\Lambda = 5$, nous obtenons $\mathcal{E} = 445$, très voisin du nombre 448 donné par la seconde opération. Si le repos fait croître $\mathcal{E}$, on ne retrouve pas, même après un nombre d'heures d'une ou de plusieurs dizaines, la valeur primitive qui correspond au caoutchouc neuf. Peut-être, pour un repos de plusieurs mois, le caoutchouc allongé reprendrait-il un état identique à celui du caoutchouc neuf; en tout cas, la démonstration est difficile. Les observations journalières ont montré depuis longtemps que peu à peu le caoutchouc des poires de photographes, des tubes, etc. durcit, et qu'on empêche ce durcissement par des secousses, des déformations fréquentes : ces faits vulgaires doivent être liés à ceux que je viens d'étudier.

La diminution de $\mathcal{E}$ est notable surtout pour les grandes valeurs de Λ. J'ai repris l'expérience précédente avec des fils neufs pour $\Lambda = 3$ et $\Lambda = 1,7$; voici les résultats. Le repos sous tension était encore de 105 minutes.

$\Lambda = 3$........	221	188	180	174	171	Repos........	175	169	169
$\Lambda = 1,7$......	275	261	260	261		Repos........	259	258	

Ainsi le retour à la tension nulle produit un effet qui diminue beaucoup quand Λ décroît.

Quand on ramène à la tension nulle, qu'on y abandonne le caoutchouc un certain temps et qu'on allonge de nouveau, la valeur consécutive de $\mathcal{E}$ est accrue, comme dans le cas de $\Lambda = 5$.

Pour $\Lambda = 3$, 2 heures sous tension nulle font remonter $\mathcal{E}$ de 169 à 172. Pour $\Lambda = 1,7$, 18 heures sous tension nulle le ramènent de 258 à 265.

Le retour à la tension nulle agit aussi sur l'énergie absorbée par le mouvement oscillatoire. Voici, en unités arbitraires, les courants d'entretien pour les 5 premières expériences de la première série ($\Lambda = 5$) : 56, 41, 38, 37, 35. A mesure que le nombre des cycles ($\Lambda = 1$, $\Lambda = 5$) augmente, l'énergie absorbée dans une oscillation d'amplitude déterminée diminue (comparer au n° 55, 3°). Mêmes résultats pour les deux autres séries.

Enfin j'ai fait, toujours avec un fil neuf, une quatrième série pour l'allongement $\Lambda = 5$. Les opérations étaient identiques aux précédentes, mais je ramenais non plus à $\Lambda = 1$, mais à $\Lambda = 3$. Le repos sous $\Lambda = 5$ entre les mesures 5 et 6 est encore de 105 minutes. Pour faciliter la comparaison, je transcris les nombres donnés plus haut :

Ramené à $\Lambda = 1$....	670	448	399	375	357	Repos.....	386	340	330	326
Ramené à $\Lambda = 3$....	620	614	592	585	571	Repos.....	598	510		

Si les caoutchoucs étaient identiques et de même longueur initiale, les premiers

nombres seraient égaux. Sans qu'il soit nécessaire de calculer les rapports, il apparaît immédiatement que l'effet du parcours des cycles ($\Lambda = 5$, $\Lambda = 3$) est incomparablement plus petit que celui du parcours des cycles d'étendue double ($\Lambda = 5$, $\Lambda = 1$). On a d'ailleurs

$$(670 - 357) : 670 = 0,47,$$

tandis que

$$(620 - 571) : 620 = 0,08.$$

29. Les faits précédents et d'autres que j'exposerai plus loin obéissent à une règle que voici :

Tout allongement, toute diminution de longueur, d'une manière générale, toute déformation tendent à diminuer le paramètre $\mathcal{C}$ *correspondant à un* Λ *donné. Tout arrêt tend à augmenter* Λ *et cette augmentation croît à mesure que l'arrêt a lieu sous un* Λ *plus voisin de* 1.

La première partie de la règle est bien d'accord avec les faits exposés au n° **28**. Au contraire, la seconde partie de la règle semble d'abord contradictoire avec eux. Supposons que nous mesurions $\mathcal{C}$ pour $\Lambda_1 = 5$; à mesure que nous revenons à des Λ plus voisins de 1, l'expérience précédente nous montre que $\mathcal{C}$ diminue davantage.

Cependant une observation nous donne l'éveil ; si nous maintenons le fil 2 heures sous tension nulle, le paramètre $\mathcal{C}$, qui décroissait à chaque parcours, remonte au contraire de 326 à 369. D'où résulte que, dans un parcours quelconque, nous devons distinguer deux effets opposés : celui qui provient de ce qu'on est *resté* plus ou moins longtemps sous un certain Λ, celui qui provient de ce que le fil a été *déformé* depuis la station à cet allongement jusqu'au Λ où se fait la mesure.

Mesurons $\mathcal{C}$ toujours pour $\Lambda_1 = 5$; de temps en temps revenons à un allongement Λ_2 variable et passons-y un temps T notable et toujours le même. Si T est assez grand et si le paramètre $\mathcal{C}$ pour $\Lambda_1 = 5$ était tombé très bas du fait de grands parcours préliminaires, la règle précédente rend probable l'existence d'un Λ_2 optimum, qui remonte $\mathcal{C}$ le plus possible *dans un temps T donné*.

En effet, à mesure que Λ_2 devient plus voisin de 1, la transformation du caoutchouc qui résulte de la station à cet allongement, augmentera d'après la règle. Mais la déformation, pour retourner à Λ_1, augmentera aussi. Si ce second effet est intense, et il l'est, il y aura avantage à prendre un Λ_2 plus grand. L'effet de la station sous Λ_2 sera, il est vrai, diminué, mais l'effet inverse de la déformation de retour deviendra beaucoup plus petit ; d'où gain pour $\mathcal{C}$. Toutefois si Λ_2 devient trop voisin de Λ_1, le premier effet sera très faible ; le second aura beau être négligeable, $\mathcal{C}$ augmentera peu. *A fortiori,* si $\Lambda_2 = \Lambda_1$, nous savons qu'il y a accroisse-

ment de $\mathcal{C}$ en maintenant Λ_1 constant, mais cet accroissement n'est pas aussi important que celui qui correspond au Λ_2 optimum.

Bien entendu tous ces phénomènes dépendent du temps T. Si T est très petit, le parcours diminuera presque toujours la valeur de $\mathcal{C}$ pour Λ; au contraire, si T devient très grand, s'il se chiffre par jours et par semaines, le Λ_2 optimum peut devenir égal à 1.

On s'explique ainsi le phénomène fondamental de l'hystérésis du paramètre $\mathcal{C}$, qui n'est qu'un cas particulier de l'application de la règle.

Reste à démontrer qu'il en est bien ainsi; l'expérience suivante ne laisse aucun doute à cet égard.

Le caoutchouc a une longueur $L_0 = 17^{cm}$. On lui fait parcourir quatre fois le cycle $\Lambda_0 = 1{,}35 - \Lambda_1 = 5{,}3$. Puis on l'amène à $\Lambda_2 = 3{,}5$; on mesure $\mathcal{C}$; on ramène à Λ_1, on mesure $\mathcal{C}$, et ainsi de suite de manière que les mesures de $\mathcal{C}$ se fassent de 15 en 15 minutes. Quand, dans la suite de l'expérience, on ne donne aucune indication, il sera entendu que les mesures de $\mathcal{C}$ se font de 15 en 15 minutes :

$\mathcal{C}$ sous Λ_2	240		258		266
$\mathcal{C}$ sous Λ_1		710		888	

On abandonne 95 minutes sous Λ_2 :

$\mathcal{C}$ sous Λ_2	274		274	
$\mathcal{C}$ sous Λ_1		970		962

L'effet de la déformation commence à l'emporter sur l'effet de la station sous Λ_2.

On décrit à nouveau quatre fois le cycle Λ_1, Λ_0 (mercredi, 3^h). Naturellement $\mathcal{C}$ diminue beaucoup et tombe à 593; après 4 heures sous Λ_1, il est remonté à 702. Après 17 heures sous Λ_1, il est remonté à 754. La station sous Λ_1 augmente $\mathcal{C}$, ce que nous savons bien (jeudi, 8^h).

Mais parcourons alors le cycle Λ_1, Λ_2 en faisant les mesures de $\mathcal{C}$ toutes les 15 minutes :

$\mathcal{C}$ sous Λ_1	754		785		812
$\mathcal{C}$ sous Λ_2		269		274	

Tandis qu'en 13 heures sous Λ_1, $\mathcal{C}$ croît seulement de $754 - 702 = 52$; en une heure de parcours entre Λ_1 et Λ_2, ce qui correspond à une station de 30 minutes environ sous Λ_2, $\mathcal{C}$ augmente de $812 - 754 = 58$.

On ramène à Λ_2 aussitôt la dernière mesure faite; après 105 minutes sous Λ_2, on retourne à Λ_1 : $\mathcal{C} = 800$. Enfin, on ramène à Λ_2, on abandonne 24 heures : on retourne à Λ_1, $\mathcal{C} = 1003$ (vendredi, 2^h).

En définitive, si le fil, après les quatre parcours effectués le mercredi à 3 heures,

était resté 48 heures sous A_1, en mettant les choses au mieux, $\mathcal{C}$ pour A_1 serait monté vers 800; en le maintenant 25 heures à A_2, $\mathcal{C}$ atteint 1000, malgré l'effet produit par les déformations qui correspondent au passage de A_2 à A_1.

Je vais montrer maintenant que $A_2 = 3,5$ est approximativement l'allongement optimum quand il s'agit d'augmenter le paramètre $\mathcal{C}$ qui correspond à $A_1 = 5,3$ (bien entendu pour le caoutchouc utilisé et dans les conditions de l'expérience). Je recommence à peu près la même expérience sur le même caoutchouc, mais en utilisant les deux A : $A_1 = 5,3$; $A_3 = 4,4$ (vendredi, 2^h). Je parcours d'abord quatre fois le cycle A_1, A_0 pour abaisser notablement $\mathcal{C}$; il tombe à 549, remonte en 2 heures passées sous A_1 à 632 et en 18 heures (samedi, 8^h) à 710.

Je décris alors le cycle A_1, A_3 en faisant les mesures de $\mathcal{C}$ toutes les 15 minutes :

$\mathcal{C}$ sous A_1	710		710		710
$\mathcal{C}$ sous A_3		349		349	

Aucun effet appréciable. Je ramène à A_3 et j'abandonne jusqu'au dimanche 8^h. $\mathcal{C}$ remonte à 780. L'effet de la station sous l'allongement A_3 est donc beaucoup plus petit que l'effet de la station sous A_2. Dimanche, à 2^h, je vais jusqu'à l'allongement $A_4 = 2,6$, je reviens à A_1 ; naturellement $\mathcal{C}$ décroît notablement et retombe à 669. Je retourne à A_1 et je laisse la nuit entière sous cet allongement. Le lendemain (lundi, 8^h) $\mathcal{C}$ n'est remonté que jusqu'à 721 pour l'allongement A_1.

Ainsi ni la station de 24 heures sous $A_3 = 4,4$, ni celle sous $A_4 = 2,6$ ne sont capables de faire remonter $\mathcal{C}$ à une grande valeur; A_2 est donc voisin de l'allongement optimum.

Voici la contre-épreuve; lundi, 8^h, après la mesure précédente, je ramène à $A_2 = 3,5$; mardi, 8^h, je trouve, pour A_1, $\mathcal{C} = 937$. Malgré tous les parcours intermédiaires, et aussi peut-être à cause d'eux comme on va le voir, $\mathcal{C}$ est en train de remonter à la valeur la plus grande possible qui corresponde à A_1.

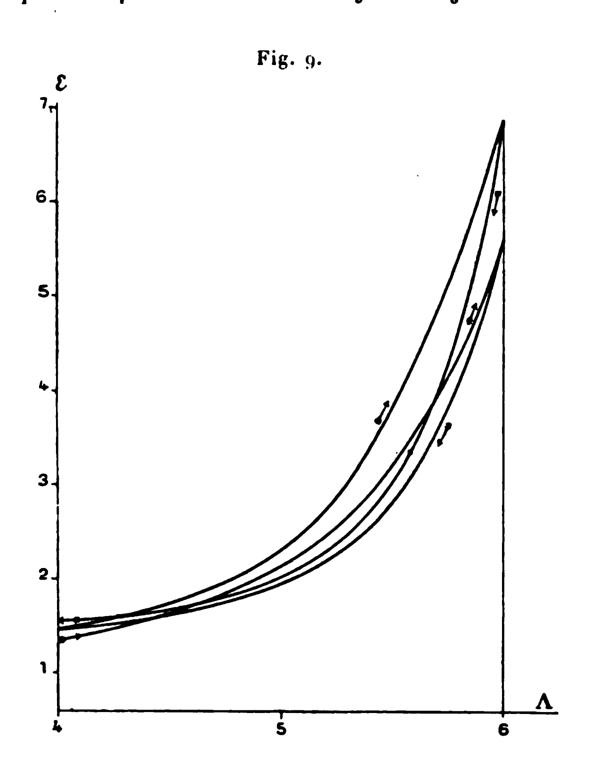
On maintient alors 4 heures sous A_1, $\mathcal{C} = 981$; 4 heures de plus, $\mathcal{C} = 1001$. De ce dernier fait nous pouvons conclure que l'accroissement de $\mathcal{C}$ sous A_1 dépend de l'état dans lequel on amène le fil à cet allongement. Il est plus que probable que si, après l'observation du samedi, où $\mathcal{C} = 710$, on avait laissé le caoutchouc indéfiniment sous l'allongement A_1, l'accroissement de $\mathcal{C}$ (qui, sous cet allongement, avait été de $710 - 632 = 78$ en 16 heures), n'aurait pas atteint la valeur 1001 (c'est-à-dire crû de $1001 - 710 = 291$) dans les trois jours qui séparent le samedi du mardi (exactement 79 heures). On sait en effet que tous ces phénomènes se ralentissent rapidement et qu'en 79 heures on est loin d'avoir cinq fois l'effet obtenu en 16 heures. L'expérience du jeudi est peut-être sur ce point encore plus démonstrative.

Il résulte immédiatement de la règle, et l'expérience confirme, qu'afin de donner

Lorsqu'on répète plusieurs fois un cycle petit, dont l'extrémité supérieure ne dépasse pas le Λ qui correspond au minimum de $\mathcal{E}$, il se fixe très rapidement, et l'hystérésis est quasi nulle.

Voici par exemple ce qu'un caoutchouc ayant déjà servi a donné pour le

Fig. 9.



cycle $\Lambda = 1{,}33$, $\Lambda = 3{,}33$. Les mesures de $\mathcal{E}$ se faisaient (avec arrêts de 15 minutes) aux $\Lambda = 1{,}33 - 2 - 2{,}66 - 3{,}33$.

		Aller.	Retour.	Aller.	Retour.	Moyennes.
Λ............	1,33	376	370		370	372
	2,00	165	168	167	171	168
	2,66	125	124	126	125	125
	3,33	120		119		120

30. *Influence de la température.* — L'étude du module $\mathcal{E}$ le long des parcours isothermiques, à des températures autres que la température ordinaire, n'a pas grand intérêt : les phénomènes ont la même allure, pourvu qu'on ne dépasse pas la température où commence la modification chimique plus profonde de la matière, que l'on reste par exemple au-dessous de 80°.

Au contraire la comparaison des valeurs de $\mathcal{E}$ successivement obtenues à deux

températures différentes est importante, mais difficile. Nous retrouverons les phénomènes déjà signalés, à propos de la réactivité et du parcours des cycles étendus, aux nos 18 et suivants du Mémoire *Sur la réactivité du caoutchouc*. *Le résultat de la comparaison des valeurs de $\mathcal{E}$ à deux températures t_0 et t_1 dépend essentiellement de la façon de croiser ces températures; un échauffement produit une modification du caoutchouc qui n'est pas fonction déterminée de la température, mais subsiste plus ou moins longtemps*. C'est ce phénomène fondamental que je vais d'abord mettre hors de doute.

On amène un fil neuf à l'allongement $\Lambda = 5$. A la température de 13° environ que nous appellerons t_0, $\mathcal{E}$ augmente peu à peu. En 320m il passe de 705 à 731. On porte à une température voisine de 46° que nous appellerons t_1. Après 30m de chauffe, on trouve $\mathcal{E} = 368$ et l'on éteint. Après une demi-heure, on mesure de nouveau $\mathcal{E}$ à t_0 : $\mathcal{E} = 444$. Mais $\mathcal{E}$ croît d'une manière continue, de sorte qu'après 15 heures on trouve $\mathcal{E} = 491$.

On recommence la même opération; après 30m pendant lesquelles l'étuve est à t_1, $\mathcal{E} = 366$. On éteint : 30m après, $\mathcal{E} = 436$. On attend encore 90m à t_0 : $\mathcal{E} = 454$.

On retrouve pour le module $\mathcal{E}$ un phénomène déjà signalé; à chaud il prend beaucoup plus vite sa valeur limite qu'à froid. Si donc on croise les deux températures, en faisant varier le temps T_0 passé à la température t_0, le temps T_1 passé à la température t_1 restant invariable, on obtient à froid des valeurs qui diminuent quand le temps T_0 diminue.

Continuons l'expérience.

On porte maintenant l'étuve à la température $t_2 = 78°$ pendant 30m : le caoutchouc ne s'échauffant pas instantanément, ne reste pas 30m à la température t_2; $\mathcal{E} = 226$. On éteint les brûleurs; après 30m, $\mathcal{E} = 250$. Mais le module croît assez rapidement : 150 minutes après l'extinction, $\mathcal{E} = 344$; 1160 minutes après l'extinction, $E = 425$. *Ainsi la modification par l'échauffement est à la fois énorme et temporaire :* le module croît de 250 à 425, si l'on attend qu'elle disparaisse à la température invariable t_0.

Le résultat de la comparaison des valeurs de $\mathcal{E}$ à deux températures t_0 et t_1 dépend donc essentiellement de la manière de croiser les expériences.

Les modifications de la matière se décèlent aussi par les variations du courant d'entretien des oscillations. Reprenons l'expérience précédente.

Pendant que $\mathcal{E}$ passait de 705 à 731, le courant d'entretien i tombait de 80 à 51 conformément à ce que j'ai dit au n° 25. On chauffe; l'absorption d'énergie décroît beaucoup à chaud : $i = 17$. On refroidit : pendant qu'à t_0 $\mathcal{E}$ s'accroît de 444 à 491, i passe de 24 à 37. Ainsi le fil recuit participe des propriétés du fil chaud par la

diminution, non seulement du module $\mathcal{E}$, mais encore du courant d'entretien i. A mesure que le temps passé à t_0 augmente, $\mathcal{E}$ et i s'accroissent.

On recuit : $\mathcal{E} = 366$, $i = 19$. On éteint : $\mathcal{E}$ passe de 436 à 454, i de 27 à 36.

J'ai déjà dit qu'il ne faut pas compter sur une grande précision dans l'évaluation du courant d'entretien ; les résultats précédents n'en sont pas moins d'une parfaite netteté.

Quelle que soit la complication introduite par les phénomènes précédents, l'expérience prouve qu'on peut conclure d'une manière générale :

1° *Le module $\mathcal{E}$ déduit de l'inclinaison des petits cycles répétés un grand nombre de fois diminue quand on chauffe, la longueur restant constante;*

2° *L'énergie fournie pour entretenir une oscillation diminue quand la température s'élève.*

31. *Expériences régulièrement croisées aux températures t_0 et t_1.* — Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur des variations de $\mathcal{E}$ quand on passe de t_0 à t_1, il faut donc croiser systématiquement les expériences. Voici quelques résultats.

On mesure $\mathcal{E}$ à t_0 (13° environ); aussitôt après on allume les brûleurs, l'étuve chauffe rapidement jusqu'à $t_1 = 47°$. Une demi-heure après la mesure précédente, on détermine $\mathcal{E}$ à t_1, on éteint les brûleurs ... et ainsi de suite. Les mesures sont donc faites systématiquement toutes les 30 minutes : la valeur de $\mathcal{E}$ résulte de la durée de 20 oscillations.

$\Lambda = 5$.	t_0	716		509		495	
	t_1		425		419		Rapport... 1,198
$\Lambda = 3$.	t_0	231		203		203	
	t_1		193		194		Rapport... 1,046
$\Lambda = 2$.	t_0	266		262			
	t_1		241				Rapport... 1,096

De cette expérience on peut conclure :

1° Il y a *accommodation,* c'est-à-dire qu'après un certain nombre de cycles les valeurs de $\mathcal{E}$ tendent vers des limites. Mais, si Λ est grand, il faut pour arriver pratiquement aux limites un nombre de cycles notable;

2° La diminution relative de $\mathcal{E}$ passe par un minimum qui correspond à peu près au minimum de $\mathcal{E}$ pour les deux températures.

3° Alors même que le fil a été porté à la température t_1 pour un Λ plus grand que le Λ actuel, il y a une plus grande diminution du module pour le premier recuit.

32. Voici une expérience plus complète où tous les phénomènes se trouvent rassemblés.

Un fil qui avait déjà été allongé à 5 fois sa longueur, mais qui n'avait jamais été chauffé, est mis en place : $L_0 = 18$. On fait aux différentes longueurs 25, 35, 50, 65, 80, 90 des expériences régulièrement croisées, à 14° et à 48° environ, de 30 en 30 minutes, comme il est dit ci-dessus. Voici les nombres obtenus; on donne aussi les rapports R_1 des $\mathcal{E}$ aux deux températures, calculés d'après les derniers nombres, et le rapport R_2 des intensités des courants d'entretien :

D = 25.	t_0........	415		412		409	$R_1 = 1,076$
	t_1........		381		382		$R_2 = 1,45$
D = 35.	t_0........	266		268		269	$R_1 = 1,055$
	t_1........		253		254		$R_2 = 1,44$
D = 50.	t_0........	233		230			$R_1 = 1,022$
	t_1........		225				$R_2 = 1,32$
D = 65.	t_0........	258		252			$R_1 = 1,033$
	t_1........		245				$R_2 = 1,31$
D = 80.	t_0........	401		363			$R_1 = 1,110$
	t_1........		327				$R_2 = 1,45$
D = 90.	t_0........	650		545		537	$R_1 = 1,170$
	t_1........		460		460		$R_2 = 1,50$
D = 80.	t_0........	324		324			$R_1 = 1,110$
	t_1........		292				$R_2 = 1,41$
D = 65.	t_0........	250		238			$R_1 = 1,035$
	t_1........		230				$R_2 = 1,33$
D = 50.	t_0........	227		222			$R_1 = 1,028$
	t_1........		216				$R_2 = 1,30$
D = 35.	t_0........	278		269			$R_1 = 1,055$
	t_1........		255				
D = 25.	t_0........	420					$R_1 = 1,071$
	t_1........		392				

Remarque. — Pour faire une pareille expérience il faut 3 jours; il est donc impossible de croiser aussi régulièrement qu'on le voudrait les diverses opérations. Il est d'autant plus remarquable qu'on retrouve sur la courbe de décharge les rapports R_1 qui correspondent à la courbe de charge. Ils présentent un minimum parfaitement net. Il semble aussi que ce minimum se retrouve pour les intensités des courants d'entretien et par conséquent pour les absorptions d'énergie.

La dernière expérience à $t_1 = 48°$ était faite un vendredi à $11^h 30^m$.

On maintient la température jusqu'à 2 heures de l'après-midi, ce qui correspond à peu près à 3 heures passées à 48°. On retrouve exactement $\mathcal{E} = 392$. Comme nous l'avons déjà dit, ce fait prouve qu'on arrive très vite à haute température à la valeur limite.

On allonge alors *à chaud* jusqu'à $D = 90$ et l'on maintient la température t_1 jusqu'à $4^h 10^m$: $\mathcal{E}$ se maintient à peu près constant à la valeur 344, avec une légère

croissance (de 341 à 344) dans les premiers instants. Même conclusion que ci-dessus.

On refroidit alors. A la température t_0 on trouve successivement pour $D = 90$:

Vendredi $4^h 40^m$: 422, 425, 429; samedi $7^h 50^m$ du matin : 528, 534; lundi $8^h 20^m$ du matin : 572, 577. On laisse osciller : après 2 heures d'oscillations on retrouve 577. Ainsi, sauf peut-être au début, au moment de la mise en train, la continuation du mouvement oscillatoire ne produit pas d'effet notable, ce qui est d'accord avec ce que nous avons dit à la fin du n° 25.

On remarquera l'énorme accroissement (422 à 577, soit 100 à 136) du module $\mathcal{E}$ par le repos après le refroidissement : on comprendra quelle prudence et quelles précisions ce fait nous impose, quand nous parlons des effets de la température.

La première partie de l'expérience durant 3 jours, il y a nécessairement des arrêts plus ou moins longs (nuit ou durée du repas de midi) entre certaines déterminations. Par exemple, après la première expérience à $D = 90$, le caoutchouc reste à t_0 2 heures sous cet allongement. Le module $\mathcal{E}$ passe de 537 à 570 : ce dernier nombre est à peu près celui qu'on obtient à la fin de l'expérience tout entière. Donc tous les parcours et opérations imposés entre la première et la seconde opération à $D = 90$ ne modifient pas beaucoup les valeurs limites de $\mathcal{E}$.

Enfin, des variations fréquentes et notables de température sous tension donnent au caoutchouc des allongements permanents relativement considérables. Ils peuvent atteindre 8 à 10 pour 100 pour des échauffements à 90° sous un allongement de $\Lambda = 5$.

33. L'expérience suivante nous fait avancer d'un grand pas.

Le fil avait déjà servi, mais n'avait jamais été échauffé. On mesure toujours $\mathcal{E}$ sous l'allongement $\Lambda_1 = 5,3$; mais de temps en temps on ramène à l'allongement $\Lambda_2 = 1,35$. Ce sont les effets du cycle $\Lambda_1 - \Lambda_2$, soit à $t_0 = 14°$, soit à $t_1 = 48°$, que l'on veut comparer.

Première série. — On impose au fil trois fois le cycle $\Lambda_2 - \Lambda_1$; on amène à Λ_1 et l'on mesure $\mathcal{E}$ à froid et à chaud.

$1^h 30^m$..........	$\mathcal{E}_0 = 758$	2^h.............	$\mathcal{E}_1 = 462$
$2^h 30^m$..........	$\mathcal{E}_0 = 555$	3^h.............	$\mathcal{E}_0 = 562$

Les faits sont conformes à ce que nous savons.

On retourne alors à Λ_2, on revient aussitôt à Λ_1 et l'on mesure $\mathcal{E}$.

$3^h 5^m$...	$\mathcal{E}_0 = 555$	$3^h 55^m$...	$\mathcal{E}_1 = 432$	$4^h 5^m$...	$\mathcal{E}_0 = 512$

On abandonne alors dans les conditions Λ_1, t_0 jusqu'au lendemain.

Toutes les expériences antérieures nous avaient appris que le fait de ramener à tension petite diminue considérablement $\mathcal{E}$. Nous constatons ici au contraire que $\mathcal{E}_0$ passe de 562 à 555, c'est-à-dire ne diminue qu'à peine; mais l'échauffement avait amené $\mathcal{E}_0$ de 758 à 555. Nous pouvons donc prévoir que *le parcours du cycle à froid supprime en grande partie l'effet produit par l'échauffement.* Cette hypothèse n'a d'ailleurs rien d'extraordinaire, puisque nous savons que les effets des parcours et de l'échauffement sont en grande partie subpermanents, c'est-à-dire disparaissent avec le temps, au moins quand il s'agit de fils ayant parcouru déjà plusieurs fois le cycle imposé.

La continuation de l'expérience met cette interprétation hors de doute.

Seconde série. — Lendemain :

$8^h 15^m$... $\mathcal{E}_0 = 573$ $8^h 45^m$... $\mathcal{E}_1 = 423$ $9^h 15^m$... $\mathcal{E}_0 = 994$

Sous t_0, on parcourt le cycle $A_1 - A_2$:

$9^h 25^m$.......... $\mathcal{E}_0 = 524$ $9^h 55^m$.......... $\mathcal{E}_1 = 407$

Sous t_1, on parcourt le cycle $A_1 - A_2$... $\mathcal{E}_1 = 341$ $\mathcal{E}_0 = 436$
Sous t_0, on parcourt le cycle $A_1 - A_2$... $\mathcal{E}_0 = 468$ $\mathcal{E}_1 = 388$
Sous t_1, on parcourt le cycle $A_1 - A_2$... $\mathcal{E}_1 = 335$

Ainsi le parcours du cycle peut augmenter la valeur de $\mathcal{E}_0$, parce qu'un échauffement le précède immédiatement. Les expériences sont faites toujours de la même manière; $\mathcal{E}$ est mesuré aussitôt avant et un peu après le parcours; on attend une demi-heure pour l'échauffement et le refroidissement. On est arrivé ainsi à $11^h 45^m$; on laisse refroidir.

A $1^h 45^m$, $\mathcal{E}_0 = 462$; lendemain à $7^h 30^m$, $\mathcal{E}_0 = 528$.

On parcourt le cycle $A_1 - A_2$; $\mathcal{E}_0 = 474$. A $9^h 30^m$, $\mathcal{E}_0 = 514$.

Reprenons la discussion. Dans l'expérience de la veille, on avait maintenu t_0 pendant une heure avant de décrire le parcours; $\mathcal{E}_0$ avait eu le temps de croître un peu et le parcours l'avait diminué légèrement. Dans la première expérience de la seconde série, on ne maintient t_0 qu'une demi-heure : la description du parcours fait passer $\mathcal{E}_0$ de 499 à 524; $\mathcal{E}_0$ *est devenu plus grand.* De même $\mathcal{E}_0$ passera de 436 à 468 dans la troisième expérience. Au contraire, dans la cinquième, on attend 17 heures et demie sous t_0 avant de décrire le parcours; $\mathcal{E}_0$ passe de 528 à 474.

Naturellement le parcours diminue considérablement $\mathcal{E}_1$: dans la deuxième expérience, il passe de 407 à 341; dans la quatrième, de 388 à 335.

Nous savons déjà qu'en revenant à A_1 $\mathcal{E}$ croît rapidement dans les premiers instants, que l'on opère à t_0 ou à t_1; les valeurs données de $\mathcal{E}$ correspondent approximativement à un repos de 5 minutes sous A_1.

Nous pouvons donc conclure de l'expérience précédente que l'*échauffement transforme la matière en une variété assez instable qui subit la transformation inverse soit lentement par un simple repos, soit plus rapidement par des déformations suffisamment étendues.*

Une partie seulement de l'effet de l'échauffement et du parcours est subpermanente; nous savons, par exemple, que l'échauffement sous tension allonge le fil d'une manière permanente.

On fait sur les courants d'entretien des remarques analogues.

Lorsque toutes les opérations sont isothermiques, le fait de ramener à tension petite diminue le courant nécessaire à l'entretien des oscillations sous A_1. Le contraire se produit si le fil vient d'être échauffé. Ainsi, dans la première expérience à t_0 de la seconde série, le courant passe (en unités arbitraires) de 34 à 41. Dans la troisième, il passe de 30 à 35. Mais dans la cinquième il passe de 36 à 35 : les conditions sont alors toutes différentes.

Bien entendu, lorsque le cycle est parcouru à chaud, le courant d'entretien diminue.

34. *Remarques sur quelques résultats antérieurement obtenus.* — Le paramètre $\mathcal{E}$ *à longueur constante* diminue donc quand on élève la température. Quelques résultats antérieurement obtenus paraissent contredire cette proposition.

J'ai montré, au n° 16 du Mémoire *Sur les courbes de traction du caouchouc vulcanisé,* que, pour des températures régulièrement croisées, le cycle est plus redressé et plus aplati à chaud qu'à froid. Or, si le paramètre $\mathcal{E}$ est plus petit à chaud qu'à froid en chaque point du cycle, celui-ci semble devoir faire avec la verticale un angle moyen plus grand à chaud qu'à froid. La conciliation s'obtient aisément à l'aide du n° 15 du Mémoire *Sur la réactivité du caoutchouc vulcanisé.* La réactivité diminue beaucoup quand on chauffe le fil; la diminution est assez considérable, non seulement pour compenser la diminution de $\mathcal{E}$, mais encore pour produire un redressement. Le fait que le cycle est plus aplati à chaud, que l'hystérésis est alors moindre, apporte un supplément de preuve à cette interprétation.

Nous avons vu au n° 30 que l'énergie à fournir pour entretenir les petites oscillations est plus petite à chaud qu'à froid. Ce fait concorde avec la diminution de réactivité : il est pour les petits parcours la marque d'une diminution d'hystérésis.

On comprend maintenant à quel point se méprennent ceux qui calculent le module d'élasticité à partir des courbes de traction. Quelquefois ils concluent que ce module augmente quand la température s'élève; d'autres fois ils concluent que le module diminue. Dans le premier cas ils ont croisé les expériences (n° 15 du Mémoire *Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé*); dans le second

ils n'ont pas pris cette précaution (n° 16 du même Mémoire). Dans les deux cas d'ailleurs leur énoncé est faux; ils oublient de discerner les divers groupes de causes qui produisent des phénomènes inverses dont l'ensemble est inexplicable, si on ne les isole pas avec le plus grand soin.

ONDES STATIONNAIRES LONGITUDINALES.

35. Pour comprendre les expériences qui suivent, il faut préciser la nature théorique du problème. J'ai décrit au n° 13 l'appareil employé. J'admets d'abord qu'il n'y a pas absorption notable d'énergie, c'est-à-dire qu'on peut utiliser l'équation

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

où s est le déplacement de chaque point de la corde à partir de sa position d'équilibre, x la distance au diapason, t le temps, v la vitesse uniforme de propagation.

Prenons l'intégrale sous la forme

$$s = s_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \sigma\right) \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

La seule condition à satisfaire est $\lambda = vT$; les paramètres s_0 et σ sont arbitraires. Imposons au diapason une oscillation d'amplitude déterminée

$$s = S \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Il faut faire $x = 0$ dans l'intégrale, et la condition devient

$$S = s_0 \sin\sigma;$$

l'intégrale peut alors s'écrire

$$s = \frac{S}{\sin\sigma} \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \sigma\right) \sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Soit maintenant L la longueur du caoutchouc : nous devons avoir $s = 0$ identiquement pour $x = L$. D'où

$$s = \frac{S}{\sin 2\pi\frac{L}{\lambda}} \sin 2\pi\frac{L - x}{\lambda} \sin 2\pi\frac{t}{T}. \tag{1}$$

Cette formule paraît d'abord absurde, tant elle choque l'idée qu'on doit assimiler toujours et dans tous leurs détails les vibrations longitudinales aux phénomènes

m est le nombre par lequel l'amplitude, en un point d'un fil indéfini, doit être divisée pour obtenir l'amplitude en un point distant d'une longueur d'onde. L'équation précédente devient

$$\log \text{nép.}\, m\,(m^{2u} - m^{-2u}) + 4\pi \sin 4\pi u = 0,$$

équation transcendante que nous pouvons résoudre en construisant les courbes

$$y = -\sin 4\pi u, \qquad y' = \frac{\log \text{nép.}\, m}{4\pi}(m^{2u} - m^{-2u}),$$

pour des valeurs convenables du paramètre m : la variable u est le nombre de longueurs d'ondes comptées sur le fil, à partir du point où se fait la réflexion.

Il est d'abord évident que les nœuds et les ventres (minima et maxima d'amplitude) sont en nombre limité, puisque les valeurs correspondantes de u sont données par l'intersection d'un sinusoïde (dont les ordonnées dans la partie utile oscillent entre 0 et 1) et d'une courbe dont les ordonnées croissent continûment et sans limite.

Lorsqu'on a $k = 0$, les ventres correspondent aux valeurs de u égales à 25, 75, 125, 175, ... centièmes; les nœuds correspondent aux valeurs 0, 50, 100, 150, 200, ... centièmes. Il suffit de tracer grossièrement une sinusoïde et une courbe constamment croissante, pour voir que les ventres correspondront maintenant aux valeurs de u égales à $25 + \varepsilon_1$, $75 + \varepsilon_2$, $125 + \varepsilon_3$ centièmes, et les nœuds, aux valeurs de u égales à $50 - \varepsilon'_1$, $100 - \varepsilon'_2$, $150 - \varepsilon'_3$, ..., les nombres positifs ε croissant à mesure que leur indice croît.

La distance d'un ventre au nœud suivant diminue donc quand u croît, jusqu'à ce que les ventres et les nœuds disparaissent.

L'expérience fournit seulement les nœuds avec quelque précision; pour fixer les idées, j'ai calculé en fonction de la longueur d'onde prise pour unité les distances des trois premiers nœuds (le premier correspondant à $u = 0$) en faisant successivement $m = 2$, 3 et 4. Voici les résultats :

	Positions des nœuds.		Distances des nœuds.	
$m = 2$	0,494	0,985	0,494	0,491
$m = 3$	0,482	0,940	0,482	0,458
$m = 4$	0,472	»	0,472	»

Pour $m = 4$, il n'y a qu'un seul nœud.

1° Comme il est à peu près impossible de corriger les résultats bruts de l'expérience de l'influence de l'amortissement, il résulte de ce calcul que la méthode ne

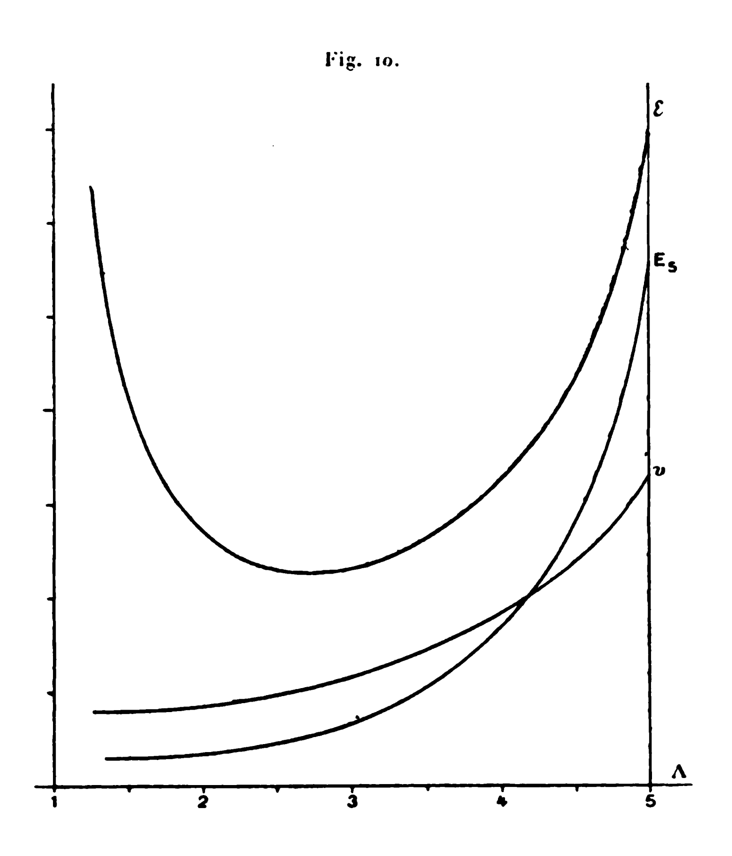
peut pas donner des résultats bien précis; la limite de ce qu'on est en droit d'attendre d'elle est $\frac{1}{50}$ environ dans les cas favorables.

2° A mesure qu'on s'éloigne de la pince, la distance des nœuds diminue; l'expérience confirme ce résultat. Les différences sont de l'ordre de celles qu'on vient de calculer pour $m = 2$ ou 3.

3° L'amortissement varie avec l'allongement actuel de la corde. Généralement il est impossible de voir plus de 4 ou 5 nœuds; quand la longueur d'onde est grande, il n'en existe quelquefois pas plus de deux. L'ordre de grandeur de m est donc tel que nous l'avons supposé.

37. Quoi qu'il en soit des imperfections de la méthode, elle est commode et d'une incontestable élégance. La mesure du premier entrenœud donne sensiblement la moitié de la longueur d'onde. De la relation $\lambda = v\mathrm{T}$, si l'on connaît T (*fig.* 10), c'est-à-dire la période du diapason, on tire la vitesse v de propagation

Fig. 10.



longitudinale d'une onde. Enfin, de la connaissance de cette vitesse, on déduit la valeur du paramètre E_5, qui est très sensiblement proportionnelle à v^2.

Le paramètre E_5 est défini par l'équation

$$E_5 = \frac{dP}{dL}\frac{L}{s} = \mathcal{E}\frac{L}{s}.$$

La formule de Newton apprend, d'autre part, que

$$v = \sqrt{\frac{gE_5}{\delta}},$$

où δ est le poids spécifique. Pour le caoutchouc, δ est à peu près invariable; il l'est rigoureusement à la précision de l'expérience que je discute. Donc E_5 est proportionnel au carré de l'intervalle des deux nœuds.

La méthode donne ce paramètre toujours par défaut et l'erreur commise croît à mesure que l'amortissement augmente. Il est, d'ailleurs, toujours plus correct d'opérer sur une corde ayant plusieurs demi-longueurs d'onde; on s'approche ainsi des hypothèses du n° 36 : les nœuds sont dus à l'interférence d'une seule onde incidente et d'une seule onde réfléchie.

Étudions de plus près l'hypothèse du n° 36 sur la forme de la fonction d'amortissement et montrons qu'elle concorde avec ce que nous apprendront les expériences directes (n° 53). Prenons l'onde dans une de ses positions et considérons un certain point; l'amplitude y est $s' = e^{-kx}$; l'énergie contenue dans une longueur d'onde, prise à partir de ce point, est proportionnelle au carré de l'amplitude en ce point; nous pouvons poser

$$W = Ae^{-2kx}.$$

Considérons maintenant cette même onde, après qu'elle s'est déplacée de dx. L'énergie qu'elle contient a diminué de

$$dW = -2kAe^{-2kx}dx = -2kAs'^2dx.$$

Donc, admettre la loi exponentielle de décroissement pour les amplitudes, revient à admettre que l'absorption d'énergie est, à chaque instant, proportionnelle au carré de l'amplitude.

On peut encore prouver ce résultat d'une autre manière. On sait qu'en admettant un frottement proportionnel à la vitesse, on retombe sur une absorption d'énergie proportionnelle au carré de l'amplitude (n° 22). Je vais montrer que l'hypothèse d'un frottement proportionnel à la vitesse conduit à compléter de la manière suivante l'équation régissant la propagation d'un ébranlement longitudinal

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + n\frac{\partial^3 s}{\partial x^2\,\partial t}.$$

En effet, la déformation de l'élément ds est mesurée par le quotient $\frac{\partial s}{\partial x}$; la vitesse de déformation est donc mesurée par $\frac{\partial^2 s}{\partial x\, \partial t}$: il résulte de cette vitesse un frottement proportionnel. Enfin, la force sur un élément dx du cylindre est la résultante de deux forces produites par les vitesses de déformation des deux éléments adjacents, résultante dont l'expression est proportionnelle à

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t}\right) = \frac{\partial^3 s}{\partial x^2 \partial t}.$$

Ceci posé, on vérifie facilement que l'équation différentielle admet des intégrales de la forme

$$e^{-kx} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

En substituant et égalant à o les coefficients des sin et des cos, on trouve deux équations de condition, qu'on résout facilement grâce à la circonstance que k est assez petit devant $2\pi:\lambda$, pour qu'on puisse négliger k^2 devant $4\pi^2:\lambda^2$.

Donc, l'hypothèse faite sur la forme de la fonction d'amortissement revient bien à admettre une absorption d'énergie proportionnelle au carré de l'amplitude. Il ne faudrait pas induire du raisonnement précédent que le frottement intérieur dans le caoutchouc est proportionnel à la vitesse; bien d'autres hypothèses conduisent à une absorption d'énergie proportionnelle au carré de l'amplitude.

38. *Variation cyclique du paramètre* E_3. — On retrouve avec la méthode actuelle les résultats généraux que nous connaissons, pour les variations du paramètre E_3, le long d'un cycle de traction. Il y a hystérésis; l'effet est surtout marqué, comme on doit le prévoir, pour les premiers cycles effectués avec un fil neuf.

Il semble pourtant que le paramètre E_3, déterminé par la méthode actuelle, présente un hystérésis moins considérable que déterminé par la méthode du pendule entretenu, surtout quand le cycle est répété plusieurs fois. *A priori* il n'y a aucune contradiction à ce qu'il en soit ainsi. Nous ne savons pas encore sûrement dans quelle limite les diverses méthodes que nous étudions éliminent les phénomènes qui ne sont pas d'élasticité parfaite; nous ne savons même pas quel est le nombre des groupes de ces phénomènes. Chacun d'eux peut avoir son hystérésis propre, et ce que nous observons comme hystérésis des premiers $\mathcal{E}$ et E_3, est dû à la superposition de tous ces hystérésis. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que des opérations effectuées dans des conditions aussi différentes que celles qui déterminent $\mathcal{E}$ par la méthode du pendule entretenu et E_3 par les ondes longitudinales, ne donnent pas des résultats identiques.

On s'étonnera peut-être que je n'aie pas fait des mesures absolues qui permissent la comparaison numérique des résultats des deux méthodes; si l'on veut bien réfléchir que *de telles comparaisons ne peuvent avoir un sens qu'effectuées sur le même caoutchouc et avec un appareil construit de manière qu'il soit possible de passer d'une expérience à l'autre sans que le caoutchouc soit touché le moins du monde*, on conviendra que j'avais mieux à faire que perdre mon temps à des essais pour le moins prématurés.

39. Parmi les phénomènes étudiés par la méthode du pendule, il importe de vérifier, avec la méthode des ondes stationnaires, l'influence d'une station sous un allongement donné.

On utilise un caoutchouc neuf, $L_0 = 80^{cm}$. On l'amène à l'allongement $A = 5$, l'entrenœud immédiatement déterminé est 177^{cm}. On maintient sous cet allongement 15 heures, l'entrenœud devient 193^{cm}. La vitesse croît donc dans le rapport $193:177 = 1,09$; les paramètres E_5 ou $\mathcal{E}$ croissent dans le rapport $\overline{193}^2:\overline{177}^2 = 1,18$.

On revient successivement aux divers allongements A_1, on retourne à $A = 5$ et l'on détermine chaque fois la distance du premier nœud à la pince. On trouve

A_1.	5,00.	4,37.	3,75.	3,12.	2,50.	1,87.	1,25.	1,00.
Entrenœud.......	193^{cm}	192^{cm}	187^{cm}	177^{cm}	164^{cm}	150^{cm}	141^{cm}	139^{cm}

On laisse 3 heures sous l'allongement $A = 5$, l'entrenœud remonte à 158; 3 heures après, il est revenu à 167^{cm}.

Comme le diapason fait 50 vibrations à la seconde, la vitesse de propagation est représentée en mètres par les nombres précédents, qui expriment en centimètres la demi-longueur d'onde. Ces résultats sont entièrement conformes à ce que nous savons.

J'ai terminé l'expérience précédente en mesurant la longueur de l'entrenœud pour les allongements A_1 suivants, qui varient régulièrement de 5 à 1 :

A_1.	5.00.	4,75.	4,50.	4,25.	4,00.	3,75.	3,50.	3.25.
Entrenœud....	167^{cm}	138^{cm}	119^{cm}	104^{cm}	92^{cm}	81^{cm}	72^{cm}	64^{cm}
A_1.	3,00.	2,75.	2,50.	2,25.	2,00.	1,75.	1,50.	1,25.
Entrenœud....	58^{cm}	52^{cm}	48^{cm}	44^{cm}	41^{cm}	40^{cm}	40^{cm}	40^{cm}

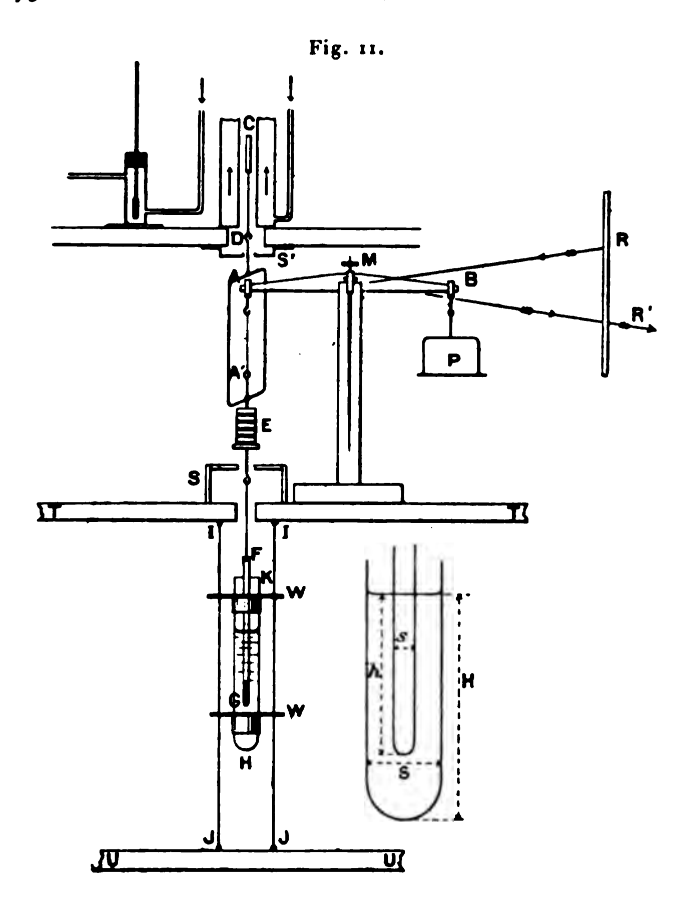
La figure 10 représente trois courbes. La courbe marquée v est obtenue en prenant comme abscisses les A_1 précédents et comme ordonnées les longueurs des

entrenœuds directement déterminées. Comme nous le faisions prévoir au n° 27, la vitesse de propagation est constante pour de petits allongements. La courbe E_5 s'obtient en portant en ordonnées des nombres proportionnels aux carrés de la vitesse de progagation ou de la longueur des entrenœuds. Enfin la courbe $\mathcal{E}$ s'obtient en divisant les ordonnées de la courbe précédente par le carré de l'allongement A. Elle présente l'allure que nous ont fait connaître les expériences effectuées aveo le pendule.

MODULE $\mathcal{E}$ A CHARGE CONSTANTE. MÉTHODE STATIQUE.

40. *Description des appareils.* — Le problème expérimental est analogue à celui qu'on trouve résolu dans mon Mémoire *Sur les courbes de déformation, etc.*, Chap. I, p. 179. Mais les fils de caoutchouc, à l'inverse des fils métalliques, sont

Fig. 11.

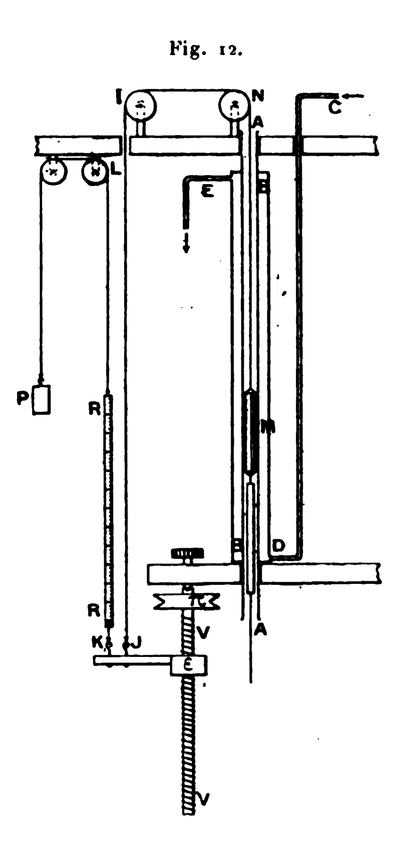


si extensibles qu'il devient nécessaire de transformer l'appareil. Il est représenté schématiquement figures 11 et 12.

La partie essentielle (*fig.* 11) est le fléau AB. C'est celui d'une balance hydrostatique très sensible; sur l'aiguille, à la hauteur du couteau central, est fixé un miroir M permettant d'évaluer, à l'aide d'une lunette non représentée et de la règle de verre divisée R, les déplacements verticaux du couteau A.

Le caoutchouc C est serré dans une pince (non représentée) dont le manche supporte le système rigide DE. A la pièce DE (*fig.* 12) est soudé un disque

Fig. 12.



en laiton sur lequel on peut empiler des disques de plomb fendus suivant un rayon; chacun d'eux pèse 66^{g}. Le crochet A′ est relié par un fil fin au crochet A de la balance. Le cylindre de verre FG est lesté par du mercure et à peu près équilibré, ainsi que l'étrier DE, par des poids P placés dans le plateau de la balance. On peut donc régler, à l'aide tant des disques de plomb que du poids P, la charge que supporte le caoutchouc.

Je viens de dire que le caoutchouc était pris dans des pinces; dans mes précédents Mémoires, je n'ai pas indiqué un artifice par lequel on évite que la corde ne soit abîmée par la pince qui la serre. Il faut, au moment du serrage, tendre fortement avec les doigts le caoutchouc au point où les mâchoires s'appliquent;

on est sûr qu'il ne se déchirera pas, même à la surface, pour toutes les tensions inférieures ou peu supérieures à celle que l'on a alors exercée.

Le cylindre FG plonge dans un tube KH rempli d'eau; ce tube porte des montures W formées d'un bout de tube de laiton et d'une plaque horizontale. Ces plaques sont percées de trous dans lesquels passent les fils métalliques verticaux IJ, fixés solidement en I et J, tendus et servant de guides. On donne au système formé par le cylindre KH et ses montures, un mouvement alternatif sinusoïdal par rapport en temps à l'aide d'un excentrique. Je n'insiste pas sur le détail de ce mécanisme, dont on imagine aisément l'essentiel et dont la forme dépend, naturellement, de l'espace disponible et de l'installation générale du laboratoire.

L'excentrique est porté par une roue à laquelle on donne un mouvement uniforme convenable. On peut ainsi imposer au caoutchouc, à partir d'une charge moyenne déterminée, une variation de charge alternative, suivant une loi parfaitement connue.

41. Avant de discuter la méthode, je termine la description de l'appareil. Le caoutchouc doit être porté à des températures variables et connues. Il est donc renfermé dans un tube AA (*fig.* 12) entouré d'un tube plus large BB. On peut faire circuler entre les deux tubes un courant CDBE d'eau portée à une température connue par des appareils de chauffage décrits dans mon Mémoire *Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé*, p. 260.

Il est nécessaire que le point A (*fig.* 11) oscille autour d'une position à peu près invariable. Il faut donc pouvoir déplacer l'extrémité supérieure du caoutchouc. Elle est fixée (*fig.* 12) à un tube M rempli de plomb et bouchant à peu près complètement le tube AA. Un fil d'acier MNIJ le supporte; il s'attache au point J à un crochet fixé sur l'écrou d'une vis verticale ayant $1^{m},20$ de long et qu'on peut faire tourner à l'aide de la poulie π. Enfin la position de l'écrou, et par conséquent de l'extrémité supérieure du caoutchouc, est déterminée au moyen d'une lunette qui vise la règle RR, attachée en K et retenue verticale par le poids P (*fig.* 12).

L'observateur a donc, l'une à côté de l'autre, deux lunettes : avec l'une il vise la règle R (*fig.* 11); avec l'autre il vise la règle R (*fig.* 12). Il a, de plus, sous la main, la commande d'un appareil d'embrayage permettant de faire tourner la poulie π dans un sens, dans l'autre, ou de l'arrêter instantanément. Il peut donc s'arranger de manière que le milieu de l'oscillation coïncide toujours avec le milieu de la règle R (*fig.* 11). Celle-ci est gravée sur verre en millimètres et éclairée par transparence à l'aide d'une lampe électrique à verre dépoli, qu'on peut déplacer verticalement pour lui donner une position convenable.

Pour éviter tout accident, si le caoutchouc cassait, un support S est disposé de manière à recevoir les masses de plomb E; un autre support S′ empêcherait

l'étrier DE de culbuter et, au besoin, amortirait la chute du tube plein de plomb M (*fig.* 12). Si, au contraire, le caoutchouc n'est pas assez tendu, l'étrier butte contre le support S'. On évite ainsi que le fléau ne soit dangereusement soulevé.

La distance AM des couteaux de la balance est de 14^{cm}. La distance du miroir à l'échelle est de 1^{m}. Le rapport du déplacement vertical du point A à la différence des nombres lus sur la règle R est donc voisin de

$$14 : 200 = 1 : 14.$$

On apprécie aisément le $\frac{1}{10}$ de millimètre sur la règle R; on peut donc compter sur le $\frac{1}{140}$ de millimètre pour l'estimation des variations de longueur du caoutchouc. L'expérience montre que cette précision n'est pas illusoire. J'ai été moi-même étonné de la régularité avec laquelle fonctionne l'appareil que je viens de décrire et dont la complexité est grande. Je vais maintenant discuter la méthode d'obtention des charges variables et montrer pourquoi la disposition qui était commode pour les fils métalliques (*loc. cit.*) ne peut plus servir pour le caoutchouc.

42. Soit x la variable qui fixe la position du vase HK (*fig.* 11); dx est compté positivement quand le vase descend. Soit L la longueur du caoutchouc dont je suppose l'extrémité supérieure invariablement fixée : L détermine la position du tube FG. Soient enfin h la quantité dont ce tube s'enfonce dans l'eau, H la hauteur de l'eau dans le vase HK, s la section extérieure du tube FG, S la section intérieure du tube HK. Une figure auxiliaire permet de suivre le raisonnement.

Écrivons que le volume de l'eau est invariable : ce volume a pour expression $HS - hs$; d'où

$$\text{(1)} \qquad S\,dH = s\,dh.$$

Si le vase HK s'abaisse de dx, le niveau absolu de l'eau s'abaisse de $dx - dH$. Mais le caoutchouc se trouve plus tendu; il s'allonge de dL. Donc la hauteur h, de laquelle il plonge dans l'eau, varie de

$$\text{(2)} \qquad dh = -dx + dH + dL.$$

Posons maintenant

$$\varepsilon = \frac{dP}{dL};$$

soit δ le poids spécifique du liquide. Nous avons, évidemment,

$$(3) \qquad dP = -s\,dh\,\delta, \qquad dL = -\frac{s\delta}{\mathcal{E}}\,dh.$$

Pour trouver la relation entre x et L, il suffit d'éliminer dh et dH entre les équations (1), (2) et (3); il vient

$$dL = \frac{dx}{1 + \frac{\mathcal{E}}{\delta}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right)} = \frac{dx}{1 + \frac{\mathcal{E}}{\delta s}\left(1 - \frac{s}{S}\right)}.$$

Cette formule montre que, si l'amplitude du mouvement oscillatoire du vase HK reste constante, $\mathcal{E}$ et dL ne sont en raison inverse l'un de l'autre que si le second terme du dénominateur l'emporte beaucoup sur le premier, qui est l'unité. Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que s soit petit et S grand. Or, le tube FG n'a jamais eu plus de 11^{mm} de diamètre environ, le tube HK a 35^{mm}. Le rapport $s : S < 1 : 10$. Mais, en diminuant s, on se trouve dans la nécessité d'augmenter beaucoup la course du tube HK, pour que la variation du poids soit suffisante. Un tube de 11^{mm} de diamètre a pour section $0^{cm^2},95$. Une course de 40^{cm} donne une variation de poids qui est voisine de

$$0{,}95 \times 40 \times \frac{9}{10} = 34^{g}.$$

Avec de pareilles courses, le procédé de vases communicants employé pour les fils métalliques n'est décidément plus pratique.

En définitive, nous pouvons poser

$$\mathcal{E} = K\left(\frac{dx}{dL} - 1\right).$$

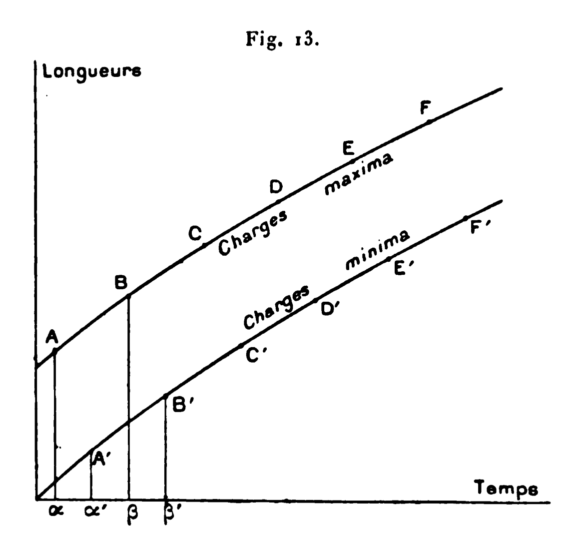
Il est donc toujours possible de faire la correction : mais, avec les dimensions que nous avons employées, $dx : dL$ est ordinairement de l'ordre de 40. Aussi, bien que les expériences donnent des nombres comparables à une bien plus grande approximation, comme il sera généralement question dans ce Mémoire, non de valeurs absolues, mais de valeurs relatives et de variations de la quantité $\mathcal{E}$, nous nous dispenserons généralement de la faire.

43. *Interprétation des résultats.* — Pour préciser les idées, supposons qu'on arrive à la charge P_0, qui sera maintenue constante en moyenne, par charges croissantes. On superpose à cette charge une charge alternativement positive et négative, de sorte que la charge totale est de la forme $P_0 + P' \sin \omega t$. On détermine alors les longueurs pour les charges $P_0 \pm P'$ et l'on obtient une série de

points A, A′, B, B′, ... (*fig.* 13), dont la position indique que non seulement le fil subit des allongements et des raccourcissements périodiques, mais encore que la réactivité intervient pour produire un allongement continu.

Les points expérimentalement obtenus, on les joint par deux courbes continues ABC ..., A′B′C′.... On admet alors que, si la réactivité n'existait pas, la

Fig. 13.



distance des maxima et minima consécutifs de la longueur serait égale à la distance verticale des courbes que nous venons de tracer. En d'autres termes, $\mathcal{C}$ est à chaque instant mesuré par l'inverse de la différence des ordonnées correspondant à cet instant.

Cette manière d'interpréter les résultats paraît incontestable, lorsque le temps passé sous une charge donnée a été tel que la vitesse de l'allongement provenant de la réactivité soit devenue très petite. Il n'est même plus alors nécessaire de construire les courbes ABC, A′B′C′ : il suffit de prendre la moyenne

$$(A\alpha + B\beta - 2A'\alpha') : 2,$$

les longueurs étant d'ailleurs comptées à partir d'une origine quelconque.

Dans les premières minutes, au contraire, la réactivité est considérable pour peu que la charge soit grande. Il n'est plus certain qu'il soit légitime de prendre l'inverse de la distance verticale des courbes comme mesurant le paramètre $\mathcal{C}$.

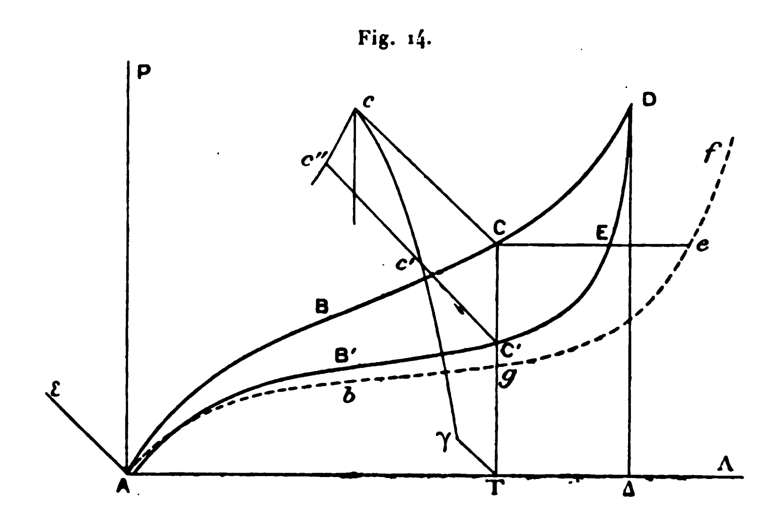
Assurément, si l'on était sûr qu'il y eût simple superposition des allongements dus à la réactivité et des allongements et raccourcissements périodiques dus à la variation de la charge, on éliminerait certainement l'action de la première cause par le calcul précédent. Il revient, en effet, à admettre que la vitesse d'allongement de réactivité est constante, au moins approximativement, pendant une

légitimité du calcul, sauf pour ces premiers instants, est la régularité et la faible courbure des courbes obtenues à charge constante, en prenant comme coordonnées le paramètre $\mathcal{E}$ et la longueur, comme nous le montrerons au numéro suivant.

44. *Résultats généraux.* — Il n'est pas utile de calquer les expériences que nous ferons avec la méthode statique, sur celles qui ont été effectuées par la méthode dynamique. Il vaut mieux profiter de ce que l'appareil donne à chaque instant le paramètre $\mathcal{E}$ en fonction à la fois de la charge et de la longueur, pour élucider des questions générales importantes.

J'ai montré, au n° 26, qu'il est impossible de considérer $\mathcal{E}$ comme une fonction déterminée, une fois pour toutes, de P et de L. En d'autres termes (*fig.* 14),

Fig. 14.



si nous prenons pour plan horizontal le plan L, P et si nous élevons des perpendiculaires dont la longueur mesure $\mathcal{E}$, elles n'aboutissent pas à une surface unique Σ, déterminable une fois pour toutes. On pourrait dire que cette surface existe, mais qu'elle se déforme à mesure que les déformations imposées au fil sont de plus grande amplitude : même ainsi généralisée, l'hypothèse est inadmissible.

J'ai montré, en particulier au n° 26, que pour une même longueur, c'est-à-dire dans le plan vertical $CC'\Gamma$, $\mathcal{E}$ est plus petit en C', sur la courbe de décharge, qu'en C, sur la courbe de charge; ce qui implique que la courbe d'intersection $cc'\gamma$ de la surface Σ avec le plan vertical $CC'\Gamma$, courbe représentée en perspective, s'abaisse à mesure qu'on s'approche de l'axe $A\Gamma\Delta$. D'autre part, sur la courbe de charge, à longueur constante et, par conséquent, à charge décroissante, l'expérience montre que $\mathcal{E}$ croît, comme l'indique la courbe cc''.

La méthode statique, qui donne à chaque instant la longueur et la charge, permet de vérifier que, pour une charge déterminée P, les points qui figurent $\mathcal{E}$ en

fonction de A ne se mettent pas sur une courbe unique, mais occupent une partie considérable du plan $\mathcal{C}$, A. Chaque expérience consiste à arriver à la charge P, suivant une loi déterminée et à maintenir cette charge pendant un temps plus ou moins long; le point figuratif décrit alors dans le plan $\mathcal{C}$A une courbe : il s'agit d'étudier le faisceau de ces courbes correspondant à une même charge, quand on fait varier la manière de l'atteindre.

45. *Faisceau des courbes* $\mathcal{C}$, A, *pour une charge* P *invariable*. — Tâchons d'abord de nous faire une idée du maximum de simplicité de ce que nous pouvons trouver. Nous savons que, arrivé en un point C sur une courbe de charge, la longueur à charge constante croît indéfiniment. Revenu à la même charge en un point E d'une courbe de décharge, il y a généralement à charge constante un raccourcissement, puis un allongement.

Sur la droite CE les points figuratifs marchent donc, après quelque temps, dans le même sens. Arriveront-ils à se rejoindre en un point limite *e*, quelle que soit la manière suivant laquelle nous avons atteint la charge, c'est-à-dire quels que soient les parcours qui nous ont amené sur la droite CE? A cette question, il est impossible de répondre théoriquement; mais pratiquement la limite unique *e* n'existe pas, à moins d'admettre qu'elle ne sera atteinte qu'après des mois, ce qui rend toute vérification expérimentale illusoire. Une charge constante donnée influe sur la longueur d'une manière différente, suivant les opérations par lesquelles on l'a imposée : la longueur tend vers une valeur limite fonction de ces opérations. On ne peut pas tracer dans le plan AP une courbe limite à laquelle on parviendrait à charge constante, soit en partant du point C sur la courbe de charge, soit du point E sur la courbe de décharge.

Bien entendu, si cette courbe existait, elle devrait être aussi limite pour des déformations à longueur constante : on devrait aboutir à un même point *g*, que l'on parte à longueur constante du point C ou du point C'.

Ce qui précède revient aussi à dire que l'hystérésis qui sépare les courbes de charge et de décharge ne provient pas seulement d'une viscosité, d'un frottement; on ne verrait alors aucune raison pour que la courbe limite n'existât pas.

Revenons maintenant au paramètre $\mathcal{C}$: il n'est pas une fonction déterminée de la charge et de la longueur; pour une charge donnée P, nous avons une infinité de courbes qui représentent $\mathcal{C}$ en fonction de L. Si la courbe limite dont nous venons de parler existait, il serait naturel que les courbes précédentes tendissent vers un même point limite : toutes les courbes correspondant à une même charge, suffisamment prolongées, viendraient aboutir en ce point. L'expérience montre qu'une telle hypothèse est absolument gratuite.

Il résulte d'abord de ce que j'ai dit plus haut sur l'inexistence de la courbe limite, que nous ne possédons jamais que des fragments des courbes $\mathcal{C}$, L, assez

courts relativement à leur espacement dans le plan. En d'autres termes, le point figuratif parti de C (*fig.* 14) ne fait jamais, sur la droite CE, qu'un chemin relativement petit par rapport à la distance où peuvent se trouver entre eux les points analogues à C et E qui correspondent aux différentes courbes de charge et de décharge. Ces fragments sont même généralement très courts quand on arrive par une courbe de décharge à la charge P et leur inclinaison dans le plan $\mathcal{E}$, L assez mal déterminée.

Quoi qu'il en soit, ces fragments sont sensiblement des courbes parallèles assez rapprochées de la droite, quand elles ont pour origine un point d'une courbe de charge, analogue à C par conséquent. Cela revient à dire que chaque fois qu'on arrive à la charge donnée P par une courbe de charge, l'effet sur la variation de $\mathcal{E}$ des variations de longueur à charge constante est indépendant, dans une large mesure, de la longueur au moment où l'on atteint la charge P et de la valeur correspondante du paramètre $\mathcal{E}$. Il m'a été impossible de trouver dans les inclinaisons des fragments de courbe des changements systématiques.

Il en est de même pour les fragments qui ont pour origine un point d'une courbe de décharge, analogue à E (*fig.* 14) par conséquent; mais l'inclinaison moyenne n'est plus la même.

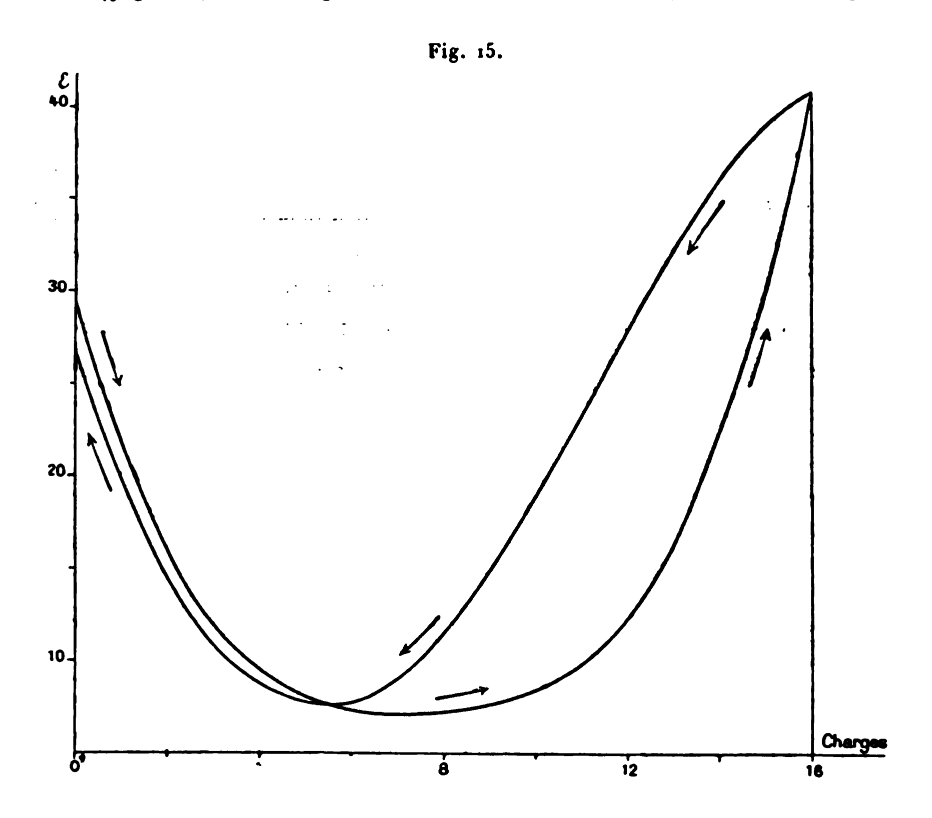
Il faut excepter des règles précédentes ce qui se passe dans les premiers instants après l'imposition de la charge (n° 43). Quand l'origine est sur une courbe de charge, la courbe $\mathcal{E}$ (abscisses), L (ordonnées) est d'abord beaucoup plus verticale qu'elle ne sera ensuite : elle reprend d'ailleurs rapidement son inclinaison normale. Quand l'origine est sur une courbe de décharge, et que la charge est grande, il y a d'abord diminution de $\mathcal{E}$ tant que dure le raccourcissement, puis augmentation de $\mathcal{E}$ quand le fil recommence à s'allonger. Si, au contraire, la charge est faible, le raccourcissement qui peut durer très longtemps, pratiquement, même indéfiniment, entraîne bien entendu un accroissement de $\mathcal{E}$.

Ce serait perdre son temps que de rapporter des nombres sur un tel sujet. Je veux seulement, par un exemple, fixer les idées et donner des ordres de grandeur, pour montrer combien le paramètre $\mathcal{E}$ est loin d'être fonction déterminée de la charge.

Soit une corde de caoutchouc de 16^{cm} de longueur. Sous la charge de 800^{g}, elle peut prendre, à mesure que l'on augmente le nombre des parcours entre les charges 0^{g} et 1060^{g}, toutes les longueurs comprises entre 64^{cm} ($\Lambda = 4$) et 96^{cm} ($\Lambda = 6$) : le paramètre $\mathcal{E}$ peut, toujours pour cette charge unique de 800^{g}, passer de 1 à 4 en valeurs relatives. On voit dans quelle énorme partie du plan $\mathcal{E}$, L peuvent se trouver les courbes que nous étudions. Sur une des courbes à charge constante dont l'origine se trouve sur une courbe de charge, par exemple décrite après retour à la charge nulle, la variation de longueur en 4 heures peut être de 8^{cm} environ, pendant que $\mathcal{E}$ croît de 1 à 2 en valeurs relatives.

sente $\mathcal{E}$ en fonction des charges a une allure très singulière et un hystérésis considérable (*fig.* 15). La comparaison des deux courbes (nous n'avons pas jugé

Fig. 15.



utile de reproduire la première) montre à quel point les $\mathcal{E}$ sont mieux déterminés en fonction de la longueur qu'en fonction de la charge.

J'ai dessiné la figure 16 pour montrer à quel point diffèrent les paramètres $\mathcal{E}$ déterminés comme précédemment, de ce qu'ils seraient calculés d'après l'inclinaison et la courbe.

Pour faire la réduction, on saura que la variation de charge pendant le petit cycle était 5,23 fois plus petite que le poids de 66^g environ désigné par la lettre γ : le plongeur était de très petit diamètre.

D'ailleurs les allongements mesurés par réflexion sur le miroir et dont les inverses donnent le paramètre $\mathcal{E}$ en valeur relative, sont 15,5 fois plus grands que les allongements véritables.

Ceci posé, on peut calculer quel serait l'allongement pour la variation de charge 2γ si la courbe de traction était rectiligne et avait l'inclinaison caractérisée par le paramètre $\mathcal{E}$.

Par exemple, pour 8γ au point A de la courbe de charge, $\mathcal{E} = 727$. L'allongement mesuré sur l'échelle transparente est, en dixièmes de millimètre, l'inverse

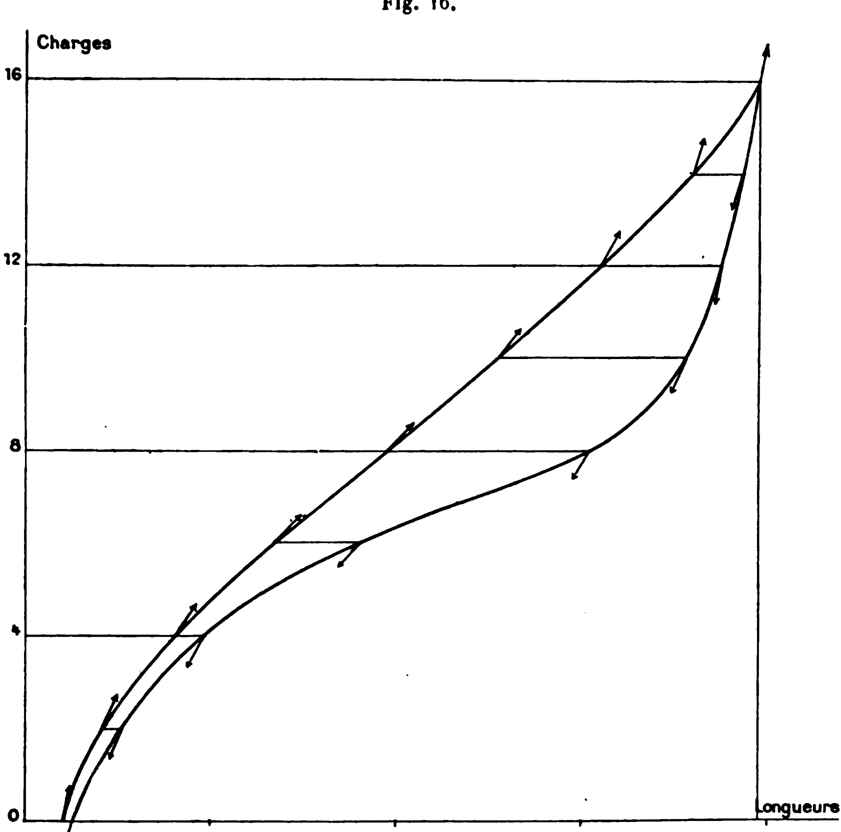
de ce nombre, soit 1375. L'allongement réel pour 2γ, en admettant la proportionnalité, doit être

$$(2 \times 1375 \times 5,23) : 15,5 = 928.$$

Or les allongements entre 6γ et 8γ d'une part, 8γ et 10γ de l'autre, sont 1217 et 1133. L'inclinaison de la courbe de traction au point A est sensiblement la moyenne de ces nombres, soit 1172. J'ai représenté par une flèche l'inclinaison qu'aurait la courbe si elle était définie par le paramètre $\mathfrak{C}$.

On voit qu'en tous les points de la courbe de charge, la flèche est plus verticale

Fig. 16.



que la courbe, ce qui est tout naturel vu le rôle de la réactivité. Il en est de même sur la courbe de décharge, sauf tout à fait à l'origine, pour des raisons que l'on comprendra facilement. L'écart angulaire entre les flèches et la courbe est maximum sur la courbe de décharge et au milieu de celle-ci.

Ce sont donc bien à des propriétés entièrement différentes qu'on a affaire quand on parle de l'inclinaison définie par $1 : \mathfrak{C}$ ou de l'inclinaison sur une courbe de

charge et de décharge. Nous savons déjà que les diverses valeurs de $\mathcal{E}$ qui correspondent à une même longueur varient peu, tandis que, pour une même longueur, les inclinaisons des courbes de déformation sont infiniment variables.

47. *Influence de la vitesse avec laquelle les petits cycles sont parcourus.* — La méthode statique permet de modifier la période de variation de charge et de savoir si elle intervient dans la valeur du paramètre $\mathcal{E}$. On impose à l'excentrique (n° 40) des vitesses différentes, soit avec un pignon changement de vitesse monté sur le train d'engrenages dont un des axes porte l'excentrique, soit par le changement des poulies qui servent à relier le moteur au train.

On obtient ainsi les quatre périodes 129^s, 90^s, 43^s, 30^s. Le pignon modifie la période dans le rapport 1 : 3, les poulies dans le rapport 1 : 1,43.

Dans l'expérience suivante, on maintient d'abord la charge constante un temps suffisant pour que la longueur du caoutchouc devienne sensiblement invariable; puis on met en marche l'excentrique. On emploie les périodes 43^s et 129^s. Le Tableau suivant donne, pour une courbe de charge et pour une courbe de décharge, les $\mathcal{E}$ qui correspondent à la période 43^s, le rapport des $\mathcal{E}$ pour les deux périodes, enfin le temps T que le fil est resté sous la charge constante avant qu'on ne fasse la comparaison. Celle-ci dure 30^m environ et comporte une expérience avec la période 129^s intercalée entre deux expériences avec la période 43^s,

Charges imposées.	0γ.	4γ.	8γ.	16γ.
		Courbe de charge.		
$\mathcal{E}$...............	1366	»	351	2688
Rapport..........	1,044	»	1,019	1,019
T...............	12^h	»	70^m	280^m
		Courbe de décharge.		
$\mathcal{E}$...............	1248	434	789	»
Rapport..........	1,045	1,043	1,023	»
T...............	30^m	60^m	16^h	»

Après trois nouvelles heures sous 0γ, on reprend la deuxième expérience qui donne $\mathcal{E} = 1294$ et le rapport 1,046.

Incontestablement, la grandeur de la période influe sur $\mathcal{E}$; toutefois les variations sont petites et de l'ordre de quelques centièmes. Contrairement à ce qu' semblerait à première vue, elles sont plus grandes pour de faibles A que pour grands. Il faut distinguer en somme deux sortes de réactivités qui n'ont pas mêmes caractères. De ce qu'un corps s'allonge beaucoup sous charge constante

la réactivité du caoutchouc vulcanisé) que tous les phénomènes qui dépendent de la réactivité perdent de l'importance quand la température s'élève (*voir* aussi n° 34).

48. *Influence de la température. Prévisions théoriques.* — Cherchons à prévoir les phénomènes à charge constante d'après les résultats obtenus à longueur constante et d'après les variations du coefficient de dilatation que j'ai désigné par α_1 (n° 18).

Au voisinage d'une tension et d'un allongement donnés du fil, on peut toujours poser

$$dL = \alpha_1\, dt + \frac{dP}{\mathcal{E}}.$$

Cette équation n'implique aucune hypothèse si α_1 et $\mathcal{E}$ sont censés déterminés par l'expérience *dans l'état particulier où se trouve le fil.* Nous avons dit (n° 18) dans quelles absurdités on tomberait si l'on imaginait *a priori* une relation entre α_1 et $\mathcal{E}$; par exemple si l'on supposait que L est une fonction déterminée une fois pour toutes de la tension et de la température. Évidemment, poser la relation précédente revient bien à admettre qu'autour du point de l'espace L, t, P, où l'on se trouve actuellement, il n'y a que deux variables indépendantes; mais la relation qu'on imagine entre ces variables et la troisième ne vaut pas toujours et dans tous les cas, mais seulement à l'instant et autour du point considérés.

On peut donc admettre qu'*avec les mêmes restrictions,* $\mathcal{E}$ est une fonction de deux variables indépendantes et poser identiquement

$$d\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P}\, dP + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right)_P dt = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial L} dL + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right)_L dt,$$

les coefficients différentiels ayant pour indices P et L correspondant aux cas où l'on fait

$$dP = 0 \qquad \text{ou} \qquad dL = 0.$$

Soit maintenant

$$dP = 0;$$

il vient identiquement

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right)_P = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial L}\,\frac{dL}{dt} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right)_L.$$

Or $\dfrac{dL}{dt} = \alpha_1$ est l'accroissement de longueur quand la température croît à charge constante. Nous savons que α_1 est positif pour de très petits allongements, s'annule pour un allongement Λ à peine supérieur à 1, puis devient négatif et croît en

Or $\frac{\partial P}{\partial t}$, c'est-à-dire la variation de la tension quand la température croît à longueur constante, subit des variations analogues, mais de signe contraire à celle de α_1; il est négatif pour Λ voisin de 1 et positif dès que Λ prend une valeur tant soit peu supérieure à 1.

Nous sommes donc sûrs que $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_P < 0$ et plus grand en valeur absolue que $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_L$, dès que Λ est un peu supérieur à 1. Pour Λ très voisin de 1, nous ne pouvons rien prévoir; algébriquement, il se peut que $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_P$ soit positif. Cependant cette conclusion est improbable si l'on considère que $\frac{\partial E}{\partial P}$ est quasi-nul au voisinage de $\Lambda = 1$ (comme le montre l'expérience) et que, par conséquent, l'influence du premier terme est alors négligeable.

En définitive, il est à prévoir que E_3 diminue toujours quand la température s'élève, et que cette diminution est proportionnellement d'autant plus grande, pour une même variation de température, que Λ est plus grand.

Toutes ces prévisions sont minutieusement vérifiées par l'expérience. Il était très important d'insister sur les phénomènes différents qu'on peut obtenir suivant le paramètre auquel on s'adresse. Toutes les contradictions que nous avons signalées doivent précisément tenir à ce qu'on n'a pas spécifié les conditions expérimentales. Il est inconcevable que je sois le premier, depuis qu'on étudie le caoutchouc, à distinguer : 1° les variations par la température à tension constante et à longueur constante; 2° les phénomènes qui ont trait au paramètre $\mathcal{E}$ des phénomènes qui se rapportent au paramètre E_3.

49. *Résultats expérimentaux.* — Conformément aux prévisions précédentes, l'expérience prouve que le quotient $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right)_P$, d'abord négatif pour $\Lambda = 1$, s'annule, devient positif pour des valeurs de Λ comprises entre 1 et 2, passe par un maximum, décroît, s'annule une seconde fois pour des valeurs de Λ généralement comprises entre 2 et 3, devient négatif et croît ensuite très vite en valeur absolue jusqu'aux plus grandes valeurs admissibles pour Λ. Il est bien entendu qu'il s'agit ici d'expériences régulièrement croisées à deux températures différentes.

Il semble bien que M. Imbert (Thèse de Marseille, 1880) ait observé un changement de signe du paramètre $\mathcal{E}$. Malheureusement :

1° Il explique ses résultats en s'appuyant sur l'équation inadmissible (12) [n° 18] et à l'aide d'un raisonnement d'une incontestable absurdité : l'équation (12) ne peut conduire à aucune conséquence semblable.

2° Il lie le changement de signe de $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right)_P$ au changement de signe de α_1.

Pour $\alpha_1 > 0$, et par conséquent pour des charges faibles, $\mathcal{E}$ doit, suivant lui, augmenter quand la température croît; pour $\alpha_1 = 0$, $\mathcal{E}$ doit conserver la même valeur quelle que soit la température; enfin pour $\alpha_1 < 0$, et par conséquent pour des tensions assez grandes, $\mathcal{E}$ doit diminuer quand la température s'élève. Toutes ces conséquences sont aussi fausses que les raisonnements qui y ont conduit.

3° Au point de vue expérimental, sans parler de la technique rudimentaire, les faits sont mal observés; car $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ passe, non pas une fois, mais deux fois par o et ne peut être positif que précisément si α_1 est déjà négatif.

Les résultats que j'énonce n'ont donc aucun rapport avec ceux de M. Imbert; en admettant que le phénomène observé par lui et par moi soit en partie le même, les commentaires qu'il ajoute au résultat brut de l'expérience enlèvent à son observation tout intérêt, puisqu'ils sont la négation même du phénomène.

Pour en revenir à mes expériences, on conçoit, d'après les raisonnements du n° **48**, que le maximum positif du quotient $\partial\mathcal{E} : \partial t$ $(dP = 0)$ doive correspondre à la fois à une valeur négative suffisante de α_1, c'est-à-dire à une charge assez grande, et à une valeur négative assez grande du quotient $\partial\mathcal{E} : \partial L$, c'est-à-dire à une charge pas trop grande. En effet les deux facteurs du produit varient en sens contraires.

Voici une expérience entre 15° et 49°. La charge γ vaut 66^g.

Charge.	Allongement à froid.	Raccourcissement.	$\mathcal{E}$ à froid.	$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}}$.
0γ	$\Lambda = 1$	-9	115	$-0,023$
2γ	1,28	29	74	$+0,008$
3γ	1,45	75	59	$+0,015$
4γ	1,69	130	47	$+0,036$
5γ	1,90	223	39	$+0,050$
16γ	5,47	918	112	$-0,700$

La longueur moyenne sous charge nulle est $L_0 = 20^{cm}$, les raccourcissements produits par la variation de température, sont donnés en dixièmes de millimètre. Les $\mathcal{E}$ sont exprimés en unités arbitraires; dans le quotient $d\mathcal{E} : \mathcal{E}$, le dénominateur est la moyenne des valeurs à froid et à chaud. Pour l'expérience que j'étudie, α_1 serait nul à peu près pour une charge de 66^g et un allongement $\Lambda = 1,12$. Les expériences sont régulièrement croisées : on allume et l'on éteint le radiateur de 20 en 20 minutes; le cycle de charge est de 26^g et effectué en 43 secondes. L'excentrique ne cesse pas de tourner, même pendant les refroidissements et les échauffements. On détermine les valeurs de $\mathcal{E}$ quelques minutes avant d'éteindre ou d'allumer.

Grâce à ces résultats, nous pouvons comprendre ceux du n° **21** du Mémoire

Sur la réactivité du caoutchouc vulcanisé. On y décrit des cycles à charge moyenne constante. Les quantités ε représentent les inverses des paramètres $\mathcal{E}$.

Considérons d'abord les cycles isothermes.

Entre les charges $P_0 = 550^g$ et $P_1 = 650^g$, c'est-à dire pour la charge moyenne 600^g, $\varepsilon'_1 > \varepsilon'_0$; le paramètre $\mathcal{E}$ est plus petit à chaud qu'à froid. Au contraire, pour un cycle de même grandeur et la charge moyenne 400^g, le paramètre $\mathcal{E}$ est plus grand à chaud qu'à froid. Bien que les parcours soient trop grands pour une détermination correcte de $\mathcal{E}$, ces résultats sont conformes à ceux des expériences qui précèdent.

L'influence du recuit et du temps passé à basse température après le recuit se marque avec évidence dans les expériences que nous rappelons, bien que faites sur des cycles très étendus. Enfin les résultats paradoxaux sur les cycles non isothermes s'expliquent tant par les variations du paramètre $\mathcal{E}$ avec la température que par la diminution de la réactivité quand la température s'élève.

ABSORPTION D'ÉNERGIE DANS LES OSCILLATIONS.

50. L'appareil utilisé pour la détermination de $\mathcal{E}$ par la méthode dynamique (n°s 19 et suiv.) permet de mesurer, au moins approximativement et en valeur relative, l'absorption d'énergie pendant des oscillations entretenues avec une amplitude constante. La précision n'est pas très grande, il est difficile de maintenir invariable la longueur de mercure suivant laquelle le circuit est fermé, et l'on n'est jamais sûr de la perfection des contacts obtenus à l'aide de l'appareil représenté figure 6. Toutefois les renseignements obtenus sont précieux.

Je décrirai plus loin une seconde méthode théoriquement plus parfaite (n° 57), qui permet aussi de mesurer l'absorption d'énergie pendant les oscillations d'amplitude constante; malheureusement elle n'est guère pratique.

Le problème que je vais traiter est différent : *il s'agit de trouver la loi d'amortissement des oscillations d'un pendule sous l'influence du frottement dû aux dilatations périodiques du caoutchouc.* Après que les oscillations ont été entretenues pendant un temps convenable, supprimons le courant d'entretien et toutes les causes essentiellement variables d'amortissement, comme les contacts de mercure; déterminons la loi de décroissance des amplitudes d'une oscillation dont la durée est voisine de 2 secondes.

L'appareil est très analogue à celui qui sert pour la méthode dynamique. Il n'en diffère essentiellement que par la position du centre de gravité (sur laquelle nous reviendrons au n° 52) et par le procédé employé pour étirer le caoutchouc. N'ayant pu faire construire un second appareil tel que celui décrit au n° 21, je me suis servi d'une disposition plus simple et suffisamment précise. Les pinces dans les-

quelles sont prises les extrémités du caoutchouc sont montées sur des glissières qui se déplacent le long d'une bande de feuillard fixée sur une planche et qu'on peut arrêter en une position quelconque par des vis de pression. Ce système est long de $2^m,50$: une règle divisée permet de déterminer à chaque instant la distance des pinces. Pour déplacer les deux pinces simultanément, en sens inverses et de quantités égales, des cordes s'attachent aux glissières, passent sur deux poulies fixées aux extrémités du feuillard, sur deux autres poulies placées près du milieu de l'appareil, au-dessus du caoutchouc et symétriquement par rapport au pendule, et aboutissent à un écrou, mobile le long d'une tige filetée ayant $1^m,20$ de longueur. Cette tige pose par une de ses extrémités sur une crapaudine, est prise à l'autre extrémité dans un collier et peut recevoir un mouvement de rotation régulier par le moyen d'une poulie en fonte ajourée de 40^{cm} de diamètre, fixée au delà du collier.

Quand cette poulie tourne dans un sens ou dans l'autre, elle entraîne les cordes; le caoutchouc se trouve tendu ou relâché également par les deux bouts : le procédé est analogue à celui qui permet d'ouvrir ou de fermer simultanément les rideaux d'une fenêtre.

Le système d'entretien est semblable à celui du pendule du n° **19**; les ponts qui établissent les contacts et les courts-circuits sont supportés par une pièce de laiton transversale, fixée à la hauteur du couteau, et par l'extrémité inférieure du pendule. Mais les godets de mercure (qui correspondent à la tige transversale) et les nacelles (qui sont dans la verticale du pendule) sont placés sur des pièces de bois mobiles autour d'axes horizontaux; en appuyant sur un levier, on les éloigne des ponts. Les oscillations du pendule ne sont plus alors amorties que par le frottement intérieur des caoutchoucs et par des frottements (air, couteaux) qui restent constants d'une expérience à l'autre et dont il est possible d'éliminer l'effet. Pour diminuer ces frottements, les solénoïdes qui aspirent l'aimant (e, f, *fig.* 5) ont une carcasse en carton et un grand diamètre intérieur (6^{cm}) : on supprime ainsi les courants d'induction et l'amortissement par l'air qui est relativement très grand quand un cylindre se déplace dans un cylindre parallèle de diamètre peu différent.

Le couteau employé était loin de la perfection; malgré cela le pendule avait un amortissement relativement faible, comme nous le verrons plus loin.

51. Voici maintenant comment on étudie la loi de décroissance des oscillations du pendule.

Il porte à sa base une lentille achromatique dont le plan coïncide avec le plan d'oscillation et qui donne l'image d'une fente lumineuse verticale fixe, soit sur une échelle transparente, soit sur la fente horizontale d'une caisse plate contenant une plaque photographique.

Observation à l'œil. — L'échelle transparente horizontale est faite d'une lame de verre sur laquelle on a collé du papier calque. On a tracé des traits verticaux qui se trouvent, de part et d'autre d'un trait origine, à des distances (en dixièmes de millimètre) égales à

1250 1000 800 640 512 410 328 262 210

formant une progression géométrique de raison 0,8. L'échelle est portée par une vis micrométrique qui permet de la déplacer horizontalement dans son propre plan et de la régler de manière que le trait lumineux oscille symétriquement par rapport au trait origine.

L'expérience consiste, après avoir libéré le pendule, à compter le nombre des oscillations nécessaires pour que l'extrémité des oscillations passe d'un trait noir de l'échelle au suivant, c'est-à-dire pour que l'amplitude diminue dans le rapport de 10 à 8. Si l'amplitude α satisfait à chaque instant à la relation $\alpha = \alpha_0 e^{-\lambda t}$, il en faut compter le même nombre pour que le trait lumineux s'arrête successivement sur les différents traits. L'expérience permet donc la comparaison immédiate de cette loi à la loi réelle de décroissance. Elle ne présente aucune difficulté particulière et la détermination du numéro d'ordre de l'oscillation correspondant à chaque trait se fait sans ambiguïté, à une demi-unité près naturellement.

Enregistrement photographique. — Le cliché se meut verticalement derrière la fente horizontale. Il est supporté, comme le montre schématiquement la figure 4 du Chapitre IX de mon Mémoire *Sur les courbes de déformation des fils.* La corde DE est enroulée sur une poulie qui est liée à une roue d'échappement ; en agissant sur ce qu'on peut appeler l'*ancre d'échappement*, on fait passer une dent et descendre le cliché de 3^{mm} environ. On emploie des plaques 13×18 ; le grand côté est placé horizontalement. C'est donc une quarantaine d'épreuves qu'on peut obtenir sur la même plaque. Un volet permet de découvrir ou de cacher la plaque.

On ouvre le volet quand le pendule passe par la verticale (temps 0), et on le referme quand il repasse par la verticale une oscillation après (temps 1). On compte alors généralement jusqu'à 10 (temps 0) et l'on recommence la même opération jusqu'à ce que les quarante clichés soient obtenus, ou jusqu'à ce que l'oscillation ait une amplitude trop petite. Si l'amortissement est très faible, on ne fait un cliché que toutes les 20 oscillations. Je me suis servi principalement de l'observation à l'œil d'une précision suffisante et d'une commodité infiniment plus grande.

52. Pour nous rendre compte des conditions différentes d'emploi du pendule

actuel et du pendule du n° 19, reprenons les équations du n° 12:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{C}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{C+2\mathcal{E}d^2}}.$$

$$\mathcal{E} = \frac{2\pi^2\mathfrak{M}}{d^2}\left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}\right), \qquad W = j^2\left(\frac{C}{2d^2} + \mathcal{E}\right).$$

Si l'on veut que $\mathcal{E}$ *et ses variations* soient connues avec quelque précision, il faut faire T_1 et T_2 aussi différents que possible, c'est-à-dire, pour un pendule de moment $\mathfrak{M}$ donné, faire $T_1 = \infty$, $C = 0$; le pendule est à peu près à l'état d'équilibre indifférent sous l'action de la pesanteur seule. Mais alors W est minimum et l'amortissement très rapide. Il est au contraire avantageux, pour mesurer le décrément, de donner au couple C une valeur assez grande pour que la durée d'oscillation soit à peine modifiée par la présence des caoutchoucs. Assurément le décrément est petit, mais, comme rien n'empêche de le déterminer sur un plus grand nombre d'oscillations, en définitive, la précision reste la même et le phénomène est théoriquement mieux défini.

On trouve à cette pratique un autre avantage; la durée d'oscillation restant à peu près la même avec ou sans les caoutchoucs, on peut, dans une expérience préliminaire, déterminer le décrément dû à l'air et au frottement du couteau.

Voici le calcul complet. J'appellerai w l'énergie perdue par le pendule quand son amplitude passe d'une valeur j_1 à une valeur j_2, pour une durée d'oscillation égale à 1 seconde. Si la durée devient T, l'énergie perdue par le pendule pour la même variation d'amplitude est $w : T^2$ (n° 12).

Soient maintenant T_1 et n_1 la durée d'oscillation sans caoutchouc et le nombre d'oscillations qui, dans ces conditions, fait passer l'amplitude de j_1 à j_2. L'absorption d'énergie pour une oscillation est $w : n_1 T_1^2$. Soient T_2 et n_2 les mêmes quantités quand le caoutchouc est en place, et soit x l'absorption d'énergie pour une oscillation. On a la relation

$$n_2\left(\frac{w}{n_1 T_1^2} + x\right) = \frac{w}{T_2^2}, \qquad \frac{x}{w} = \frac{1}{N} = \frac{1}{n_2 T_2^2} - \frac{1}{n_1 T_1^2}.$$

N est le nombre d'oscillations qu'il faudrait pour amortir le pendule de l'amplitude j_1 à l'amplitude j_2, à supposer que l'amortissement provienne du caoutchouc seul et que la durée d'oscillation soit 1 seconde.

Le calcul précédent suppose que T_1 et T_2 sont très voisins, et par conséquent que, pour les deux périodes, l'amortissement, qui n'est pas dû au caoutchouc, reste le même. Effectivement T_1 et T_2 ne diffèrent que de quelques centièmes. On peut faire une petite correction, le plus souvent négligeable, en admettant que l'absorption par l'air et le couteau est en raison inverse de la période (n° 22).

Au lieu de l'absorption $w : n_1 T_1^2$, on aurait l'absorption un peu plus grande, $w : n_1 T_1 T_2$; la formule devient

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{n_2 T_2^2} - \frac{1}{n_1 T_1 T_2}.$$

Elle nous servira à réduire les résultats des expériences.

53. *Amortissement en fonction de l'amplitude.* — La quantité d'énergie contenue dans le pendule, quand il passe par la verticale, est proportionnelle au carré de l'amplitude, car la loi de l'oscillation ne diffère jamais que fort peu de la loi sinusoïdale. Si nous admettons que le caoutchouc absorbe une quantité d'énergie elle-même proportionnelle au carré de l'amplitude, pour chaque oscillation, il y aura une perte d'énergie proportionnelle à l'énergie totale, et par conséquent une diminution d'amplitude proportionnelle à l'amplitude. Les oscillations diminuent en progression géométrique.

Par conséquent, si (comme il est indiqué au n° 51) nous observons avec une échelle transparente dont les traits sont placés à des distances d'un trait origine formant une progression géométrique, à supposer d'ailleurs que le caoutchouc soit l'unique cause du frottement, nous devons trouver que, pour passer d'un trait au suivant, il faut le même nombre d'oscillations.

Comme le caoutchouc n'est pas seul à amortir les oscillations, nous devons corriger les résultats de l'influence des autres frottements : c'est ce que nous apprend à faire le n° 52. En définitive, en observant avec l'échelle du n° 51, nous devons trouver des nombres N constants, si le caoutchouc absorbe l'énergie proportionnellement au carré de l'amplitude ; en d'autres termes si l'aire comprise dans le cycle est proportionnelle au carré de l'amplitude.

Il ne résulterait pas de ce fait l'existence d'un frottement proportionnel à la vitesse (n° 22) ; bien d'autres hypothèses conduisent à la même loi, comme je l'ai prouvé dans un travail *Sur les petites oscillations de torsion* (*J. P.*, I, 1902).

La méthode du *pendule entretenu* (n° 23) fournit des résultats conformes à la loi précédente ; mais, comme on peut craindre qu'elle n'ait pas une grande précision, en ce qui concerne la mesure des absorptions d'énergie (n° 50), je vais reprendre la question par la méthode actuelle.

Le pendule a une longueur de 158^{cm} entre le plan du couteau et le centre optique de la lentille de projection ; quand le pendule s'incline de $1°$ sur la verticale, le centre optique se déplace de $2^{cm},76$ environ. La fente et l'échelle transparente sont à des distances telles de la lentille, que le déplacement de l'image est alors de $7^{cm},55$. J'étudiais généralement les oscillations entre les amplitudes qui correspondaient, de part et d'autre du trait origine, à des distances de l'image égales

à $12^{cm},5$ et à $2^{cm},1$. L'angle que fait le pendule avec la verticale est donc toujours inférieur à $12,5 : 7,55 = 1^\circ,66$.

La pince qui serre le caoutchouc est à 17^{cm} environ au-dessus du plan du couteau. Il est facile de voir, d'après les données précédentes, qu'elle se déplace de 1^{cm} environ quand l'image de la fente se déplace de 25^{cm}. L'amplitude de l'oscillation du caoutchouc est donc toujours inférieure à $0^{cm},5$: si l'on veut, le parcours total est toujours inférieur à 1^{cm}.

La première question à résoudre est de savoir suivant quelle loi l'oscillation du pendule s'amortit quand le caoutchouc n'est pas en place. J'ai trouvé que l'image met les nombres d'oscillations, pour passer d'un trait de l'échelle au trait suivant :

95 106 127 155 188 227 256 265

En tout 1419 oscillations pour un temps total de $48^m 18^s$: la durée d'une oscillation est $2^s,042$. Ainsi l'énergie absorbée est très loin d'être proportionnelle au carré de l'amplitude ; elle croît beaucoup plus vite : en d'autres termes, l'amortissement est très loin d'être produit par une force proportionnelle à la vitesse ; la force contient certainement la vitesse à la première puissance et au carré.

Ce résultat est conforme à ce qu'on sait déjà. Les expériences de Bessel ont prouvé depuis longtemps que, pour les oscillations des pendules et pour des angles initiaux de 50′ environ avec la verticale, l'hypothèse d'un frottement proportionnel à la vitesse n'est déjà plus vérifiée. (*Voir* Mémoires publiés par la Société de Physique, t. IV et V et spécialement t. V, p. 395.)

Ceci posé, nous pouvons déterminer la loi de décroissance, le caoutchouc étant en place, et faire la correction de la perte d'énergie due à l'air et au frottement des couteaux. On trouve que, dans les limites d'amplitude ci-dessus indiquées, *l'absorption d'énergie par les oscillations du caoutchouc est très sensiblement proportionnelle au carré de l'amplitude*. Les nombres N, calculés comme il est dit au n° 22, sont sensiblement constants. Pourtant, lorsque le caoutchouc est peu tendu, ces nombres ont une tendance à décroître quand l'amplitude décroît; ce qui veut dire que l'absorption d'énergie croît un peu moins vite que proportionnellement au carré de l'amplitude, à l'inverse de ce qu'on observe pour l'air. La différence est toujours faible, inférieure à 0,1 en valeur relative dans les cas où elle est maxima. Comme l'absorption due au caoutchouc est notablement plus grande que celle absorbée par l'air et le couteau, on s'explique pourquoi la méthode moins précise du pendule entretenu fournit la loi de proportionnalité au carré de l'amplitude.

54. *Amortissement pour des longueurs variables de caoutchouc sous une tension invariable.* — On suppose qu'un caoutchouc est attaché invariablement

à ses deux extrémités : deux pinces supplémentaires permettent d'en limiter une portion plus ou moins grande, de manière que le pendule oscille sous l'influence d'une longueur variable, la tension restant invariable. On peut admettre que l'absorption d'énergie, *pour une même amplitude de la déformation*, est proportionnelle à la longueur, c'est-à-dire à la quantité de matière déformée. Bien entendu il s'agit ici de l'amplitude de la déformation de chaque élément du fil et non de l'amplitude de l'oscillation du pendule.

En particulier, si l'énergie absorbée dans une oscillation par le frottement intérieur du caoutchouc est rigoureusement proportionnelle au carré de l'amplitude, on doit obtenir (en appliquant la méthode de calcul exposée au n° 52 qui élimine les frottements dus à l'air et aux couteaux), des nombres N indépendants de l'amplitude et proportionnels aux longueurs utilisées. Il faut que la longueur ne soit pas trop courte pour que le déplacement de la pince du pendule se fasse à peu près rigoureusement dans la direction même du caoutchouc.

Il est bon de faire remarquer pourquoi l'on trouve, avec les mêmes lois, un résultat tout différent pour l'amortissement dû à un fil tordu (*J. P.*, I, 1902, p. 27). Dans l'expérience de torsion, c'est l'élasticité du fil qui règle la durée d'oscillation ; le carré de cette durée, et par conséquent la quantité d'énergie contenue dans l'oscillation, est en raison inverse de la longueur. D'ailleurs la perte d'énergie est, pour une amplitude déterminée du disque : d'une part, proportionnelle au carré de l'amplitude de la déformation et, par conséquent, en raison inverse du carré de la longueur ; de l'autre, proportionnelle à la longueur (c'est-à-dire à la quantité de métal déformé). En définitive, elle est en raison inverse de la longueur. Donc l'amortissement (c'est-à-dire la diminution relative de l'amplitude) est indépendant de la longueur.

Dans le cas présent, au contraire, la durée d'oscillation, et par conséquent l'énergie contenue dans le pendule, est à peu près indépendante de la longueur du caoutchouc. La perte d'énergie due au caoutchouc est, d'une part, en raison inverse du carré de la longueur, de l'autre, proportionnelle à la longueur; en définitive, elle est en raison inverse de la longueur. Le nombre d'oscillations pour faire passer l'amplitude d'une valeur à une autre est donc proportionnel à la longueur, en supposant légitimes les hypothèses que nous avons faites.

L'expérience vérifie ces conclusions dans les limites mêmes où l'énergie observée est proportionnelle au carré de l'amplitude et surtout où il est possible de considérer le caoutchouc comme homogène et de section constante d'un bout à l'autre. Voici un exemple.

Caoutchouc de 16^{cm} de longueur initiale de chaque côté de la pince (soit 32^{cm} en tout). Après plusieurs cycles entre $A = 1$ et $A = 4^{cm},75$, on maintient le caoutchouc pendant 48 heures à cet allongement qui correspond à une longueur totale de $2 \times 76^{cm},4$. On fait alors l'expérience pour une tension constante et des

sant, au lieu de caoutchouc pure gomme et soufre, du caoutchouc contenant en quantités notables des matières étrangères;

3° La seconde courbe de charge est au-dessous des deux précédentes. En revenant plusieurs fois à l'allongement extrême $A = 4,75$, on trouve des N régulièrement croissants. La variation constatée quand on passe de l'un d'entre eux au suivant, diminue à mesure qu'augmente le numéro d'ordre des cycles.

4° On obtient des résultats analogues dans le parcours plusieurs fois répété d'un cycle qui finit par se fixer; les amortissements sur les courbes de retour sont, au moins au voisinage de l'extrémité supérieure du cycle, nettement inférieurs aux amortissements sur les courbes d'aller. Le phénomène est compliqué pour les très petits A par l'allongement permanent du caoutchouc.

56. *Influence d'une station sous un allongement donné avec ou sans oscillations.* — Lorsqu'un fil est amené à un certain allongement et maintenu indéfiniment sous cet allongement, le frottement intérieur décroît; les nombres N d'oscillations que met le pendule à passer d'une amplitude à une autre amplitude données, augmentent.

Par exemple un fil neuf est amené à l'allongement $A = 5,24$. Après 5 minutes sous cet allongement, on trouve $N = 174$; après 4 heures, $N = 183$.

Inversement, quand, après avoir longtemps maintenu le fil sous un grand allongement A_1, on l'amène à un allongement plus petit A_2 et qu'on l'y abandonne, N diminue; le frottement intérieur croît. Ainsi après l'expérience précédente, on ramène le fil à l'allongement 3,12; aussitôt l'opération effectuée on trouve $N = 253$; 18 heures après, $N = 241$.

Supposons que le fil ait été maintenu sous un allongement A_1, sans lui imposer des oscillations, pendant un temps assez long pour que N ne varie plus sensiblement; si alors on entretient les oscillations pendant un temps notable (une ou plusieurs heures), le frottement intérieur diminue légèrement, N augmente un peu. L'amplitude des oscillations entretenues doit toujours rester petite, à peine supérieure à l'amplitude pour laquelle commence la détermination des nombres N.

Je ne rapporte ici que les résultats les plus généraux, sans entrer dans un détail qui ne présenterait pas d'intérêt vu l'état actuel de la question.

OSCILLATIONS PAR INFLUENCE.

57. Un caoutchouc vertical est suspendu à un point qui oscille verticalement suivant l'équation $y = A \sin \omega t$. A son extrémité inférieure il supporte une masse M dont le mouvement est représenté par $x = a \sin(\omega t - \varepsilon)$.

Nous admettons qu'*un ébranlement se transmet d'un bout à l'autre du fil*

dans un temps très petit vis-à-vis de la période T *du mouvement imposé à l'extrémité supérieure*. Les frottements seront supposés proportionnels à la vitesse des déformations. Soit $\mathcal{E}$ la constante de traction *pour l'état actuel de tension et d'allongement du fil*. L'équation du mouvement de l'extrémité inférieure ou de la masse M est alors

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+\mathcal{E}(x-y)+f\frac{dx}{dt}-f_1\frac{dy}{dt}=0.$$

Les x et les y sont comptés positivement vers le bas.

Les conditions que doivent satisfaire a et ε sont

$$a(\mathcal{E}-M\omega^2)\cos\varepsilon+fa\omega\sin\varepsilon=\mathcal{E}A,$$
$$-a(\mathcal{E}-M\omega^2)\sin\varepsilon+fa\omega\cos\varepsilon=f_1A\omega.$$

Posons

$$M\omega'^2=\mathcal{E};$$

on peut écrire ces conditions sous la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} aM(\omega'^2-\omega^2)\cos\varepsilon+fa\omega\sin\varepsilon&=\mathcal{E}A,\\ -aM(\omega'^2-\omega^2)\sin\varepsilon+fa\omega\cos\varepsilon&=f_1A\omega.\end{aligned}\right.$$

Avant d'aller plus loin cherchons une définition expérimentale de f. Faisons osciller le fil seul, en maintenant immobile l'extrémité supérieure. L'équation du mouvement est

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+\mathcal{E}x+f\frac{dx}{dt}=0.$$

L'intégrale est l'oscillation amortie : $x=x_0e^{-\lambda t}\sin\omega''t$, avec les conditions

$$\lambda=\frac{f}{2M},\qquad T''=\frac{2\pi}{\omega''}=\frac{4\pi M}{\sqrt{4\mathcal{E}M-f^2}},$$

si $f=0$, $T''=T'$. Donc $T'=2\pi:\omega'$ est la période d'oscillation du fil chargé de la masse M, quand $f=0$ et que l'extrémité supérieure est immobile. C'est la période de *plus forte résonance*. Si l'amortissement est assez petit, on a

$$\Delta x:x=\lambda T''=\delta;$$

c'est la diminution relative d'amplitude pour une oscillation complète; elle est immédiatement donnée par l'expérience. On peut alors poser

$$T''=T',\qquad \omega''=\omega',\qquad \delta=\pi f:M\omega'=\pi f\omega':\mathcal{E}.$$

Cas particulier. — Arrangeons-nous expérimentalement pour que $\varepsilon = \pi : 2$; on obtient immédiatement

$$\frac{a}{A} = \frac{\mathcal{E}}{f\omega} = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{\pi}{\delta}; \qquad \frac{\omega'^2}{\omega} = 1 - \frac{f_1 \delta}{M\omega'\pi}.$$

Or l'amortissement dû au frottement contre l'air de la masse M est petit par rapport à l'absorption d'énergie due à la déformation du caoutchouc. Donc f_1 est voisin de f. On a alors très sensiblement

$$\omega' = \omega; \qquad \frac{a}{A} = \frac{\pi}{\delta}.$$

On obtient encore la même condition $\omega = \omega'$ en cherchant à rendre le rapport $a : A$ maximum. Additionnons les équations (1) après les avoir élevées au carré; il vient

$$\frac{a^2}{A^2} = \frac{\mathcal{E}^2 + f_1^2 \omega^2}{M^2(\omega'^2 - \omega^2)^2 + f^2\omega^2}.$$

Remplaçons M^2 par sa valeur $\mathcal{E}^2 : \omega'^4$; tout est constant dans le second membre sauf le premier terme du dénominateur. Pour que $a : A$ soit un maximum, il faut que ce terme toujours positif soit nul, d'où la condition $\omega = \omega'$. On a dès lors

$$\frac{a}{A} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{f^2\omega^2} + \frac{f_1^2}{f^2}}.$$

Si f est petit, $\mathcal{E}^2 : f^2\omega^2$ est grand devant $f_1^2 : f^2$ qui est inférieur à l'unité; on retombe donc sur les formules données plus haut.

Variations de la phase. — Résolvons les formules (1) par rapport à $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$, puis divisons membre à membre les équations obtenues; il vient

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\dfrac{f\omega}{\mathcal{E}} - \dfrac{f_1\omega}{\mathcal{E}}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega'^2}\right)}{\dfrac{f\omega}{\mathcal{E}}\dfrac{f_1\omega}{\mathcal{E}} + \left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega'^2}\right)}.$$

Par hypothèse, ω est voisin de ω'; d'ailleurs

$$f_1 < f \qquad \text{et} \qquad f\omega : \mathcal{E} = \delta : \pi \quad \text{très approximativement.}$$

En définitive, on peut écrire

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega'^2}}.$$

Discutons cette formule : supposons, par exemple,

$$\delta = 0,1, \qquad \delta : \pi = 0,032.$$

On a bien

$$\tang \varepsilon = \infty \qquad \text{pour} \qquad \omega = \omega' ;$$

mais, à cause de la petitesse du coefficient $\delta : \pi$, on aura déjà

$$\tang \varepsilon = 1 \qquad \text{pour} \qquad \omega : \omega' = 0,984.$$

Ainsi pour de très faibles variations de la période T′ au voisinage de $T' = T$, la variation de phase est énorme. Il est donc expérimentalement très facile d'obtenir la condition $\omega = \omega'$ par la considération de la phase; le rapport $a : A$ reste d'ailleurs invariable au voisinage de $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, puisqu'on est au maximum de ce rapport.

Ces remarquables propriétés m'ont conduit à réaliser l'expérience, dans l'espoir de trouver une méthode pratique pour la détermination de δ. Malheureusement, si cette méthode est théoriquement parfaite, elle présente de telles difficultés, non de réalisation pour un cas particulier, mais d'emploi général que j'ai dû l'abandonner. Elle n'en est pas moins curieuse et je vais décrire le dispositif expérimental.

58. *Dispositif expérimental.* — La partie essentielle de l'appareil est le pendule ABCD (*fig.* 17). La lame d'acier horizontale AB oscille sur deux pointes s'appuyant dans deux crapaudines fixées à une pièce rigide XX. Elle porte, d'une part, le pendule AD (dont on voit la lourde lentille en D et qui est entretenu électriquement par le procédé du n° 19) ; d'autre part, une barre horizontale CC′ à laquelle est attaché le caoutchouc vertical CF. Quand le pendule oscille, le point C décrit une oscillation sensiblement verticale

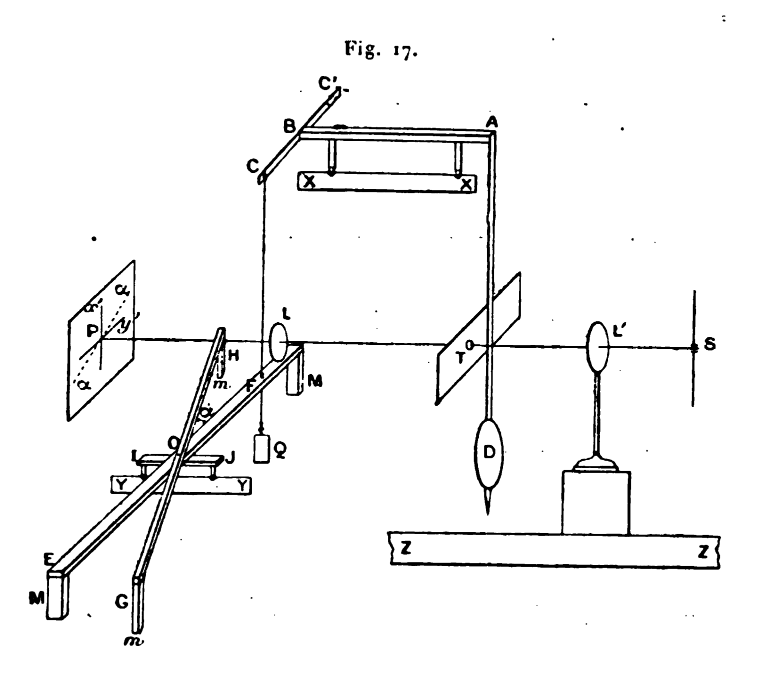
$$y = A \sin \omega t.$$

L'extrémité inférieure du caoutchouc s'attache en F au pendule horizontal IJ, EF, GH. L'axe de suspension est formé par les pointes fixées sur la pièce d'acier IJ. La barre de bois EF est invariablement liée à la pièce IJ. Enfin une barre de bois GH, portant deux masses de plomb m, peut tourner autour d'un axe vertical O fixé sur le milieu de IJ, et peut être arrêtée dans une position azimutale quelconque définie par l'angle α. La barre EF porte en plus une lentille achromatique L et des surcharges de plomb M. On s'arrange de manière que le pendule IJ, EF, GH étant abandonné à lui-même, son centre de gravité passe par les

pointes autour desquelles se fait l'oscillation, quel que soit d'ailleurs l'azimut α. Il n'est donc soumis à aucune force pouvant le faire osciller.

On peut modifier son moment d'inertie en modifiant α. Ce moment est minimum

Fig. 17.



quand $\alpha = 90°$, maximum quand les masses m viennent s'appuyer contre les masses M. Les masses m sont assez légères pour que la différence entre les valeurs minima et maxima soit petite.

Le caoutchouc fixé en F est tendu par un poids Q. Tout se passe comme si le caoutchouc avait, sous la tension Q, à faire osciller verticalement une masse M égale à la somme de la masse du poids Q et d'une masse qu'on obtiendra en divisant le moment d'inertie total du pendule IJEFHG par le carré de la distance du point F à l'axe de rotation de ce pendule. Le point F décrit une oscillation verticale,

$$x = a \sin(\omega t - \varepsilon).$$

Les frottements proviennent, d'une part, du déplacement du pendule horizontal; nous les admettons proportionnels à $\frac{dx}{dt}$; de l'autre, du déplacement relatif des points F et C; nous les admettons proportionnels à $\frac{d}{dt}(x - y)$. Ils s'introduisent dans l'équation sous la forme $f\frac{dx}{dt} - f_1\frac{dy}{dt}$, avec la condition $f_1 < f$. Reste à déterminer le rapport $a : A$ et la phase ε.

Le pendule AD porte un écran en carton percé d'un trou d'aiguille T. Une

lampe de Nernst est placée en S ; une lentille L′ en donne l'image sur la lentille L. Celle-ci donne à son tour une image du trou T en P sur un écran ou sur une plaque photographique. Lorsque l'écran T oscille, le trou T reste constamment éclairé, grâce à la disposition précédente ; la lumière, concentrée dans la position moyenne de la lentille L, donne une image du trou à travers cette lentille, malgré les oscillations des deux pendules.

On commence par tracer sur l'écran deux traits parallèles aux traces lumineuses obtenues, quand l'un ou l'autre pendule est maintenu immobile ; quand les deux pendules oscillent simultanément, on voit sur l'écran une ellipse dont les axes ne coïncident pas avec ces traits. Sans arrêter l'appareil, on modifie lentement le moment d'inertie du pendule horizontal, jusqu'à ce que les axes de l'ellipse coïncident avec les traits. Conformément à ce que nous a montré la théorie, on obtient ce réglage avec une extrême précision, les plus petites variations de l'angle α modifiant beaucoup l'ellipse au voisinage de la position qui donne $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Cette condition réalisée, on photographie l'ellipse, et l'on a tout ce qu'il faut pour mesurer le rapport $a : A$ et par conséquent l'amortissement δ, *dans les conditions imposées de tension et d'allongement du caoutchouc.*

Pour fixer les idées, supposons que le rapport invariable des déplacements des points T et C soit 20; que la lentille L soit tout près du point F et que l'on ait $LP = LT$. Les déplacements verticaux y du point C se traduisent par des déplacements horizontaux y' du point P, tels que $y' = 20y$; les déplacements verticaux x du point F se traduisent par des déplacements verticaux x' du point P, tels que $x' = 2x$. On a donc $x' : y' = 0,1\ x : y$. Faisons par exemple $\delta = 0,1$: nous avons $a : A = \pi : \delta = 31,4$: le rapport des axes de l'ellipse enregistrée est 3,14.

59. *Avantages et inconvénients de la méthode précédente.* — La méthode que je viens d'exposer permet de déterminer l'amortissement dans un cycle, que nous sommes libres de répéter, identique à lui-même, autant de fois que nous le voulons. Elle permet donc de mesurer l'aire embrassée par la courbe d'aller et de retour d'un parcours fixé et très exactement fermé. Théoriquement, elle est donc excellente et sa réalisation étant relativement aisée, il semble que nous ayons dû l'employer exclusivement aux deux autres qui nous ont servi.

Toutefois, on remarquera qu'elle donne exactement les mêmes renseignements que la méthode du pendule entretenu (n° 19 et suiv.) ; celle-ci fournit en outre la valeur du paramètre $\mathcal{C}$. En second lieu, si la méthode du pendule non entretenu (n° 50 et suiv.) semble théoriquement moins parfaite, parce que les oscillations varient d'amplitude et que, par conséquent, les cycles ne sont pas strictement fermés, l'inconvénient est minime pour les petits cycles utilisés. Enfin il ne faut

pas se faire illusion sur la commodité de la méthode de détermination de l'amortissement au moyen des phénomènes de résonance, du moins avec l'appareil décrit et que je ne suis pas arrivé à améliorer.

Assurément, si nous prenons une longueur convenable de caoutchouc, choisie pour une charge Q particulière et pour la longueur moyenne CF *déterminée une fois pour toutes par construction*, l'expérience pourra se faire, *à condition toutefois de faire varier la charge Q pour compenser les effets de la réactivité*.

Nous obtiendrons ainsi un certain nombre de valeurs de l'amortissement δ correspondant à des charges voisines de la charge Q.

Mais si nous voulons passer à une autre charge, il faut prendre un autre caoutchouc, la longueur CF nous étant imposée par l'appareil qu'on ne peut naturellement pas songer à déplacer en bloc. Or il n'est guère intéressant de déterminer une valeur numérique particulière de δ; seules importent les lois de variation de l'amortissement le long de cycles imposés à un même caoutchouc. Voilà comment cette méthode particulièrement attrayante se réduit à une intéressante vérification de la théorie de la résonance. Depuis longtemps on avait songé à montrer les phénomènes de résonance avec du caoutchouc ; mais on s'était toujours borné à prouver que, suivant les périodes, l'amplitude de l'oscillation de la masse suspendue varie. L'appareil que j'ai décrit permet d'aller plus loin et de vérifier dans le détail les conséquences de la théorie.

Supposons la période d'entraînement T très grande par rapport à la période T'; nous devons écrire que ω est très petit vis-à-vis de ω'. Il vient $\tang \varepsilon = 0$, la différence de phase est nulle ; on trouve aussi $a = A$. L'ellipse est alors infiniment aplatie suivant une droite $\alpha\alpha$ à peu près confondue avec la droite Py'. Il suffit d'ailleurs pratiquement que T soit tant soit peu plus grand que T' pour qu'il en soit ainsi.

Quand ω croît par rapport à ω', l'ellipse s'ouvre de plus en plus et se redresse ; nous savons que ses axes coïncident avec Px' et Py' au voisinage de $\omega = \omega'$: $\tang \varepsilon = \infty$. Quand ω devient plus grand que ω', l'ellipse passe dans les deux autres quadrants et va s'aplatissant et s'inclinant; $\tang \varepsilon$ devient négatif. Nous savons que la variation de forme de l'ellipse est très rapide au voisinage de $\omega = \omega'$. Enfin quand ω est très grand vis-à-vis de ω' (c'est-à-dire que la période d'entraînement est très courte vis-à-vis de la période du pendule horizontal oscillant sous l'influence du caoutchouc), le rapport $a : A$ tend vers 0. On a voulu baser sur ce cas particulier la théorie de l'amortissement des trépidations du sol par des suspensions en caoutchouc : j'ai discuté complètement le problème dans un article qu'on trouvera dans le *Journal de Physique* pour 1904.

NOTE SUR L'EMPLOI D'UNE CORDE DE CAOUTCHOUC DANS L'EXPÉRIENCE DE MELDE.

Lorsqu'une corde n'a pas de raideur appréciable, on sait que la vitesse de propagation d'un ébranlement transversal est donnée en mètres par la formule

$$V = \sqrt{g\frac{P}{p}}$$

où

$$g = 9{,}81.$$

P est la tension en unités quelconques, p est le poids (exprimé avec les mêmes unités) du mètre de corde *dans les conditions de l'expérience.*

On peut séparer la corde en fuseaux en excitant les vibrations transversales à l'aide d'un diapason : c'est l'expérience classique de Melde. Avec le dispositif le plus employé, le nombre N de vibrations de la corde est moitié de celui du diapason. Calculons la longueur du fuseau (demi-longueur d'onde) pour une corde de caoutchouc dont on fait varier la tension. On a

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{V}{2N} = \frac{1}{2N}\sqrt{\frac{gP}{p}}.$$

Nous supposons que sous tension nulle ($\Lambda = 1$) le poids du mètre de corde est 10^{g}. Si la densité ne varie pas quand le caoutchouc est tendu, on a généralement $p = 10 : \Lambda$. Nous prendrons pour P les nombres qui correspondent à la courbe de première charge et de première décharge représentée au n° 3, figure 3 du Mémoire *Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé.* La courbe 1ABCDEF (*fig.* 18) représente en centimètres les longueurs l en fonction de Λ pour la charge et la décharge, le diapason effectuant 100 vibrations à la seconde, ce qui donne $2N = 100$.

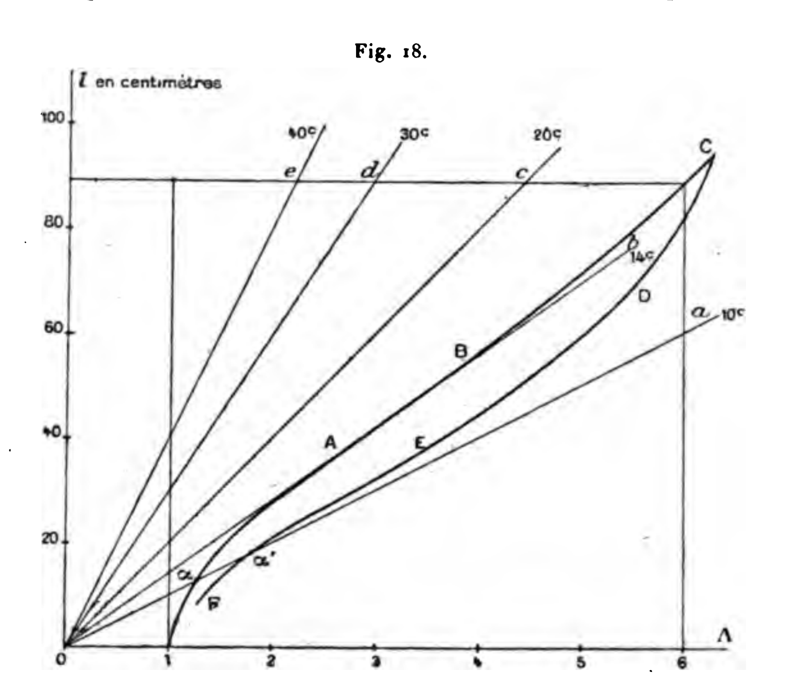
Voici comment il faut se servir de ce graphique.

Supposons que le fil employé ait la longueur 10^{cm} sous tension nulle. Pour les différents Λ, sa longueur est représentée par la droite Oa, qui passe à l'origine et au point du plan dont les coordonnées sont $\Lambda = 1$, $l = 10^{cm}$. Cette droite coupe la courbe aux points α et α'. D'où la conclusion suivante : pour que le fil qui, au début de l'expérience, a 10^{cm} sous charge nulle se divise en un seul fuseau, il faut que pendant la charge on atteigne l'allongement correspondant à α, $\Lambda = 1{,}26$, et que pendant la décharge on revienne à l'allongement correspondant à α', $\Lambda = 1{,}74$. Ceci posé, il résulte du graphique que la corde de caoutchouc qui a servi à le construire ne pourra (dans les conditions de l'expérience, $N = 50$) se diviser en un seul fuseau, si sa longueur initiale L_0 est telle que la droite qui lui correspond ne

coupe ni l'une ni l'autre des courbes 1ABC, CDEF. Par exemple, si $L_0 = 20^{cm}$, quelle que soit la tension, on n'obtiendra jamais la division en un seul fuseau.

Pour savoir si la corde L_0 peut se diviser en n fuseaux, il suffit de chercher si la corde $L_0 : n$ peut se diviser en un seul fuseau. Ainsi la corde qui a 20^{cm} de lon-

Fig. 18.



gueur initiale peut se diviser en deux fuseaux pour des allongements convenables. la corde qui a 30^{cm} de longueur initiale peut se diviser en trois fuseaux pour les mêmes allongements qui correspondent, sur les courbes de charge et de décharge, aux points d'intersection α et α' de la droite $O\alpha$ appartenant à la corde $L_0 = 10^{cm}$.

Bien entendu, l'hypothèse que la corde n'a pas de raideur propre est tout à fait inexacte quand la tension est faible. Pour $P = 0$ ou $\Lambda \doteq 1$, la longueur l n'est donc pas nulle. Mais dès que l'allongement Λ est de l'ordre de 1,5, la raideur devient négligeable comme première approximation, tant à cause de la diminution du diamètre qu'à cause de l'augmentation de la tension. Ce que nous avons dit n'est pas qualitativement modifié par l'existence de la raideur; seulement les portions 1α et $F\alpha'$ des courbes correspondant à la charge et à la décharge doivent être relevées.

L'hystérésis du caoutchouc se montre dans le phénomène que nous étudions, en ce que, pendant la charge et pendant la décharge, le sectionnement en un nombre déterminé de fuseaux se fait pour des Λ différents : Λ est plus grand pendant la décharge.

Voici un phénomène intéressant, observable très aisément avec le caoutchouc

que nous avons étudié. La tangente d'inflexion à la courbe αABC passe près du point O. Prenons une longueur initiale L_0 (14^{cm}) telle que la droite Ob correspondante coïncide au mieux avec la tangente d'inflexion. Elle se confond donc avec la courbe αABC sur une longueur considérable AB. Le sectionnement en un seul fuseau a lieu pour toute une série d'allongements variables de A à B. Pour la courbe de décharge au contraire et la même longueur initiale, le sectionnement en un fuseau ne se produit que pour un allongement unique. Le phénomène est observable, mais avec moins d'intensité, sur presque tous les caoutchoucs : il l'est aussi, mais moins marqué, pour la courbe de décharge en prenant une longueur L_0 convenable.

L'expérience suivante prouve la diminution de tension quand, sur une courbe de charge, on maintient Λ constant. Allongeons doucement une corde jusqu'à ce qu'elle se sectionne en n fuseaux. Arrêtons alors brusquement l'allongement : peu à peu les fuseaux disparaissent. Pour qu'ils se reforment, il faut allonger la corde un peu davantage : donc à longueur constante, la tension avait diminué.

On montre de même l'augmentation de tension à longueur constante et à température croissante, etc., etc. S'il n'y a rien à tirer de l'étude de ces phénomènes que ne puisse fournir la considération des courbes de traction (d'autant que la raideur complique les conclusions quantitatives), ils méritaient d'être signalés comme méthode indirecte de mesure d'une tension.

NOTE SUR LE COEFFICIENT DE POISSON DANS LE CAOUTCHOUC.

A propos d'une réclamation de priorité de M. Cantone (*Nuovo Cim.*, août 1903).

M. Cantone se plaint que, dans mon article *Sur le coefficient de Poisson dans le caoutchouc vulcanisé* (*J. de Ph.*, 1903), j'attribue à Röntgen les formules

$$\sigma = -\frac{d\Delta}{\Delta}\,\frac{d\Lambda}{\Lambda}, \qquad \log\Delta = -\sigma\log\Lambda, \qquad \log\Phi = (1-2\sigma)\log\Lambda$$

qu'il dit lui appartenir.

$$\Delta = D : D_0 \qquad \Phi = V : V_0;$$

D, D_0, V, V_0 sont les diamètres et volumes actuels et initiaux. On n'a qu'à ouvrir le Mémoire de Röntgen pour y trouver la première sous forme de différences infinies; les autres s'en déduisent par intégration, en supposant σ constant, résultat que fournissent les expériences mêmes de cet auteur. Le mérite de Röntgen est d'avoir montré que seule cette définition donne un σ à peu près constant et d'une

définition acceptable. Les expériences de M. Cantone n'apprennent rien de neuf sur le sujet. Elles sont d'ailleurs d'une technique douteuse et beaucoup trop restreintes comme variation de A. On savait avant elles que σ est légèrement inférieur à 0,50 et il est trop facile de dire que les expériences de ses devanciers sont mal faites, pour donner de l'intérêt à ce qu'on trouve, *quand on retrouve exactement les mêmes résultats qu'eux*. Tout ceci n'a qu'une importance historique et par conséquent minime.

M. Cantone formule encore deux critiques. Il me blâme de poser

$$\frac{dL}{L} = \frac{dP}{sE},$$

parce qu'il affirme que seule l'expression

$$\frac{dL}{L} = \frac{d\left(\frac{P}{s}\right)}{E}$$

est exacte. Il n'a qu'à lire le Mémoire qui précède pour revenir à une vue plus juste sur la valeur comparée de ces formules. *A priori*, elles ne valent pas plus l'une que l'autre, et nous savons que l'expérience les condamne toutes deux, en ce sens que ni l'une ni l'autre ne peut représenter les phénomènes, si l'on veut que E soit constant.

Toutefois, M. Cantone ne m'a pas bien lu. Je dis (p. 476, n° 9) : « Ne considérons donc que des déformations infiniment petites » : ce qui signifie que je prends le caoutchouc non déformé et que je lui applique de petits efforts ; P est presque nul.

Or développons la formule

$$E\frac{dL}{L} = d\left(\frac{P}{s}\right)$$

de M. Cantone. Il vient

$$E\frac{dL}{L} = \frac{dP}{s} - \frac{P}{s^2}ds, \qquad E = \frac{dP}{dL}\frac{L}{s} - \frac{P}{s^2}\frac{ds}{dL}L,$$

qui se confond avec la formule incriminée pour $P = 0$. L'objection tombe d'elle-même.

Enfin, M. Cantone trouve que la formule

$$C = \frac{\theta R^2}{6}\frac{dP}{dL}$$

est erronée : c'est justement ce que je dis. Il est vrai qu'elle ne l'est pas pour les

raisons qu'il donne, mais tout simplement parce que ce qu'on est convenu d'appeler *la théorie classique de l'Élasticité* ne s'applique pas au caoutchouc. M. Cantone se berce d'un vain espoir s'il pense que la théorie de l'élasticité où l'on prendra, non plus les efforts rapportés aux surfaces initiales, mais les efforts rapportés aux surfaces actuelles, représente mieux les phénomènes. Quand on creuse ces nouvelles hypothèses, qui, je le veux bien, lui appartiennent en propre (elles n'ont rien de commun avec la formule de Röntgen pour la définition du coefficient σ), on s'aperçoit qu'elles n'expliquent rien des phénomènes si nombreux et si complexes que nous venons d'étudier.

NOTE SUR LA THÉORIE DE L'EXPÉRIENCE DE KUNDT ET DE L'UN DES DISPOSITIFS DE L'EXPÉRIENCE DE MELDE.

Il existe la plus grande analogie entre la théorie, développée au n° 35, des vibrations longitudinales d'une corde de caoutchouc sous l'influence d'un diapason, et la théorie de l'expérience de Kundt. Une verge métallique, saisie en son milieu dans un étau et vibrant longitudinalement, entretient les vibrations d'une colonne d'air limitée par un tube cylindrique de verre. Dans les deux cas, un appareil indépendant (diapason ou verge vibrante) *impose* un mouvement oscillatoire d'amplitude donnée à l'une des extrémités d'un cylindre vibrant longitudinalement (caoutchouc ou colonne d'air).

On donne à la colonne d'air une longueur convenable à l'aide d'un piston entrant à frottement doux dans le tube de verre. On est averti du fractionnement régulier de la colonne par la disposition que prend une poussière légère; elle se rassemble vers les nœuds et y forme de petits tas isolés. Quand les tas sont le plus nets possible, il en existe un tout contre le piston (preuve qu'ils dessinent les nœuds) et, *fait paradoxal expliqué par la théorie du n° 35, il en existe un autre au niveau de l'extrémité de la verge,* là où la théorie incomplète que l'on trouve dans les Traités classiques ferait admettre un ventre. La colonne d'air comprise entre cette extrémité et le piston se divise donc en un nombre entier de demi-longueurs d'ondes (dans l'air ou tout autre gaz remplissant le tube) du son émis par la verge.

On peut expliquer de même la réussite de l'expérience de Melde quand le plan du diapason, au lieu de contenir le fil, lui est normal (le fil étant dans les deux dispositifs sensiblement normal à la tige du diapason à laquelle il est attaché). Là encore le point d'attache se trouve en un nœud ou, si l'on veut, très près d'un nœud.

Comme je l'ai dit au n° 35, cette théorie n'est pas neuve, puisqu'elle est due à Poisson et a été reprise depuis par Duhamel et Bourget. Si j'insiste sur ces expériences, c'est qu'on a donné une importance telle à la solution infinie qui résulte de l'équation (1), que l'on conclut ordinairement que tout mouvement cesse quand un nœud doit se former au point d'attache, ou plus généralement au point où l'amplitude de la vibration est imposée. On consultera, par exemple, un intéressant article de Gripon (*J. P.*, t. III, 1874, p. 84). Les expériences que je rappelle montrent que cette conclusion est trop absolue. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'il faut alors fournir assez d'énergie à l'appareil qui entretient le mouvement vibratoire (diapason, verge, etc.) pour suffire aux déperditions qui résultent de l'amplitude relativement considérable que prennent alors les oscillations du corps entraîné. Ce qui revient à dire qu'il faut se conformer aux hypothèses et imposer effectivement l'amplitude. D'ailleurs, la solution infinie ne peut être prise au pied de la lettre, les équations qui la donnent s'appliquant toujours comme première et seulement assez grossière approximation.

On trouvera, dans un Article paru dans le *Journal de Physique* pour 1904 : *Sur les suspensions en caoutchouc,* une application des remarques précédentes.

TABLE DES MATIÈRES (Fascicule N° 2, 1904).

31815 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.



DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1904.

PARIS.
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-ÉDITEUR

TOULOUSE.
ED. PRIVAT,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1904

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

Troisième fascicule.

SUR LES

ÉQUATIONS DE LA GÉOMÉTRIE

ET LA

THÉORIE DES SUBSTITUTIONS ENTRE n LETTRES,

PAR M. EDMOND MAILLET.

INTRODUCTION.

M. Jordan a montré, dans son *Traité des Substitutions* (Livre III, Chap. III), que l'on pouvait former pour un grand nombre d'équations, qui interviennent dans la détermination de points, courbes ou surfaces remarquables en Géométrie, un groupe Γ de substitutions contenant le groupe G de ces équations.

I. D'autre part nous avons fait voir (*Assoc. franç. pour l'avancement des Sciences,* Mémoires du Congrès de Saint-Étienne, 1897, p. 190) que, si une équation à coefficients réels possède $2k$ racines imaginaires exactement, son groupe contient une substitution d'ordre 2 à k cycles permutant deux à deux les racines imaginaires conjuguées; nous avons indiqué ([1]) plusieurs applications de ce théorème.

Le présent Mémoire a pour objet : 1° des perfectionnements ou des compléments à apporter aux théories de M. Jordan sur les équations de la Géométrie; 2° l'application de notre théorème ci-dessus, principalement à ces équations.

En particulier, nous obtenons les résultats suivants :

II. Soient les congruences

$$x_\rho' + x_\rho'' + \ldots + x_\rho^{(\nu)} \equiv 0 \pmod{r}$$

([1]) *Association française, loc. cit.; Comptes rendus*, décembre 1898, et *Journal de Mathématiques*, 1899, p. 205-216.

($\rho = 1, 2, \ldots, q$, r, r_1 donnés, $r_1 > 2$), et r^q lettres caractérisées par les q indices $x_1, x_2, \ldots, x_q \pmod r$. Soit C un système quelconque de r_1 de ces lettres, distinctes ou non, dont les indices forment une solution de ces congruences :

Quand r est une puissance exacte d'un nombre premier, l'ensemble des substitutions entre les r^q lettres qui permutent entre elles toutes ces combinaisons est le groupe Γ *dérivé du groupe* G″ *des substitutions linéaires homogènes*

$$|x_1, \ldots, x_q; a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^q x_q, \ldots, a_q^1 x_1 + \ldots + a_q^q x_q| \pmod r$$

et du groupe G′ *des substitutions*

$$|x_1, \ldots, x_q; x_1 + \alpha_1, \ldots, x_q + \alpha_q| \pmod r,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ prennent $\pmod r$ *toutes les valeurs possibles multiples de $\frac{r}{\delta}$, δ étant le plus grand commun diviseur de r et r_1.*

Ce théorème comprend, comme cas particuliers, plusieurs théorèmes de M. Jordan [1]. Il est encore exact quand $r_1 = 3$, $q = 2$, $r = 6$.

III. Notre propriété I pose la question de la détermination de la classe des substitutions d'ordre 2, ou même de la classe d'un groupe quelconque, en vue des applications à la théorie des équations et à la Géométrie. Aux résultats déjà connus nous en ajoutons quelques-uns relatifs à la classe des substitutions des groupes linéaires, abéliens, etc. Ainsi, *le groupe linéaire général de degré $p^{\mu n}$ à n indices* $(\bmod p^\mu)$ (p premier quelconque) *est de classe $p^{\mu n} - p^{\mu n - 1}$.*

Nous indiquons une méthode générale pour la détermination de la classe des substitutions d'un groupe et de la classe de ce groupe ; nous en faisons application au groupe de l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième degré, dont les substitutions d'ordre 2 déplacent 24, 20 ou 12 lettres ; au groupe de l'équation aux 28 tangentes doubles des quartiques générales ; au groupe de l'équation aux 27 points, autres que les points d'inflexion, où une cubique générale a, avec une conique, un contact du cinquième ordre : les substitutions de ce groupe déplacent 27, 26, 24 ou 18 lettres.

IV. Ce qui précède, joint à I, nous donne un certain nombre d'applications géométriques immédiates aux points d'inflexion des cubiques, aux cubiques ayant un contact du troisième ordre en 3 points avec une quartique générale, aux

---

(1) *Traité des Substitutions*, Livre III, Chap. III.

63 coniques (¹) tangentes en 4 points (dont un réel choisi arbitrairement) à une quartique générale réelle, aux 16 plans stationnaires d'une courbe gauche du quatrième ordre, aux plans tangents et aux points singuliers de la surface de Kummer, aux 27 droites des surfaces du troisième degré, aux 28 tangentes doubles d'une quartique, etc.

Nous disons quelques mots des applications de la théorie des groupes de substitutions aux constructions par la règle ou la règle et le compas.

V. Nous sommes conduit incidemment à revenir sur les substitutions opérées par les substitutions d'un groupe G de degré d entre les combinaisons ν à ν de ses lettres :

1° Si $d = \nu' h - 1$ (h entier > 0), et si G est transitif entre les combinaisons ν à ν de ses d lettres $\left(\nu \leqq \frac{d}{2}\right)$, il est transitif entre les combinaisons ν' à ν' de ses d lettres quand $\nu' < \nu$; il en est de même pour d quelconque quand $\nu' = 1$, ou $\nu \leqq 3$.

2° Soient G, de degré d quelconque, transitif entre les combinaisons ν à ν de ses d lettres $\left(2 \leqq \nu \leqq \frac{d}{2}\right)$, p le plus grand nombre premier inférieur à $d - 2$ et $> \frac{d}{2}$: on a forcément $\nu \leqq d - p$. Quand $d \geqq 40$, $\nu < \frac{d}{5}$; quand $d < 40$, $\nu \leqq 8$; quand $11 < d < 9.10^6$, $\nu \leqq 4 (\log d)^2$ (²).

3° Si G, de degré d quelconque, est transitif entre les combinaisons ν à ν de ses lettres $\left(2 \leqq \nu \leqq \frac{d}{2}\right)$, il est primitif.

Il existe des groupes transitifs entre les combinaisons ν à ν ($\nu = 2$ ou 3) de leurs lettres et qui ne sont pas ν fois transitifs.

VI. En terminant, nous indiquons un certain nombre de sujets à traiter, comme suite de notre Mémoire (³).

(¹) Parmi ces coniques, s'il y en a une d'imaginaire, il y en a 32, 48 ou 56.

(²) Cette formule a été obtenue à l'aide des Tables de nombres premiers. Le logarithme est un logarithme ordinaire.

(³) Sa lecture exige des connaissances assez étendues : *Traité des Substitutions* de M. Jordan (400 premières pages), *Fonctions algébriques* de MM. Appell et Goursat ou *Fonctions abéliennes* de Briot, un Mémoire de Clebsch (*J. de Crelle*, t. 63, p. 189) ou les *Leçons sur la Géométrie* de Clebsch et Lindemann, traduction Benoist (passim), *Algèbre supérieure* de Serret (passim); enfin un coup d'œil au moins sur les Mémoires de M. Jordan ou de nous, que nous citons.

Un résumé de ce Mémoire a été communiqué à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, 11 avril 1904, p. 891 et 1012).

I.

Nous avons obtenu antérieurement le théorème suivant [1] :

Théorème I. — *Si une équation irréductible de degré n à coefficients réels a exactement* 2ν *racines imaginaires* $x_1, \ldots, x_{2\nu}$ (x_{2k-1}, x_{2k} *conjuguées*), *son groupe contient la substitution* $(x_1 x_2)\ldots(x_{2\nu-1} x_{2\nu})$.

En effet, soit $f(x) = 0$ une équation algébrique à coefficients rationnels réels, ces coefficients pouvant dépendre rationnellement d'un certain nombre de paramètres k_1, k_2, ... arbitraires. D'après un théorème connu [2], il existe entre les racines de l'équation un groupe G de substitutions tel que toute fonction F rationnelle des racines et des paramètres dont les substitutions de ce groupe n'altèrent pas la valeur numérique [3] soit rationnellement exprimable en fonction des paramètres; et, réciproquement, que toute fonction rationnelle des racines et des paramètres, rationnellement exprimable en fonction des paramètres, ait sa valeur numérique inaltérée par les substitutions de G. Or on sait qu'on peut toujours former une fonction rationnelle des racines de l'équation proposée, dont la valeur numérique soit invariable par les substitutions d'un groupe quelconque Γ entre les racines, et variable par toute substitution n'appartenant pas à Γ. On dit que cette fonction *appartient au groupe* Γ. Une fonction appartenant à G est rationnellement exprimable.

Ceci posé, n'attribuons à k_1, k_2, ... que des valeurs réelles; soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle des racines et des paramètres rationnellement exprimable et appartenant à G : la valeur numérique de φ est réelle et reste invariable quand on change $i = \sqrt{-1}$ en $-i$ dans celle des racines x_1, x_2 ..., x_n qui sont imaginaires. Soient x_1, x_2, ..., $x_{2\nu-1}$, $x_{2\nu}$ ($\nu < 0$) les 2ν racines imaginaires de $f(x) = 0$ que l'on suppose ne pas avoir toutes ses racines réelles, x_{2k-1} et x_{2k} étant conjuguées. Le changement de i en $-i$ dans $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ revient à y opérer la substitution

$$S = (x_1 x_2)\ldots(x_{2k-1} x_{2k})\ldots(x_{2\nu-1} x_{2\nu}),$$

---

[1] *Association française pour l'avancement des Sciences,* Mémoires du Congrès de Saint-Étienne, 1897, p. 195. Pour la clarté, nous reproduisons ici la démonstration, sous une forme toutefois un peu plus générale. Dans cette première démonstration, il faut supprimer l'avant-dernière ligne de la page 195 : « et le groupe de etc. ».

[2] Jordan, *Traité des Substitutions*, p. 257 et 277.

[3] La valeur numérique de F est la fonction de k_1, k_2, ... à coefficients numériques, que l'on obtient quand on substitue aux racines leurs expressions en fonction de k_1, k_2, ...

en sorte que S laisse la valeur numérique de φ invariable, et appartient à G.

C. Q. F. D.

Nous avons fait connaître ([1]) une série d'applications de ce théorème à la théorie des équations algébriques. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'en indiquer de nouvelles, en nous occupant principalement d'équations que l'on rencontre en Géométrie ([2]).

II.

Rappelons d'abord quel est le principe des applications faites par M. Jordan de la théorie des substitutions à un certain nombre d'équations de la Géométrie.

Supposons que des points, lignes, surfaces, etc. en nombre fini d soient déterminés par une équation $X = 0$ de degré d et de racines inégales, à laquelle satisferont, par exemple, les coordonnées x des points, ou un des paramètres des lignes ou surfaces, les autres coordonnées ou paramètres s'exprimant rationnellement en fonction des racines. L'équation $X = 0$ pourra d'ailleurs contenir un certain nombre d'arbitraires k_1, k_2, ... que nous adjoindrons au domaine de rationalité en les supposant réelles.

Admettons que les solutions (points, lignes ou surfaces) soient liées entre elles par certaines relations géométriques, c'est-à-dire, par exemple, que la connaissance de k d'entre elles entraîne, grâce à une propriété géométrique connue, la connaissance d'une $(k+1)^{\text{ième}}$ au moins. Exemple : si l'on se donne deux points d'inflexion d'une cubique plane, on sait que la droite qui les joint coupe la cubique en un troisième point, qui est d'inflexion. Cette propriété se traduit entre les coordonnées x ou les diverses valeurs d'un paramètre par une ou plusieurs relations $R = 0$, que nous supposons toujours rationnelles, par suite, si l'on veut, entières. Les fonctions R des racines de $X = 0$ et des arbitraires réelles k_1, k_2, ... ont une valeur numérique rationnelle, puisque cette valeur est 0. Le groupe G de l'équation $X = 0$ doit donc laisser numériquement invariable la valeur de R : autrement dit, le groupe de $X = 0$ est contenu dans le faisceau ou ensemble Γ commun aux fonctions R, c'est-à-dire l'ensemble des substitutions laissant invariables simultanément les valeurs numériques de ces fonctions.

La considération de toutes les relations $R = 0$ connues dans le problème pourra nous donner ainsi un faisceau $\Gamma > G$ et contenant G. Si tous les coefficients de

---

([1]) *Association française, loc. cit.*

([2]) JORDAN, *Traité des Substitutions*, Chap. III, p. 301. Il y a quelques années M. Jordan, à qui nous avions communiqué le théorème I, nous avait engagé à en chercher des applications géométriques.

$X = 0$, ainsi que $k_1, k_2, \ldots$ sont réels, il suffira que Γ [1] ne contienne pas le groupe alterné de degré d pour que notre théorème I puisse donner une propriété géométrique intéressante ou remarquable des points, lignes ou surfaces au point de vue de la réalité : si ces points ne sont pas tous réels, il y en aura au moins n imaginaires, n étant la classe de Γ (c'est-à-dire le nombre minimum de lettres que déplace une substitution de Γ).

Supposons que l'équation $X = 0$ (rencontrée en Géométrie ou ailleurs) ait

---

(1) Ou même le faisceau Γ_1 d'une des équations $R = 0$, qui contient Γ, par suite G.

Ce faisceau Γ_1 n'est pas forcément un groupe : ainsi, soient trois points d'inflexion en ligne droite x_1, x_2, x_3 d'une cubique générale $R = \psi(x_1, x_2, x_3) = 0$, la relation exprimant que ces points sont en ligne droite; R est invariable par les substitutions du groupe linéaire (mod 3) à deux indices, et par les substitutions du groupe symétrique entre $x_4, \ldots, x_9$. Le groupe dérivé est le groupe symétrique de 9 éléments entre $x_1, \ldots, x_9$, qui ne laisse pas invariable la valeur numérique de $R = 0$, car la substitution $(x_3 x_4)$ donne $R \neq 0$.

Ceci pose ainsi ce problème général très intéressant :

Quelles conditions doivent remplir plusieurs fonctions $R = 0$ *pour que le faisceau commun* Γ *forme un groupe* (comp. NETTO-BATTAGLINI, *Teoria delle Sostituzioni*, 1885, p. 220, ou NETTO, *Substitutionentheorie, Tripelnsysteme*).

Nous nous contenterons de quelques indications à ce sujet.

Soient k relations $R = 0, R' = 0, \ldots$, formant un système E, entre les racines d'une équation $X = 0$, à racines distinctes, de groupe G, F le faisceau des substitutions entre ces racines laissant numériquement invariable chaque fonction de E : F contient G.

Soit S une substitution de F : en l'opérant sur E, on obtient un nouveau système de relations qu'on peut représenter par ES; le faisceau Φ correspondant à ES n'est autre que le faisceau $S^{-1}F$ formé du produit de S^{-1} par les substitutions de F; car $S^{-1}F$ appartient à Φ, et, si Σ est une substitution de Φ, $S\Sigma$ laisse chaque fonction de E numériquement invariable et appartient à F, par suite Σ à $S^{-1}F$; $S^{-1}F$ contient G.

Soient 1, S, S', ... les substitutions de F : l'ensemble des systèmes E, ES, ES', ... forme un nouveau système E_1, dont chaque fonction est numériquement invariable par les substitutions d'un faisceau F_1; ce faisceau est évidemment formé des substitutions communes à $F, S^{-1}F, S'^{-1}F, \ldots$; F_1 contient G.

On opérera sur E_1 et F_1 comme on l'a fait sur E et F, et ainsi de suite. Le nombre des fonctions algébriquement distinctes de $E, E_1, \ldots, E_j$ ne pouvant augmenter indéfiniment avec j, on finira par obtenir un système E_j et un faisceau F_j de substitutions $1, S_j, S'_j, \ldots$ tel que $E_j S_j = E_j$, $E_j S'_j = E_j, \ldots, S_j^{-1}F_j = F_j$, $S_j'^{-1}F_j = F_j, \ldots$; F_j est alors évidemment un groupe dont les substitutions permutent entre elles les valeurs algébriques des fonctions de E_j; F_j contient G. E_j sera alors ce qu'on peut appeler un *système complet*, c'est-à-dire *un système de fonctions tel que les substitutions du faisceau laissant numériquement invariable chaque fonction du système permutent exclusivement entre elles les valeurs algébriques de ces fonctions.*

Un système complet qui ne contient aucun système complet plus petit sera dit *irréductible.*

Tout système de relations conduit, par le procédé ci-dessus, à un système complet *dérivé* et à un groupe corrélatif.

exactement 2ν racines imaginaires, $x_1, x_2, \ldots, x_{2\nu}$ (x_{2k-1} et x_{2k} étant conjuguées); G contient (théorème I)

$$S = (x_1 x_2) \ldots (x_{2k-1} x_{2k}) \ldots (x_{2\nu-1} x_{2\nu}).$$

Pour savoir combien $X = 0$ peut avoir de racines imaginaires, il suffira de connaître la classe [c'est-à-dire le nombre de lettres déplacées (¹)] des substitutions d'ordre 2 de G.

Soient $2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots, 2\lambda_\alpha$ ces diverses classes; il n'en résultera pas forcément que $X = 0$ peut avoir, suivant la valeur des coefficients, supposés réels, $2\lambda_i$ racines imaginaires ($i = 1, 2, \ldots, \alpha$); mais il en résultera forcément que, si $X = 0$ a $2j$ racines imaginaires, *j est un des nombres* $0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$. Autrement dit, parmi les points, courbes, etc., en question, il y en aura d, $d - 2\lambda_1, \ldots,$ ou $d - 2\lambda_\alpha$ réels, quelques-uns de ces $\alpha + 1$ cas pouvant d'ailleurs ne pas se présenter.

A défaut de la connaissance du groupe G, on pourra résoudre le même problème pour un faisceau ou un groupe Γ contenant G.

Enfin, la détermination de la classe de G ou Γ donnera une limite inférieure des λ_i.

Les applications algébriques et géométriques du théorème I nous conduisent ainsi à ces deux vastes problèmes dont le second a déjà fait l'objet de travaux de M. Jordan et des nôtres :

1° *Déterminer les classes des substitutions d'ordre* 2 *d'un groupe* G;

2° *A défaut, pour avoir une limite inférieure de ces classes, trouver la classe de* G *ou une limite inférieure de cette classe.*

III.

REMARQUES GÉNÉRALES SUR LES GROUPES G.

On peut établir, dans des cas étendus, que le groupe G ou le faisceau Γ n'est ni symétrique ni alterné.

En effet :

1° Supposons que l'une des relations $R = 0$ exprime que trois points x_1, x_2, x_3 sont en ligne droite, sans que les d points y soient : on aura une certaine relation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Une substitution S du groupe G ou de Γ, opérée sur cette équation, donne la nouvelle relation $f(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$ exprimant que les trois points x'_1, x'_2, x'_3 sont en ligne droite. Le groupe G ou Γ ne pourra contenir toutes les substitutions circulaires d'ordre 2 ou 3, car il contiendrait $(x_3 x_i)$ ou

(¹) NETTO, *J. für Math.*, t. LXXXIII.

$(x_3 x_i x_j)$ $(i \neq 1, 2, 3)$ permettant de faire succéder à x_3 une autre quelconque des racines, et tous les points $x_1, \ldots, x_d$ seraient sur une même ligne droite. Même, le sous-groupe de G ou le sous-faisceau de Γ, qui laisse x_1 et x_2 immobiles, ne peut être transitif sans que les d points soient en ligne droite.

Si trois des points déterminés par $X = 0$ sont en ligne droite, ces d points n'étant pas tous en ligne droite, le groupe de $X = 0$ n'est pas plus de deux fois transitif.

Ou encore :

Si l'on peut trouver sur une courbe algébrique $C = 0$ d points dont les abscisses sont distinctes et sont les racines d'une équation algébrique $X = 0$ de degré d à coefficients rationnels par rapport aux coefficients de C supposés réels et si trois de ces points sont en ligne droite, sans que les d points y soient, le groupe de $X = 0$ n'est pas plus de deux fois transitif.

Si le groupe de $X = 0$ est deux fois transitif, la droite menée par deux quelconques des points en question passe par un troisième.

2° Supposons que λ des points déterminés par $X = 0$ doivent être sur une même courbe de degré μ, avec [1] $\mu_1 = \frac{\mu(\mu+3)}{2} < \lambda$; $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda$, par exemple, sont liés par une relation $f(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda) = 0$; G n'est pas plus de μ_1 fois transitif à moins que les d points soient sur cette courbe.

Si λ des d points sont sur une même courbe de degré $\mu\left(\lambda > \frac{\mu(\mu+3)}{2} = \mu_1\right)$, sans que [2] les d points y soient, le groupe de $X = 0$ n'est pas plus de μ_1 fois transitif; même le sous-groupe des substitutions de $X = 0$ qui laissent μ_1 de ces points immobiles ne peut être transitif entre les autres [3].

Ainsi, quand $\mu = 2$, $\mu_1 = 5$: si six des points sont sur une conique, sans que les d y soient tous, le groupe de $X = 0$ n'est pas plus de cinq fois transitif.

---

[1] Une courbe algébrique de degré μ est déterminée par $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$ conditions. Il n'y aura ici de relation entre les $x_1, \ldots, x_d$ que si $\frac{\mu(\mu+3)}{2} < \lambda$.

[2] Cette restriction est essentielle, car le problème de l'intersection de deux courbes de degrés m et n conduit, en général, à une équation de degré mn. Pour $n = 1$, cette équation peut donner une équation $X = 0$ de degré m dont le groupe est symétrique; exemple : intersection d'une courbe générale de degré m avec $x = 0$. L'équation est

$$A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

équation générale de degré m.

[3] C'est-à-dire entre les abscisses des autres.

Voici des applications à des cas connus :

La droite qui passe par deux points d'inflexion arbitrairement choisis d'une cubique passe par un troisième; le groupe [1] de l'équation $X = 0$ aux abscisses de ces points d'inflexion n'est pas plus de deux fois transitif.

Soit une quartique générale C_4 : on sait [2] qu'il y a 63 systèmes distincts de coniques tangentes en quatre points à la quartique (en laissant de côté les droites du plan). Un point de contact M_1 pour ces coniques étant choisi arbitrairement (l'abscisse de ce point jouera dans $X = 0$ le rôle d'un paramètre k_1), les trois autres points de contact d'une conique forment 63 systèmes distincts; un des paramètres de la conique dépend d'une équation de degré 63.

Or, pour trois valeurs de k_1, ces coniques forment trois ensembles de 63 systèmes; en prenant une conique au hasard dans les deux premiers ensembles, et une convenablemeut choisie dans le troisième, on obtient douze points de contact qui sont sur une cubique.

On peut aussi considérer trois valeurs de k_1 identiques : les trois ensembles de 63 systèmes se réduisent à un seul et la cubique a trois points confondus en M_1 avec la quartique. Ainsi, soient les 63 coniques distinctes qui touchent la quartique en quatre points, dont un M_1 choisi arbitrairement; on peut prendre au hasard deux de ces coniques, faire passer par leurs points de contact et par M_1 une cubique ayant un contact du deuxième ordre en M_1 avec la quartique; cette cubique coupe la quartique en trois autres points qui sont les points de contact autres que M_1 d'une autre des 63 coniques.

Soit alors $X = 0$ l'équation qui détermine ces 63 coniques (l'inconnue étant, par exemple, un des paramètres) : la propriété ci-dessus se traduira entre trois racines a_1, a_2, a_3 de $X = 0$, par une condition $\psi(a_1, a_2, a_3) = 0$, où a_1 et a_2 sont arbitraires. Donc *le groupe de* $X = 0$ *est au plus deux fois transitif.*

IV.

LE GROUPE LINÉAIRE DANS LES ÉQUATIONS DE LA GÉOMÉTRIE.

Dans un grand nombre de théorèmes relatifs à l'application des fonctions elliptiques ou abéliennes à la Géométrie, en particulier dans plusieurs de ceux indiqués par Clebsch [3], l'équation algébrique $X = 0$ dont dépend le problème est

---

(1) JORDAN, *Traité des subst.*, p. 302.

(2) *Voir* HESSE, *Journ. de Crelle*, t. 49; CLEBSCH, *id.*, t. 63, p. 210; APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, 1895, p. 497.

(3) *Journ. de Crelle*, t. 63; *voir aussi* JORDAN, *Traité des subst.*, p. 302 et suiv.

déterminée par des relations ([1])

$$u_1^{(j)}+\ldots+u_\delta^{(j)}=\frac{\mathrm{P}+2\lambda_j\pi i+l_1\tau_1^{(j)}+\ldots+l_p\tau_p^{(j)}}{r}\qquad (j=1,2,\ldots,p \text{ et } \delta\geqq p).$$

Le problème de l'inversion de Jacobi détermine p des points, courbes, etc. en fonction des $\delta-p$ autres choisis arbitrairement, par une équation de degré r^{2p}, irréductible ou non. On en conclut, si l'on représente par ([2]) $(x_1, \ldots, x_{2p})$ $(\bmod r)$ les racines, que le groupe G de $\mathrm{X}=0$ laisse invariable l'ensemble des solutions des congruences

$$x'_\rho+x''_\rho+\ldots+x_\rho^{(r_1)}\equiv 0 \pmod r \qquad (\rho=1,2,\ldots,2p),$$

où les $x_\rho^{(j)}$ peuvent être tous identiques aux $x_\rho^{(j')}$ $(j\neq j')$ quel que soit ρ.

Pour plus de généralité, nous supposerons $\rho=1, 2, \ldots, q$, où q est pair ou impair, et nous déterminerons le groupe Γ des substitutions laissant invariable l'ensemble des solutions du système de congruences

$$(1)\qquad x'_\rho+\ldots+x_\rho^{(r_1)}\equiv 0 \pmod r \qquad (\rho=1,2,\ldots,q);$$

quand $q=2p$, Γ contient G.

Soit $(x'_1, \ldots, x'_q), \ldots, (x_1^{(r_1)}, \ldots, x_q^{(r_1)})$ une solution : si nous ajoutons simultanément à $x'_1, \ldots, x_1^{(r_1)}$ un même nombre α_1, à $x'_2, \ldots, x_2^{(r_1)}$ un même nombre α_2, etc., soit

$$x_\rho^{(j)}+\alpha_\rho=y_\rho^{(j)};$$

on a encore

$$y'_\rho+\ldots+y_\rho^{(r_1)}\equiv 0 \pmod r$$

dès que $r_1\alpha_\rho\equiv 0 \pmod r$, en particulier, quel que soit α_ρ, si $r_1\equiv 0 \pmod r$.

Γ contient alors toutes les substitutions

$$|\, x_1, \ \ldots, \ x_q; \ x_1+\alpha_1, \ \ldots, \ x_q+\alpha_q \,| \pmod r,$$

telles que $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ soient des multiples de $\frac{r}{\delta}$, δ étant le plus grand commun diviseur de r et de r_1. Ces substitutions forment un groupe G′, d'ordre δ^q.

Considérons, de même, la substitution linéaire homogène

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & a_1^1x_1+a_1^2x_2+\ldots+a_1^qx_q \\ \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_q & a_q^1x_1+a_q^2x_2+\ldots+a_q^qx_q \end{vmatrix} \pmod r,$$

([1]) Pour les notations, *voir* le Mémoire de Clebsch ou la *Théorie des fonctions algébriques* de MM. Appell et Goursat, p. 497, par exemple.

([2]) $x_1=\lambda_1, \ldots, x_p=\lambda_p, x_{p+1}=l_1, \ldots, x_{2p}=l_p$.

et opérons-la dans le premier membre de la congruence (1), on obtient

$$(a_\rho^1 x_1' + a_\rho^2 x_2' + \ldots + a_\rho^q x_q') + \ldots + (a_\rho^1 x_1^{(r_1)} + \ldots + a_\rho^q x_q^{(r_1)}),$$

ou

$$a_\rho^1(x_1' + \ldots + x_1^{(r_1)}) + a_\rho^2(x_2' + \ldots + x_2^{(r_1)}) + \ldots + a_\rho^q(x_q' + \ldots + x_q^{(r_1)}),$$

qui, d'après (1), est $\equiv 0 \pmod{r}$ quel que soit ρ. Le groupe Γ contient donc toutes les substitutions du groupe linéaire $(\bmod r)$ à q indices non homogène quand $r_1 \equiv 0 \pmod{r}$, et, quand $r_1 \not\equiv 0 \pmod{r}$, toutes les substitutions du groupe linéaire homogène G″, qui ne déplacent pas la racine dont tous les indices sont zéro.

Désignons par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ les lettres $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1)$ (pour β_i, $x_i \equiv 1$, $x_j \equiv 0$ quand $j \not\equiv i$), *et supposons* $r = p_1^\mu$ (p_1 premier), $r_1 > 2$.

Les transformations (2) qui laissent $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$ immobiles sont de la forme

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + a_1^{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_1^q x_q \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i & x_i + a_i^{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_i^q x_q \\ x_{i+1} & a_{i+1}^{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_{i+1}^q x_q \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_q & a_q^{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_q^q x_q \end{vmatrix} \pmod{r}.$$

On le voit en remarquant que cette forme est vraie pour $i = 0$, et que, si on la regarde comme exacte sans spécifier la valeur de i, les substitutions qui laissent $\beta_1, \ldots, \beta_{i+1}$ immobiles sont comprises parmi les substitutions (3), et, pour elles évidemment,

$$a_1^{i+1} \equiv \ldots \equiv a_i^{i+1} \equiv a_{i+2}^{i+1} \equiv \ldots \equiv a_q^{i+1} \equiv 0, \qquad a_{i+1}^{i+1} \equiv 1 \qquad \pmod{r}.$$

Soit S une substitution de Γ qui laisse immobile $(0, 0, \ldots, 0) = \beta_0$. Le groupe des substitutions (2) contient la substitution

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_q x_q \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_q & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} \pmod{r},$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont arbitraires, pourvu que l'un d'eux soit premier à r; car si, par exemple, α_i est premier à r, il suffit de considérer la substitution qui laisse invariable $x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_q$, et qui remplace x_i par x_1. C'est une substitution, car le déterminant est égal à $\pm \alpha_i$ premier à r.

Je dis, d'autre part, que S doit substituer à l'une des lettres $\beta_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\beta_2, \ldots$ ou β_q une lettre A dont un indice est premier à r (c'est-à-dire à p_1).

En effet, ceci est évident si r est premier, puisque β_0 est la seule racine dont tous les indices sont $\equiv 0 \pmod r$. Supposons r non premier.

Considérons les congruences (1) : ces congruences admettent, en particulier, des solutions telles que

$$(5) \qquad x'_1 + x''_1 \equiv 0, \quad \ldots, \quad x'_q + x''_q \equiv 0 \pmod r,$$

tous les $x_\rho^{(i)} (i > 2)$ étant nuls $(\bmod r)$. S laissant β_0 invariable permutera entre elles les solutions de ces congruences (5); supposons que S substitue à β_1 une lettre dont les indices sont tous non premiers à r : $(1, 0, \ldots, 0)$ et $(r-1, 0, \ldots, 0)$ étant solutions simultanées de (5) (ici $r \geqq 4$), $(r-1, 0, \ldots, 0) = (-1, 0, \ldots, 0)$ est aussi remplacée par une lettre jouissant de la même propriété : si S remplace $(1, 0, \ldots, 0)$ par $(\xi_1, \ldots, \xi_q)$, elle remplace $(-1, 0, \ldots, 0)$ par $(-\xi_1, \ldots, -\xi_q)$.

Nous supposons $r_1 \geqq 3$. Les congruences (1) admettent encore des solutions telles que

$$(6) \qquad x'_\rho + x''_\rho + x'''_\rho \equiv 0 \pmod r \quad \text{avec} \quad x_\rho^{(i)} \equiv 0 \quad (i > 3),$$

ces congruences sont satisfaites pour

$$x'_1 \equiv x''_1 \equiv 1, \quad x'''_1 \equiv -2, \quad x'_\rho \equiv x''_\rho \equiv x'''_\rho \equiv 0 \pmod r \quad (\rho > 1).$$

Donc $(-2, 0, \ldots, 0)$ est remplacé par une lettre ayant tous ses facteurs non premiers à r; par suite aussi $(2, 0, \ldots, 0)$, d'après (5). Si l'on prend

$$x'_1 \equiv 1, \quad x'_2 \equiv 2, \quad x'_3 \equiv -3, \quad x'_\rho \equiv x''_\rho \equiv x'''_\rho \equiv 0 \pmod r,$$

on voit qu'il en est de même de $(-3, 0, \ldots, 0)$ et $(3, 0, \ldots, 0)$, etc. Donc, ceci a lieu pour $(x_1, 0, \ldots, 0)$ quel que soit x_1. De plus, d'après le même raisonnement, les lettres $(x_1, 0, \ldots, 0)$ sont remplacées par des lettres dont le $j^{\text{ième}}$ indice a avec r un plus grand commun diviseur, qui est une puissance de p_1.

Si la même chose n'avait pas lieu pour $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, c'est-à-dire si $(0, 1, 0, \ldots, 0) = \beta_2$ était remplacée dans S par une lettre d'indices non tous divisibles par p_1, S substituerait à β_2 une lettre dont un indice est premier à r : la permutation des indices x_2 et x_1 nous permettrait de raisonner comme dans le cas où S substitue A (p. 289) à β_1, etc. Finalement, les indices étant convenablement choisis, si S ne substitue pas à β_1 une lettre A, on peut admettre que

$$(x_1, 0, \ldots, 0), \quad (0, x_2, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, \ldots, 0, x_q)$$

sont remplacées par des lettres à indices tous non premiers à r.

Considérons alors les congruences

$$\left.\begin{array}{l} -x_1+o\ +x_1'''\equiv o \\ o\ -x_2+x_2'''\equiv o \end{array}\right\} \pmod r.$$

Ceci nous montre que, d'après (6), les lettres $(x_1''', x_2''', o, \ldots, o)$ ou $(x_1, x_2, o, \ldots, o)$ sont remplacées par des lettres d'indices tous non premiers à r, puisque $r = p_1^\mu$. Alors, d'après (6), et

$$\left.\begin{array}{l} -x_1+o\ +x_1'''\equiv o \\ -x_2+o\ +x_2'''\equiv o \\ o\ -x_3+x_3'''\equiv o \end{array}\right\} \pmod r,$$

les lettres $(x_1, x_2, x_3, o, \ldots, o)$ jouissent de la même propriété, etc. Finalement, toutes les lettres jouiraient de cette propriété et S ne serait pas une substitution, contrairement à l'hypothèse.

On pourra donc, en faisant, au besoin, une permutation d'indices, supposer que la lettre substituée à β_1 par S ait un indice premier à r.

Prenons maintenant la substitution déduite de (4) en changeant a_j^i en a_i^j : (4) devient

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 x_1 + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_q & \alpha_q x_q + \ldots \end{vmatrix} \pmod r$$

et substitue à $(1, o, \ldots, o)$ une lettre que l'on peut prendre identique à A, moyennant un choix convenable des $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$: ST^{-1} laisse $(1, o, \ldots, o)$ immobile, et appartient à Γ. D'après les congruences (5), $S_1 = ST^{-1}$ laisse $(-1, o, \ldots, o)$ immobile. D'après les congruences (6), S_1 laisse $(2, o, \ldots, o)$, $(x_1' \equiv x_1'' \equiv -1,\ x_1''' \equiv 2$, les autres indices nuls), puis $(-2, o, \ldots, o)$ d'après (5), puis, d'après (6), $(3, o, \ldots, o)$, $(x_1' \equiv -1, x_1' \equiv -2, x_1''' \equiv 3)$, etc., immobiles. Finalement, S_1 laisse $(x_1, o, \ldots, o)$ immobile, comme les substitutions Σ_{01} de la forme (2) qui laissent β_0 et β_1 immobiles [formule (3) pour $i = 1$].

Considérons maintenant $\beta_2 = (o, 1, o, \ldots, o)$: S_1 remplacera β_2 par une lettre A_2; si l'un des indices $\xi_2, \ldots, \xi_q$ de A_2 est premier à r, il y a une substitution Σ_{01} de la forme

$$T_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \alpha_1 x_2 + \ldots \\ x_2 & \alpha_2 x_2 + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_q & \alpha_q x_q + \ldots \end{vmatrix} \pmod r,$$

où $\alpha_i\ (i \geqq 2)$, par exemple, est premier à r, les $q-1$ autres α étant arbitraires;

car, prenant

$$a_3^3 \equiv a_4^4 \equiv \ldots \equiv a_q^q \equiv a_2^i \equiv 1 \qquad \text{sauf} \qquad a_i^i \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} r),$$

les autres coefficients non écrits étant nuls, le déterminant de la substitution est $\pm \alpha_i$ premier à r. Cette substitution remplace $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$, que l'on peut prendre $= A_2$, et $S_1 T_1^{-1}$ laisse $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ immobile.

Admettons pour un moment que $\xi_2, \ldots, \xi_q$ sont tous non premiers à r. S_1 remplacera β_2 par une lettre où $x_2, \ldots, x_q$ sont non premiers à r; de même, d'après (5), pour $(0, -1, 0, \ldots, 0)$. D'après (6) $(1 + 1 - 2 \equiv 0, -1 - 1 + 2 \equiv 0)$, il en sera de même pour $(0, -2, 0, \ldots, 0)$, $(0, 2, 0, \ldots, 0)$, etc.; finalement pour $(0, x_2, 0, \ldots, 0)$, quel que soit x_2.

On peut alors admettre encore que cela a lieu pour $(0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$ $(i > 2)$, sans quoi, en permutant x_i et x_2, on pourrait raisonner sur S_1 et une certaine substitution linéaire T'_1 comme nous l'avons fait ou le ferons tout à l'heure sur S_1 et T_1.

D'après (6), et

$$\left.\begin{array}{r} -x_2 + 0 + x_2''' \equiv 0 \\ 0 - x_3 + x_3''' \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\operatorname{mod} r),$$

on voit que $(0, x_2, x_3, 0, \ldots, 0)$ jouit de la même propriété; finalement aussi $(0, x_2, x_3, \ldots, x_q)$, $(x_2, x_3, \ldots, x_q$ non tous nuls$)$.

D'après (6), et

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 + 0 + x_1 \equiv 0 \\ 0 - x_2 + x_2 \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 - x_q + x_q \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\operatorname{mod} r),$$

il en est de même de $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ quand $x_2, \ldots, x_q$ ne sont pas tous nuls : S_1 ne serait pas une substitution, ni S non plus, contrairement à l'hypothèse.

Dès lors, $S_2 = S_1 T_1^{-1}$ appartient à Γ et laisse $\gamma_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ immobile, par suite, d'après (5) et (6), $(0, 2, 0, \ldots, 0)$, …, $(0, x_2, 0, \ldots, 0)$, et, encore d'après (6), $(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$, quels que soient x_1 et x_2.

Nous considérons ensuite $\beta_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$: S_2 remplace β_3 par une lettre A_3, etc.

Supposons que nous ayons établi que le produit S_i de S par une substitution linéaire convenable $(\operatorname{mod} r)$ laisse $(x_1, x_2, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$ immobile, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_i$, et considérons $\beta_{i+1} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (où $x_1 \equiv \ldots \equiv x_i \equiv x_{i+2} \equiv \ldots \equiv x_q \equiv 0$, $x_{i+1} \equiv 1$). On formera la substitution

linéaire

$$T_i = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 + \alpha_1 x_{i+1} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ x_i & x_i + \alpha_i x_{i+1} \\ x_{i+1} & \alpha_{i+1} x_{i+1} + x_j \\ x_{i+2} & \alpha_{i+2} x_{i+1} + x_{i+2} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ x_j & \alpha_j x_{i+1} \\ \dots & \dots\dots \\ x_q & \alpha_q x_{i+1} + x_q \end{array} \right| \pmod r,$$

où α_j premier à r $(j > i)$, qui a pour déterminant $\pm \alpha_j$ premier à r, et substitue à β_{i+1} la lettre $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ telle que l'un des indices $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_q$ est premier à r. Si S_i substitue à β_{i+1} une lettre dont un des $q - i$ derniers indices est premier à r, en choisissant convenablement T_i, $S_{i+1} = S_i T_i^{-1}$ laisse β_{i+1} immobile, ainsi que $(x_1, x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0)$. D'après (5), S_{i+1} laisse $(0, \dots, 0, x_{i+1} = -1, 0, \dots)$ immobile, et, d'après (6), $(0, \dots, 0, x_{i+1} = 2, 0, \dots, 0)$, etc., par suite, $(0, \dots, 0, x_{i+1}, 0, \dots, 0)$ quel que soit x_{i+1}. S_{i+1} laisse d'après (6) $(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, 0, \dots, 0)$ immobile, et l'on peut continuer le raisonnement.

Supposons donc que S_i substitue à β_{i+1} une lettre $(\xi_1, \dots, \xi_q)$ dont les $q - i$ derniers indices sont non premiers à r. D'après (5) il en est de même pour $(0, 0, \dots, 0, x_{i+1} = -1, 0, \dots, 0)$; d'après (6) il en est de même pour $(0, \dots, 0, x_{i+1} = \pm 2, 0, \dots, 0)$; et ainsi de suite; finalement, il en est de même pour $(0, \dots, 0, x_{i+1}, 0, \dots, 0)$ quel que soit x_{i+1}.

On peut alors admettre que cela a lieu pour $(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0)$, avec j quelconque $> i+1$; sinon, en effet, en permutant x_j et x_{i+1}, on déduit de S_i une substitution analogue à S_{i+1} sur laquelle on peut raisonner comme tout à l'heure. D'après (6) et

$$\left. \begin{array}{l} -x_{i+1} + 0 \quad + x'''_{i+1} \equiv 0 \\ \quad 0 \quad - x_{i+2} + x'''_{i+2} \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod r,$$

on voit que $(0, \dots, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, 0, \dots, 0)$ jouit de la même propriété, etc. Finalement, il en est de même de $(0, \dots, 0, x_{i+1}, \dots, x_q)$. D'après (6) et

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 + 0 \quad + x'''_1 \quad \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -x_i + 0 \quad + x'''_i \quad \equiv 0 \\ \quad 0 - x_{i+1} + x'''_{i+1} \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad 0 - x_q \quad + x'''_q \quad \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod r,$$

il en est de même de $(x_1, \ldots, x_q)$ quand $x_{i+1}, \ldots, x_q$ ne sont pas tous nuls, c'est-à-dire pour toutes les lettres que déplace S : S ne serait pas une substitution.

Finalement, en faisant varier i, on voit que, en multipliant S par une substitution linéaire convenable on obtiendra une substitution qui se réduit à 1. Donc S est linéaire homogène.

Il reste à voir toutefois que Γ, qui contient G′ et G″ (p. 286-287), est bien dérivé de ces deux groupes.

Cherchons combien de lettres distinctes Γ peut substituer à $(0, \ldots, 0) = \beta_0$: posons dans (1)

$$x'_\rho \equiv x''_\rho \equiv \ldots \equiv x_\rho^{(r_1)};$$

on a les congruences

$$(7) \qquad \frac{r_1}{\delta} x'_1 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \frac{r_1}{\delta} x'_q \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{r}{\delta}\right),$$

qui admettent comme solutions $(0, \ldots, 0)$. Γ permute alors exclusivement entre elles les solutions distinctes $(\bmod r)$ des congruences (7), au nombre de δ^q (δ plus grand commun diviseur de r et r_1). L'ordre de Γ est au plus égal, par suite, à

$$\delta^q \times \text{ordre } G'';$$

or,

$$\text{ordre } \Gamma \geqq \text{ordre } G' \times \text{ordre } G'',$$

et

$$\text{ordre } G' = \delta^q.$$

Donc

$$\text{ordre } \Gamma = \text{ordre } G' \times \text{ordre } G'',$$

et Γ est bien dérivé de G′ et G″; G′ est bien évidemment un sous-groupe invariant de Γ.

Il résulte de là que, pour $r_1 \geqq 3$, Γ n'est transitif entre les r^q lettres que si

$$\delta = r, \qquad r_1 \equiv 0 \qquad (\bmod r).$$

D'autre part, si $r = p_1^\mu$ n'est pas premier $(\mu > 1)$, G″ permute exclusivement entre elles les lettres d'indices tous multiples de p_1 autres que β_0, tout en les déplaçant, car

$$|\, x_1, \ldots, x_n;\ \alpha_1 x_1,\ \alpha_2 x_1 + x_2, \ldots, \alpha_n x_1 + x_n \,| \qquad (\bmod r),$$

où α_1 est premier à p_1, est une substitution quels que soient $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et remplace $(p_1, 0, \ldots, 0)$ par $(\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_1, \ldots, \alpha_n p_1)$; donc G″ est intransitif entre les lettres qu'il déplace. Si $r = p_1$ est premier $(\mu = 1)$, la même substitution remplace $(1, 0, \ldots, 0)$ par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ qui est arbitraire (mais $\neq \beta_0$) : G″ est transitif, mais ne l'est deux fois que si $p_1 = 2$, $r = 2$.

Nous traiterons tout à l'heure le cas où $r_1 = 2$.

Nous avons obtenu ainsi le théorème suivant :

Théorème II. — *Soient les congruences*

$$x'_\rho + x''_\rho + \ldots + x^{(r_1)}_\rho \equiv 0 \pmod{r} \tag{1}$$

($\rho = 1, 2, \ldots, q$; r_1 *donné* > 2) *et* r^q *lettres* $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ *caractérisées par* q *indices* (mod r) (¹), $r = p_1^\mu$ *et* p_1 *premier. On peut associer ces lettres* r_1 *à* r_1, *une même lettre pouvant être répétée plusieurs fois, de façon que les indices de même rang* 1, 2, ..., q *satisfassent aux congruences ci-dessus, et l'on forme ainsi des combinaisons de* r_1 *lettres : l'ensemble des substitutions entre les* r^q *lettres qui permutent entre elles toutes ces combinaisons est le groupe* Γ *dérivé du groupe* G'' *des substitutions linéaires homogènes*

$$|x_1, \ldots, x_q;\ a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^q x_q, \ldots, a_q^1 x_1 + \ldots + a_q^q x_q| \pmod{r},$$

et du groupe G' *des substitutions*

$$|x_1, \ldots, x_q;\ x_1 + \alpha_1, \ldots, x_q + \alpha_q| \pmod{r},$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *prennent* (mod r) *toutes les valeurs possibles multiples de* $\frac{r}{\delta}$, δ *étant le plus grand commun diviseur de* r *et* r_1.

En particulier, si $\delta = r$, *c'est-à-dire* $r_1 \equiv 0 \pmod{r}$, Γ *est le groupe linéaire général* (mod r) *non homogène à* q *indices. Dans ce cas, et dans ce cas seulement,* Γ *est transitif; mais il n'est pas primitif si* r *n'est pas premier* (²).

La condition nécessaire et suffisante pour que Γ *soit deux fois transitif est* $r_1 \equiv 0 \pmod{r}$, $r = p_1$. *Alors même, si* $p_1 = 2$, Γ *est exactement trois fois transitif.*

Remarque I. — G' est formé de substitutions échangeables, et ses facteurs de composition, puisque $\delta = p_1^{\mu_1}$, $\mu_1 \leqq \mu$, sont tous égaux à p_1 (il y en a $\mu_1 q$). Donc Γ a $\mu_1 q$ facteurs de composition égaux à p_1, les autres étant ceux du groupe linéaire homogène (mod r) à q indices.

Remarque II. — Nous avons supposé précédemment (p. 288) $r_1 > 2$. Soit maintenant $r_1 = 2$: les congruences (1) se réduisent aux congruences (5).

(¹) C'est-à-dire prenant chacun les valeurs 0, 1, ..., $r - 1$ (mod r).

(²) Car G'' n'est pas maximum dans Γ, puisqu'il permute exclusivement entre elles les lettres d'indices multiples de p_1, comme les substitutions de G' pour lesquelles les α sont tous multiples de p_1.

Si $r = 2$, ces congruences sont satisfaites par $x'_\rho \equiv x''_\rho$, quel que soit x'_ρ : (5) est illusoire; Γ est le groupe symétrique de 2^q éléments.

Soit $r > 2$. Une substitution S de Γ qui remplace $(x_1, \ldots, x_q)$ par $(\xi_1, \ldots, \xi_q)$, remplace $(-x_1, \ldots, -x_q)$ par $(-\xi_1, \ldots, -\xi_q)$.

1° $r = p_1^\mu$ (p_1 impair). Prenons les $r^q - 1$ lettres autres que $\beta_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ (Γ laisse β_0 immobile), et associons deux à deux les $r' = \frac{r^q - 1}{2}$ paires de lettres autres que β_0 pour lesquelles, dans chaque paire, les indices correspondants sont égaux et de signe contraire; ceci est possible, puisque $(\xi_1, \ldots, \xi_q)$, $(-\xi_1, \ldots, -\xi_q)$ sont distinctes. Désignons par $a_1, b_1; \ldots; a_{r'}, b_{r'}$ ces r' paires.

Nous formerons toutes les $r'!$ substitutions possibles entre $a_1, \ldots, a_{r'}$,

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots \quad \sigma_{r'!},$$

puis les substitutions déduites de celles-là en remplaçant a par b,

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_{r'!},$$

et le groupe g des substitutions

$$\sigma_1\tau_1, \quad \sigma_2\tau_2, \quad \ldots, \quad \sigma_{r'!}\tau_{r'!}$$

correspondant, d'ordre $r'!$.

D'autre part, formons encore le groupe g' dérivé de

$$(a_1 b_1), \quad (a_2 b_2), \quad \ldots, \quad (a_{r'} b_{r'}),$$

d'ordre $2^{r'}$. Le groupe cherché Γ est dérivé de ces deux groupes et d'ordre $r'!\,2^{r'}$. En effet, Γ contient les substitutions de ces deux groupes; de plus, toute substitution de Γ est égale à une substitution qui permute les paires d'une certaine manière par une substitution qui les laisse immobiles, c'est-à-dire au produit d'une substitution de g par une de g'. On voit de suite que Γ est une fois, et une fois seulement, transitif entre les $2r'$ lettres autres que β_0, car Γ n'est pas primitif ([1]).

2° $r = 2^\mu$. — Les lettres $(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ dont les indices satisfont à

$$2\xi_1 \equiv \ldots \equiv 2\xi_q \equiv 0 \pmod{2^\mu}$$

sont permutées exclusivement entre elles par Γ. On a pour elles $\xi_i = 0$ ou $2^{\mu-1}$: ces lettres sont au nombre de 2^q. Γ contient le groupe symétrique entre ces 2^q lettres.

---

(1) Ce groupe rentre dans une catégorie de groupes déjà considérée par nous (*J. de Math.*, 1895, p. 9).

Au contraire on peut raisonner sur les $2r'' = 2^{\mu q} - 2^q$ autres lettres comme tout à l'heure. Le groupe Γ est d'ordre $r''!\,2^q!\,2^{r''}$.

Remarque III. — Le théorème II précédent a été établi par M. Jordan dans les cas particuliers suivants :

$$r_1 = r = 3, \qquad q = 2,$$
$$r_1 = r = 4, \qquad q = 6,$$

et indiqué comme résultant de raisonnements semblables pour les cas où

$$r_1 = r = 3, \qquad q = 20,$$
$$r_1 = r = 4, \qquad q = 2,$$
$$r_1 = r = 3, \qquad q = 8 \quad (^1).$$

Le théorème II précédent a l'avantage de résumer les solutions des cinq cas ci-dessus envisagés par M. Jordan et, éventuellement, de fournir la solution de cas analogues.

Notre procédé de démonstration diffère sur un point de celui employé par M. Jordan pour ces cas particuliers. Pour montrer nettement la dissemblance, prenons, par exemple, le groupe de Hesse ou groupe de l'équation aux abscisses des points d'inflexion des courbes du troisième degré. Ce groupe est contenu dans le groupe Γ_1 formé de l'ensemble des substitutions entre les 9 lettres (x_1, x_2) (mod 3) qui permutent entre elles les solutions des congruences

$$(8) \qquad x'_1 + x''_1 + x'''_1 \equiv x'_2 + x''_2 + x'''_2 \equiv 0 \pmod 3$$

telles que

$$(x'_1, x'_2), \quad (x''_1, x''_2), \quad (x'''_1, x'''_2)$$

soient des lettres *distinctes*. En effet, d'après la théorie des fonctions elliptiques [2], les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré sont déterminés par

$$3u_1 = \mathrm{P} + 2x_1\omega_1 + 2x_2\omega_2 = \mathrm{P} + \text{période} \qquad (x_1, x_2 \text{ entiers}).$$

Les congruences (8) expriment précisément que 3 de ces points distincts sont en ligne droite : le groupe cherché doit, comme Γ_1, permuter entre eux ces systèmes de 3 points ou les droites passant par ces 3 points. Mais, si nous prenons les solutions de (8) pour lesquelles (x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2), (x'''_1, x'''_2) ne sont pas distinctes,

---

(1) *Traité des substitutions*, p. 302, 306 et 308.

(2) JORDAN, *Cours d'Analyse lithographié de l'École Polytechnique*, 1re division. — APPELL et GOURSAT, *Fonctions algébriques*, p. 490.

on remarque que $x'_1 \equiv x''_1$, $x'_2 \equiv x''_2$ entraînent $x'_1 \equiv x'''_1$, $x'_2 \equiv x'''_2$. Les 3 points correspondants de la cubique sont confondus. Le groupe de Hesse permute aussi entre eux ces points, qui sont les points d'inflexion, et les tangentes d'inflexion qui passent par ces 3 points confondus; par suite, il est contenu dans le groupe des substitutions entre les 9 lettres qui permutent entre elles les solutions de (8), les 3 lettres (x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2), (x'''_1, x'''_2) étant *distinctes ou non*. Mais ce dernier groupe n'est autre que le groupe Γ de notre théorème II dans le cas particulier où $r = r_1 = 3$, $q = 2$.

Un même mode de raisonnement est applicable aux autres cas particuliers mentionnés tout à l'heure et étudiés par M. Jordan, ou plus généralement aux équations

$$u_1^{(j)} + \ldots + u_\delta^{(j)} = \frac{P + 2x_j\pi i + x_{p+1}\tau_1^{(j)} + \ldots + x_{2p}\tau_p^{(j)}}{r} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p \text{ et } \delta \geqq p)$$

de la page 286 : les congruences (1), que les lettres $(x'_1, \ldots, x'_{2p}), \ldots, (x_1^{(r_1)}, \ldots, x_{2p}^{(r_1)})$ dont les indices y entrent soient *distinctes ou non*, expriment certaines propriétés géométriques et équivalent à des relations rationnelles $R = 0$ entre les abscisses ou les paramètres solutions de $X = 0$. L'ensemble des fonctions $R = 0$ est laissé invariable par le groupe de $X = 0$, par suite aussi l'ensemble des solutions des congruences (1), que les lettres $(x'_1, \ldots, x'_{2p}), \ldots, (x_1^{(r_1)}, \ldots, x_{2p}^{(r_1)})$ qui y entrent soient distinctes ou non. Il y a donc lieu à application du théorème II; mais il est bien évident que le groupe de $X = 0$ permute aussi exclusivement entre elles les solutions de (1) pour lesquelles les r_1 lettres sont distinctes. Dans chaque cas, ce qui précède comportera d'ailleurs une interprétation géométrique.

Indiquons-la encore dans le cas des cubiques C ayant en 3 points un contact du troisième ordre avec une quartique générale (sans point double).

Les solutions du problème sont données par les 3 relations [1]

$$(9) \quad \begin{cases} u_1 + u_2 + \ldots + u_{12} = 3P + 2x_1\pi i + x_4 A + x_5 B'' + x_6 B', \\ v_1 + v_2 + \ldots + v_{12} = 3Q + 2x_2\pi i + x_4 B'' + x_5 A' + x_6 B, \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_{12} = 3R + 2x_3\pi i + x_4 B' + x_5 B + x_6 A'', \end{cases}$$

où u, v, w sont des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe, et où l'on fait

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_1^{(j)}, & u_5 = \ldots = u_8 = u_2^{(j)}, & u_9 = \ldots = u_{12} = u_3^{(j)}, \\ v_1 = \ldots\ldots = v_4 = v_1^{(j)}, & v_5 = \ldots = v_8 = v_2^{(j)}, & v_9 = \ldots = v_{12} = v_3^{(j)}, \\ w_1 = \ldots\ldots = w_4 = w_1^{(j)}, & w_5 = \ldots = w_8 = w_2^{(j)}, & w_9 = \ldots = w_{12} = w_3^{(j)}. \end{cases}$$

[1] APPELL et GOURSAT, *Fonctions algébriques*, p. 498.

On a ainsi

$$\left\{\begin{aligned} u_1^{(j)} + u_2^{(j)} + u_3^{(j)} &= \frac{3\mathrm{P} + 2x_1^{(j)}\pi i + x_4^{(j)}\mathrm{A} + x_5^{(j)}\mathrm{B}'' + x_6^{(j)}\mathrm{B}'}{4}, \\ v_1^{(j)} + v_2^{(j)} + v_3^{(j)} &= \frac{3\mathrm{Q} + 2x_2^{(j)}\pi i + x_4^{(j)}\mathrm{B}'' + x_5^{(j)}\mathrm{A}' + x_6^{(j)}\mathrm{B}}{4}, \\ w_1^{(j)} + w_2^{(j)} + w_3^{(j)} &= \frac{3\mathrm{R} + 2x_3^{(j)}\pi i + x_4^{(j)}\mathrm{B}' + x_5^{(j)}\mathrm{B} + x_6^{(j)}\mathrm{A}''}{4}. \end{aligned}\right.$$

A chaque système de valeurs des $x_1^{(j)}, \ldots, x_6^{(j)}$ correspondent ainsi 3 points de contact et une cubique C qu'on peut caractériser par $(x_1^{(j)}, \ldots, x_6^{(j)})$.

Prenons 4 de ces cubiques, *distinctes ou non,*

$$c^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_6^{(1)}), \qquad \ldots, \qquad c^{(4)} = (x_1^{(4)}, \ldots, x_6^{(4)}),$$

mais telles que

$$(1\ bis) \qquad x_\rho^{(1)} + x_\rho^{(2)} + x_\rho^{(3)} + x_\rho^{(4)} \equiv 0 \pmod 4 \qquad (\rho = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ et } 6).$$

Les 3 relations (9) exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que 12 points de la quartique soient sur une cubique, on voit que les 12 points de contact des 4 cubiques $c^{(1)}, \ldots, c^{(4)}$ sont sur une cubique γ.

Mais il n'est aucunement nécessaire de supposer que ces 4 cubiques sont distinctes.

Prenons d'abord

$$x_\rho^{(1)} = x_\rho^{(2)}, \qquad c^{(1)} = c^{(2)};$$

la cubique correspondante γ' est tangente en 3 points à la quartique.

Prenons maintenant

$$x_\rho^{(1)} = x_\rho^{(2)} = x_\rho^{(3)},$$

on a forcément

$$x_\rho^{(1)} = x_\rho^{(4)}.$$

La cubique correspondante est la cubique $c^{(1)}$.

Il est bien évident ici que chaque substitution du groupe de $X = 0$ doit permuter entre elles les cubiques $c^{(j)}$, les cubiques γ, les cubiques γ' respectivement [1], par suite, permuter entre eux les systèmes de solutions, formées de lettres *distinctes ou non,* de (1 *bis*). Le groupe de $X = 0$ est donc contenu dans le groupe linéaire général (mod 4) à 6 indices, d'après le théorème II.

On pourrait aussi traiter le cas des cubiques ayant en 4 points un contact du

---

(1) Comparer Clebsch, *Journal de Crelle,* t. 63, 1864, p. 205, où sont signalées ces diverses catégories de cubiques.

deuxième ordre avec la quartique : on en trouverait (¹) 3^6 systèmes. Le groupe de $X=0$ est compris, d'après le théorème II, dans le groupe linéaire général (mod 3), à 6 indices, et même dans le groupe linéaire homogène, puisque l'un des systèmes est formé des droites du plan (ce groupe permute entre elles les solutions des congruences $x'_\rho + x''_\rho \equiv 0 \pmod 3$).

Considérons encore, comme à la page 285, l'équation $X=0$ qui détermine les 63 systèmes distincts de coniques tangentes en 4 points à une quartique générale; ces coniques étant caractérisées par $(x_1, \ldots, x_6) \pmod 2$, le groupe de $X=0$ laisse invariables les solutions des congruences

$$x_\rho + x'_\rho + x''_\rho \equiv 0 \pmod 2.$$

Ici $r_1 = 3$, $r = 2$, $q = 6$, $\delta = 1$. D'après le théorème II, le groupe de $X=0$ est contenu dans le groupe linéaire homogène (mod 2) à 6 indices.

V.

LA CLASSE DU GROUPE LINÉAIRE ET DE SES SUBSTITUTIONS.

Méthode générale pour la détermination de la classe des substitutions d'un groupe. — Indiquons d'abord une méthode générale pour la détermination de la classe des substitutions d'un groupe et de la classe de ce groupe.

Soient G un groupe de substitutions, a, b, ... ses lettres, en nombre n, ces lettres étant effectivement déplacées par G. Classons les lettres de G en catégories, en mettant ensemble celles que G permute entre elles. Soient

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} a, & b, & \ldots, \\ a', & b', & \ldots, \\ a'', & b'', & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array} \right.$$

ces catégories, H_α le sous-groupe des substitutions de G qui laissent α immobile. Classons les groupes H_α en catégories, deux de ces groupes appartenant à une même catégorie pour les valeurs de α appartenant à une même ligne de (10), c'est-à-dire à une même catégorie de lettres; les groupes d'une même catégorie sont les transformés d'un d'entre eux par les substitutions de G, par suite sont semblables. Donc H_a, H_b, ... sont semblables; de même $H_{a'}$, $H_{b'}$, ... Prenons dans chaque catégorie de groupes H_α un groupe la représentant : soient H_a,

(¹) APPELL et GOURSAT, *Fonctions algébriques*, p. 498.

$H_{a'}$, ... ces représentants; une substitution de G ou bien est de classe n, ou bien laisse une lettre immobile et est semblable à une substitution de H_a, ou $H_{a'}$, ou .... Pour avoir sa classe il suffit de trouver la classe des substitutions de H_a, $H_{a'}$, ...

On opérera alors sur chacun de ces groupes comme on l'a fait sur G; et ainsi de suite.

Dans les opérations successives que l'on fera, on pourra être amené à considérer des sous-groupes, par exemple $H_{a\beta\gamma}$, qui soient contenus dans des sous-groupes déjà étudiés au point de vue de la classe, par exemple $H_{a\gamma}$: il sera inutile de s'en occuper. A un moment quelconque du raisonnement, nous pourrons admettre que l'on ne considère que des sous-groupes non contenus dans les sous-groupes déjà étudiés. *C'est ce que nous appellerons la condition* (A).

Cette méthode est aussi, *a fortiori,* applicable pour trouver la classe de G. Elle se simplifie même, puisqu'il est inutile de s'occuper du degré des sous-groupes considérés, tant qu'on n'arrive pas à un sous-groupe dont chaque substitution déplace toutes les lettres de ce sous-groupe, et pour lequel la classe est égale au degré.

Application au groupe linéaire (mod r) (r premier). — Considérons d'abord le groupe linéaire général L non homogène à m indices (mod r), r étant premier. Nous allons établir le théorème suivant :

Théorème III. — *Le groupe linéaire général homogène à m indices* (mod r). *r étant premier, renferme des substitutions de classe* $r^m - 1$, $r^m - r$, $r^m - r^2$, ..., $r^m - r^{m-i}$, ..., $r^m - r^{m-1}$ *exclusivement. Il est m fois incomplètement transitif.*

Le groupe linéaire général non homogène renferme en outre des substitutions de classe r^m; *il est* $m+1$ *fois incomplètement transitif.*

La classe des deux groupes est $r^m - r^{m-1}$ (1).

---

(1) Jordan, *Comptes rendus,* décembre 1872, p. 1754. Rappelons que le groupe linéaire général non homogène (mod r) est deux fois transitif quand $r > 2$, trois fois quand $r = 2$ (Jordan).

Le *groupe abélien* (Jordan, *Traité des Substitutions,* p. 174) contient la substitution ($m = 2m_1$)

$$|\, x_1, y_1, x_2, \ldots, y_{m_1};\ x_1 + y_1, y_1, x_2, \ldots, y_{m_1} \,| \qquad (\text{mod } r)$$

qui laisse immobiles les r^{2m_1-1} lettres pour lesquelles $y_1 \equiv 0$: sa classe est donc celle du groupe linéaire général.

De même pour le *groupe orthogonal* (Jordan, *Traité des Substitutions,* p. 155) qui contient la substitution

$$|\, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m;\ x_2, x_1, x_3, \ldots, x_m \,| \qquad (\text{mod } r)$$

laissant immobiles les r^{m-1} lettres pour lesquelles $x_1 \equiv x_2$.

En effet, *rappelons d'abord la définition de la transitivité incomplète* (1).

Soient A un groupe transitif entre les n lettres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ qu'il déplace; A_{α_i} le sous-groupe de A laissant α_i immobile : A_{α_i} est le transformé de A_{α_1} par une substitution de A.

A_{α_1} peut laisser en même temps $\alpha_2, \ldots, \alpha_{p_1}$ immobiles en déplaçant toutes les autres lettres :

$$A_{\alpha_1} = A_{\alpha_2} = \ldots = A_{\alpha_{p_1}} = A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p_1}};$$

A_{α_1} déplace toute autre lettre $\alpha_j (j > p_1)$. Supposons que A_{α_1} soit transitif entre les lettres $\alpha_{p_1+1}, \ldots, \alpha_n$: si $p_1 = 1$, on dit que A est deux fois transitif; il est alors primitif; si $p_1 > 1$, A est imprimitif (2), mais on peut dire dans ce cas que A est *deux fois incomplètement transitif* (3).

Toute substitution de A qui laisse une lettre α_k immobile est transformée d'une substitution de $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}}$ par une substitution de A, et elle appartient à un sous-groupe $A_{\alpha'_1\ldots\alpha'_{p_1}}$ de A laissant exactement p_1 lettres immobiles, comme $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}}$; parmi ces lettres se trouve α_k, et $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{p_1}$ diffèrent toutes de ces p_1 lettres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p_1}$, ou leur sont toutes identiques, sans quoi le groupe dérivé de $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}}$, $A_{\alpha'_1\ldots\alpha'_{p_1}}$ laisserait au moins une lettre immobile, sans en laisser p_1 : un de ses transformés serait contenu dans $A_{\alpha_1} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}}$, et le contiendrait, tout en étant plus grand que lui, ce qui est absurde. Finalement (4), A admet une répartition de ses n lettres p_1 à p_1 en systèmes $s_1, s_2, \ldots, s_{\frac{n}{p_1}}$.

Soit dans $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}}$ le sous-groupe $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}\alpha_{p_1+1}}$ des substitutions laissant α_{p_1+1} immobile. Tout sous-groupe A′ des substitutions de A laissant immobile une des lettres d'un des systèmes, s_i par exemple, et une autre lettre de A non contenue dans ce système, est semblable à $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}\alpha_{p_1+1}}$. En effet, par une substitution convenable, on transformera A′ en un groupe A'_1 de la forme $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}\alpha_{p_1+j}}$ $(j \geqq 1)$, puis, si $j \neq 1$, par une substitution de $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}}$, qui est transitif entre $\alpha_{p_1+1}, \ldots, \alpha_n$, on transformera A'_1 en $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}\alpha_{p_1+1}}$.

$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p_1}\alpha_{p_1+1}}$ peut laisser immobiles d'autres lettres : soient $\alpha_{p_1+2}, \ldots, \alpha_{p_1+p_2}$ ces

---

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1900, p. 157-158.

(2) *Voir* JORDAN, *Traité des Substitutions*, p. 283-285, et notre Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1895, D.18, théorème VII.

(3) La définition donnée par Lie de la transitivité multiple dans les groupes finis continus est précisément analogue à celle de la transitivité incomplète dans les groupes de substitutions (*Voir* notre Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1901, p. 62 .

(4) *Loc. cit.*, note (2) ci-dessus.

lettres, $\alpha_{p_1+p_2+j}$ $(j \geqq 1)$ étant déplacé par $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p_1+1}}$; on a

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p_1}\alpha_{p_1+1}} = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p_1}\alpha_{p_1+2}} = \ldots = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p_1}\alpha_{p_1+p_2}} = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p_1+p_2}}.$$

Si $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p_1+p_2}}$ est transitif entre les lettres qu'il permute, on dira que A est *trois fois incomplètement transitif*, et ainsi de suite.

Dans un groupe A $n+1$ fois transitif ou incomplètement transitif, le sous-groupe A_{α_1} des substitutions de A laissant une des lettres, α_1, immobile est n fois transitif ou incomplètement transitif; le sous-groupe $A_{\alpha_1\beta_1}$ des substitutions de A_{α_1} laissant une des lettres déplacées par A_{α_1} immobile est $n-1$ fois transitif ou incomplètement transitif, et ainsi de suite; une substitution S qui laisse une lettre immobile est semblable à une substitution S_{α_1} de A_{α_1}; une substitution de A_{α_1} qui laisse une lettre de A_{α_1}, déplacée par A_{α_1}, immobile est semblable à une substitution de $A_{\alpha_1\beta_1}$, etc.

Ceci posé, considérons en particulier le groupe linéaire général L à m indices $(\bmod r)$.

Une de ses substitutions S peut déplacer r^m lettres : elle est alors de classe r^m, mais ne peut être d'ordre 2 que si $r=2$, cas où l'on a toujours des substitutions d'ordre 2 et de classe r^m.

Considérons une substitution S' de L laissant une lettre immobile : L étant transitif, cette substitution est semblable à une substitution S'_1 laissant immobile la lettre $\alpha_{00\ldots0}$, dont tous les indices sont nuls : pour avoir la classe de S', il suffit d'avoir celle de S'_1. Le groupe $L_{\alpha_{0\ldots0}}$ des substitutions de L laissant $\alpha_{00\ldots0}$ immobile est le groupe linéaire homogène qui est transitif entre r^m-1 lettres, car il remplace $\alpha_{1\ldots0}$ par une lettre arbitraire [formule (4), p. 287]. Si S'_1 est de classe r^m-1, elle n'est d'ordre 2 que si r impair. On sait d'ailleurs que $L_{\alpha_{00\ldots0}}$, transitif entre r^m-1 lettres, renferme des substitutions de classe r^m-1 (¹).

Si S'_1 est de classe $< r^m-1$, elle laisse une autre lettre déplacée par $L_{\alpha_{00\ldots0}}$ immobile. Elle est semblable à une substitution S'' de $L_{\alpha_{00\ldots0}}$ laissant immobile la lettre $\alpha_{10\ldots0}$, par suite à une du groupe $L_{\alpha_{00\ldots0}\alpha_{10\ldots0}}$. Les substitutions de $L_{\alpha_{00\ldots0}\alpha_{10\ldots0}}$ sont de la forme

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^m x_m \\ x_2 & a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^m x_m \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m & a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^m x_m \end{vmatrix} \quad (\bmod r);$$

$L_{\alpha_{00\ldots0}\alpha_{10\ldots0}}$ laisse invariables les r lettres pour lesquelles l'indice x_1 est quelconque, les autres indices étant nuls. Il suffit d'avoir la classe de S''.

(¹) JORDAN, *Journal de Mathématiques*, 1872, p. 351; *voir* encore plus loin, p. 312.

$L_{\alpha_{00\ldots0}\alpha_{10\ldots0}}$ remplace $(0, 1, 0, \ldots, 0) = \alpha_{010\ldots0}$ par la lettre $(a_1^2, \ldots, a_m^2)$ qui est arbitraire parmi les lettres pour lesquelles $x_2, \ldots, x_m$ ne sont pas tous nuls (p. 289-290); donc $L_{\alpha_{00\ldots0}\alpha_{10\ldots0}}$ est transitif entre les lettres qu'il déplace, en nombre $r^m - r$, et contient des substitutions de classe $r^m - r$; $r^m - r$ est pair, que r soit $= 2$ ou > 2.

S″ peut être de classe $r^m - r$ ou non; si non, S″ est semblable à une substitution de $L_{\alpha_{00\ldots0}\alpha_{10\ldots0}}$ laissant invariable $\alpha_{010\ldots0}$, c'est-à-dire appartient à $L_{\alpha_{00\ldots0}\alpha_{10\ldots0}\alpha_{010\ldots0}}$. Les substitutions de ce groupe sont de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 & x_1 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^m x_m \\ x_2 & x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^m x_m \\ x_3 & \quad a_3^3 x_3 + \ldots + a_3^m x_m \\ \cdot\cdot & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m & \quad a_m^3 x_3 + \ldots + a_m^m x_m \end{array}\right| \pmod{r},$$

et ce groupe laisse invariables les r^2 lettres $(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$. On voit encore que ce groupe est transitif entre les $r^m - r^2$ autres lettres, et ainsi de suite. Plus généralement le sous-groupe des substitutions de L laissant $(x_1, x_2, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$ immobile est transitif entre les $r^m - r^i$ autres lettres. Il est aussi formé des substitutions laissant $(0, 0, \ldots, 0)$, $(1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, x_i = 1, 0, \ldots, 0)$ immobiles.

Dès lors, pour $i = m - 1$, ce sous-groupe est transitif; pour $i = m - 2$, deux fois incomplètement transitif, etc.; pour $i = 0$, m fois incomplètement transitif.

Finalement on voit que le groupe linéaire homogène (mod r) à m indices renferme exclusivement des substitutions de classe r^m, $r^m - 1$, $r^m - r$, $r^m - r^2$, $\ldots$, $r^m - r^{m-1}$; le groupe linéaire non homogène renferme en outre des substitutions de classe r^m. C. Q. F. D.

Le rapprochement du théorème III et du théorème I nous donne alors ce résultat :

Corollaire. — *Une équation de degré* r^m (r premier), *dont le groupe est contenu dans le groupe linéaire général non homogène à* m *indices* (mod r), *ne peut avoir que* $r^m - 1$, $r^m - r$, $\ldots$, $r^m - r^{m-1}$ *ou* 0 *racines imaginaires si* r *est impair*, 2^m, $2^m - 2$, $2^m - 2^2$, $\ldots$, $2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}$, *ou* 0 *si* $r = 2$ (¹).

Nous allons encore appliquer la méthode générale ci-dessus (p. 298) à la détermination plus ou moins complète de la classe des substitutions contenues dans le groupe linéaire général non homogène L (mod p^μ) à n indices (p premier, $\mu > 1$)

(¹) Même, d'après ce que nous verrons plus loin (p. 314), il y a 0 ou $2^m - 2^{m-k}$ racines imaginaires $\left[k = 1, 2, \ldots \text{ ou } E\left(\frac{m}{2}\right)\right]$ quand $r = 2$.

et aussi à la détermination de la classe de ces groupes, qui, croyons-nous, n'a pas encore été évaluée pour $\mu > 1$.

Déterminons d'abord la classe de L.

Le groupe L, de degré $p^{\mu n}$, contient les substitutions

$$| x_1, \ldots, x_n ; x_1 + \alpha_1, \ldots, x_n + \alpha_n | \qquad (\operatorname{mod} p^\mu),$$

en nombre $p^{\mu n}$, qui forment un groupe transitif et dont toutes les substitutions sont de classe $p^{\mu n}$. Une substitution de L est de classe $p^{\mu n}$ ou semblable à une substitution du sous-groupe H_{β_0} des substitutions de L laissant la lettre $\beta_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, dont tous les indices sont nuls $(\operatorname{mod} p^\mu)$, invariable. H_{β_0} est formé des substitutions linéaires homogènes

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^n x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & a_n^1 x_1 + \ldots + a_n^n x_n \end{vmatrix} \qquad (\operatorname{mod} p^\mu).$$

D'après la méthode générale indiquée au début du paragraphe, formons les catégories (10) pour H_{β_0}, catégories qui ne doivent comprendre que des lettres déplacées par H_{β_0}.

Soit $\beta_1 = (1, 0, \ldots, 0)$; $H_{\beta_0\beta_1}$ laisse invariable β_1; ses substitutions sont telles que

$$a_1^1 \equiv 1, \qquad a_2^1 \equiv \ldots \equiv a_n^1 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} p^\mu),$$

c'est-à-dire de la forme

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n \\ x_2 & a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n \end{vmatrix} \qquad (\operatorname{mod} p^\mu);$$

et, réciproquement, les substitutions de cette forme appartiennent à $H_{\beta_0\beta_1}$.

Désignons, avec M. Jordan, par (1) $\Omega(p^{\mu n})$ l'ordre $\mathcal{H}_{\beta_0}$ de H_{β_0}. La condition nécessaire et suffisante pour que (12) représente une substitution est que son déterminant (2) soit premier à p, par suite que

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} x_2 & a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n \end{vmatrix} \qquad (\operatorname{mod} p^\mu)$$

---

(1) *Traité des Substitutions*, p. 93.
(2) *Id.*

représente une substitution; $a_1^2, \ldots, a_1^n$ sont arbitraires. Le nombre des substitutions (13) est $\Omega(p^{\mu(n-1)})$; le nombre des systèmes $a_1^2, \ldots, a_1^n$ est $p^{\mu(n-1)}$. Donc l'ordre $\mathcal{H}_{\beta_0\beta_1}$ de $H_{\beta_0\beta_1}$ est

$$\mathcal{H}_{\beta_0\beta_1} = p^{\mu(n-1)}\Omega(p^{\mu(n-1)}).$$

β_1 est donc permuté par H_{β_0} avec [1]

$$\frac{\mathcal{H}_{\beta_0}}{\mathcal{H}_{\beta_0\beta_1}} = \frac{\Omega(p^{\mu n})}{p^{\mu(n-1)}\Omega(p^{\mu(n-1)})} = (p^\mu, n) \text{ lettres,}$$

(m, ρ) désignant en général le nombre de manières différentes de déterminer un système de ρ nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ inférieurs à m, et dont le plus grand commun diviseur est premier à m. Or, parmi les $p^{\mu n}$ systèmes de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont égaux à $0, 1, 2, \ldots$, ou $p^\mu - 1 \pmod{p^\mu}$, ceux qui ont un plus grand commun diviseur > 1 sont ceux pour lequels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous $\equiv 0 \pmod p$, en nombre $p^{(\mu-1)n}$. Donc

$$(14) \qquad (p^\mu, n) = p^{\mu n} - p^{(\mu-1)n} = p^{\mu n}\left(1 - \frac{1}{p^n}\right).$$

Les lettres correspondantes sont les lettres de la première catégorie (10), et H_{β_0} les permute transitivement avec β_1. D'autre part H_{β_0} permute exclusivement entre elles les lettres dont tous les indices sont $\equiv 0 \pmod p$, en nombre $p^{(\mu-1)n}$, lettres qui ne comprennent pas β_1. Il résulte, par suite, de (14) que les lettres de la première catégorie comprennent toutes celles dont un indice est $\not\equiv 0 \pmod p$, et H_{β_0} est transitif entre ces dernières. De plus, une substitution S de H_{β_0} ne peut laisser immobiles toutes les lettres de la première catégorie sans se réduire à l'unité.

En effet, S laisserait immobiles les lettres

$$(15) \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n,$$

pour lesquelles un des indices est $\equiv 1 \pmod{p^\mu}$, les autres étant tous nuls; par exemple, S laissera immobile β_i telle que $x_i \equiv 1$, les autres indices étant nuls $\pmod{p^\mu}$, ce qui entraîne, d'après (11), $a_i^i \equiv 1$, $a_j^i \equiv 0 \pmod{p^\mu}$ quand $j \neq i$. Ceci devant avoir lieu pour S quel que soit i, il faudrait $S = 1$. Donc une substitution quelconque de H_{β_0} déplace quelque lettre de la première catégorie.

Si alors γ_1 est une lettre de H_{β_0} n'appartenant pas à la première catégorie, les substitutions de $H_{\beta_0\gamma_1}$ ou bien laissent immobile une autre lettre β_0' de la première

(1) D'après la formule de M. Jordan : $\Omega(m^n) = (m, n)\, m^{n-1}\Omega(m^{n-1})$ (*Traité des Substitutions*, p. 96).

catégorie, ou bien déplacent toutes les lettres de cette première catégorie, c'est-à-dire sont de classe $\geqq p^{\mu n} - p^{(\mu-1)n}$. Finalement, une substitution de $H_{\beta_0\gamma_1}$ ne peut être de classe inférieure à ce nombre que si elle appartient à un groupe semblable à $H_{\beta_0\beta_1}$, qu'il nous suffira de considérer [condition (A), p. 299]. Il y a bien d'ailleurs dans $H_{\beta_0\beta_1}$ des substitutions de classe plus petite que $p^{\mu n} - p^{(\mu-1)n}$: $H_{\beta_0\beta_1}$ contient la substitution

$$(16)\quad |x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n;\ x_1 + p^{\mu-1}x_n, \ldots, x_{n-1} + p^{\mu-1}x_n, x_n(1 + p^{\mu-1})| \quad (\operatorname{mod} p^\mu),$$

laissant invariables les lettres pour lesquelles $x_n \equiv 0 \pmod p$, en nombre $p^{\mu(n-1)+\mu-1} = p^{\mu n-1}$; cette substitution a sa classe $\leqq p^{\mu n} - p^{\mu n-1} < p^{\mu n} - p^{(\mu-1)n}$ quand $n > 1$. Il nous suffit donc, pour avoir la classe de H_{β_0}, de chercher la classe de $H_{\beta_0\beta_1}$.

Opérons de la même manière sur $H_{\beta_0\beta_1}$, et répartissons ses lettres en catégories (10).

D'abord $H_{\beta_0\beta_1}$ laisse immobiles les lettres $(x_1, 0, \ldots, 0)$, en nombre p^μ. D'après (12), $H_{\beta_0\beta_1}$ déplace la lettre $\beta_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ dont tous les indices, sauf le second $\equiv 1$, sont nuls, puisque $H_{\beta_0\beta_1}$ contient la substitution

$$|x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n| \quad (\operatorname{mod} p^\mu).$$

Nous classerons dans la première catégorie de $H_{\beta_0\beta_1}$ les lettres que ce groupe permute avec β_2. Les substitutions de $H_{\beta_0\beta_1\beta_2}$ sont de la forme

$$(17)\quad \left|\begin{matrix} x_1 & x_1 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^n x_n \\ x_2 & x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^n x_n \\ x_3 & a_3^3 x_3 + \ldots + a_3^n x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & a_n^3 x_3 + \ldots + a_n^n x_n \end{matrix}\right| \quad (\operatorname{mod} p^\mu).$$

Leur nombre $\mathcal{H}_{\beta_0\beta_1\beta_2}$ est, puisque $a_1^3, \ldots, a_1^n, a_2^3, \ldots, a_2^n$ sont arbitraires,

$$\Omega(p^{\mu(n-2)})p^{2\mu(n-2)}.$$

β_2 est permuté par $H_{\beta_0\beta_1}$ avec

$$B_2 = \frac{\mathcal{H}_{\beta_0\beta_1}}{\mathcal{H}_{\beta_0\beta_1\beta_2}} = \frac{p^{\mu(n-1)}\Omega(p^{\mu(n-1)})}{p^{2\mu(n-2)}\Omega(p^{\mu(n-2)})}.$$

Or,

$$\Omega(p^{\mu(n-1)}) = (p^\mu, n-1)p^{\mu(n-2)}\Omega(p^{\mu(n-2)})$$

donc, d'après (14),

$$(18)\quad B_2 = (p^\mu, n-1)p^\mu = p^{\mu(n-1)+\mu}\left(1 - \frac{1}{p^{n-1}}\right) = p^{\mu n}\left(1 - \frac{1}{p^{n-1}}\right),$$

et $H_{\beta_0\beta_1}$ permute avec β_2 $p^{\mu n}\left(1-\frac{1}{p^{n-1}}\right)$ lettres. D'autre part, $H_{\beta_0\beta_1}$ permute exclusivement entre elles les lettres pour lesquelles x_1 est arbitraire, $x_2, \ldots, x_n$ étant $\equiv 0 \pmod{p}$, lettres en nombre $p^{(\mu-1)(n-1)+\mu} = p^{(\mu-1)n+1}$, et qui ne comprennent pas β_2. D'après (18), β_2 est alors permutée transitivement par $H_{\beta_0\beta_1}$ avec toutes les lettres pour lesquelles un des indices $x_2, \ldots, x_n$ est $\not\equiv 0 \pmod{p}$. De plus, une substitution S de $H_{\beta_0\beta_1}$ ne peut laisser immobiles toutes les lettres (15), par suite les lettres que $H_{\beta_0\beta_1}$ permute avec β_2, sans se réduire à l'unité.

Si γ_2 est une lettre déplacée par $H_{\beta_0\beta_1}$ et n'appartenant pas à la première catégorie, les substitutions de $H_{\beta_0\beta_1\gamma_2}$, ou bien laissent immobile une autre lettre de la première catégorie, ou bien déplacent toutes les lettres de cette catégorie, c'est-à-dire sont de classe au moins égale à $p^{\mu n}\left(1-\frac{1}{p^{n-1}}\right)$. Une substitution de $H_{\beta_0\beta_1}$ ne peut ainsi être de classe inférieure à

$$p^{\mu n}\left(1-\frac{1}{p^{n-1}}\right), \tag{19}$$

que si elle appartient à un groupe semblable à $H_{\beta_0\beta_1\beta_2}$, qu'il nous suffira de considérer pour avoir la classe de L. D'ailleurs. à cause de (16), $H_{\beta_0\beta_1}$ est bien de classe $\leqq p^{\mu n} - p^{\mu n-1} < p^{\mu n} - p^{\mu n-n+1}$, si $\mu n - 1 > \mu n - n + 1$, ou $n > 2$ (¹).

On continuera de la sorte.

Admettons qu'on arrive ainsi à montrer, si la lettre β_i a tous ses indices nuls, sauf $x_i \equiv 1 \pmod{p^\mu}$: 1° que $H_{\beta_0\beta_1\beta_2\ldots\beta_i}$ permute exclusivement entre elles les lettres pour lesquelles $x_1, \ldots, x_i$ étant arbitraires, les autres indices sont $\equiv 0 \pmod{p}$, lettres en nombre $p^{(\mu-1)(n-i)+\mu i}$, et qui ne comprennent pas β_{i+1}; 2° que β_{i+1} est permuté transitivement par $H_{\beta_0\ldots\beta_i}$ avec l'ensemble E_{i+1} de toutes les lettres pour lesquelles un des indices $x_{i+1}, \ldots, x_n$ est $\not\equiv 0 \pmod{p}$; 3° qu'aucune substitution de $H_{\beta_0\ldots\beta_i}$ ne peut laisser immobiles toutes les lettres de E_{i+1} sans se réduire à l'unité. Enfin une substitution de $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_i}$ ne peut être de classe inférieure à

$$p^{\mu n}\left(1-\frac{1}{p^{n-i}}\right), \tag{20}$$

que si elle appartient à un groupe semblable à $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{i+1}}$, qu'il nous suffira de considérer pour avoir la classe de L, cette classe, à cause de (16), ne pouvant être supérieure à (20).

Nous classerons dans la première catégorie de $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{i+1}}$ les lettres que ce

(¹) Quand $n = 2$, $H_{\beta_0\beta_1\beta_2} = 1$; $H_{\beta_0\beta_1}$ est de classe à la fois au plus et au moins égale à $p^{2\mu} - p^{2\mu-1}$, c'est-à-dire précisément de classe $p^{2\mu} - p^{2\mu-1}$.

groupe permute avec β_{i+2}. Les substitutions de $H_{\beta_0\ldots\beta_{i+1}}$ sont de la forme

$$(21)\qquad \left|\begin{array}{ll} x_1 & x_1+a_1^{i+3}x_{i+3}+\ldots+a_1^n x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i+2} & x_{i+2}+a_{i+2}^{i+3}x_{i+3}+\ldots+a_{i+2}^n x_n \\ x_{i+3} & a_{i+3}^{i+3}x_{i+3}+\ldots+a_{i+3}^n x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & a_n^{i+3}x_{i+3}+\ldots+a_n^n x_n \end{array}\right| \quad (\mathrm{mod}\, p^\mu).$$

Leur nombre est

$$\Omega(p^{\mu(n-i-2)})p^{\mu(n-i-2)(i+2)}.$$

β_{i+2} est alors permutée par $H_{\beta_0\ldots\beta_{i+1}}$ avec

$$B_{i+2}=\frac{\mathcal{H}_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{i+1}}}{\mathcal{H}_{\beta_0\ldots\beta_{i+2}}}=\frac{\Omega(p^{\mu(n-i-1)})p^{\mu(n-i-1)(i+1)}}{\Omega(p^{\mu(n-i-2)})p^{\mu(n-i-2)(i+2)}}.$$

Or, d'après (14) et la page 304,

$$\Omega(p^{\mu(n-i-1)})=(p^\mu, n-i-1)\,p^{\mu(n-i-2)}\,\Omega(p^{\mu(n-i-2)}),$$

$$(p^\mu, n-i-1)=p^{\mu(n-i-1)}\left(1-\frac{1}{p^{n-i-1}}\right),$$

$$B_{i+2}=p^\lambda\left(1-\frac{1}{p^{n-i-1}}\right),$$

$$\begin{aligned}\lambda&=\mu(n-i-1)(i+1)-\mu(n-i-2)(i+2)+\mu(n-i-2)+\mu(n-i-1)\\ &=\mu(i+1)+\mu(n-i-1)=\mu n,\end{aligned}$$

$$(22)\qquad B_{i+2}=p^{\mu n}\left(1-\frac{1}{p^{n-i-1}}\right).$$

D'autre part, $H_{\beta_0\ldots\beta_{i+1}}$ permute exclusivement entre elles les lettres pour lesquelles $x_1, \ldots, x_{i+1}$ étant arbitraires, les autres indices sont $\equiv 0 \pmod p$, lettres en nombre

$$(23)\qquad p^{\mu(i+1)+(\mu-1)(n-i-1)}=p^{(\mu-1)n+i+1}$$

et qui ne comprennent pas β_{i+2}. Il résulte de (22) et (23) que $H_{\beta_0\ldots\beta_{i+1}}$ permute transitivement β_{i+2} avec l'ensemble E_{i+2} des lettres pour lesquelles un des indices $x_{i+2}, \ldots, x_n$ est $\not\equiv 0 \pmod p$. Enfin, aucune substitution de $H_{\beta_0\ldots\beta_{i+1}}$ ne peut laisser immobiles toutes les lettres de E_{i+2} sans se réduire à l'unité et, par suite, ou bien est de classe au moins égale à

$$(22)\qquad p^{\mu n}-p^{\mu n-n+i+1},$$

ou bien appartient à un groupe semblable à $H_{\beta_0\ldots\beta_{i+1}}$, qu'il nous suffit de considérer, sous la condition que ce groupe soit de classe $\leqq p^{\mu n} - p^{\mu n - n + i + 1}$.

Il est ainsi établi, en général, que le raisonnement peut se continuer tant que $i + 2 \leqq n$. Supposons $i + 2 = n$.

$H_{\beta_0\ldots\beta_n}$ se réduit à l'unité : $H_{\beta_0\ldots\beta_{n-1}}$ déplace toutes les lettres de E_n et ne peut être de classe inférieure à

$$p^{\mu n} - p^{\mu n - 1} = p^{\mu n}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Les substitutions de $H_{\beta_0\ldots\beta_{n-1}}$ sont de la forme

$$U = |x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n;\ x_1 + a_1^n x_n, \ldots, x_{n-1} + a_{n-1}^n x_n, a_n^n x_n| \qquad (\mathrm{mod}\,p^\mu),$$

avec la condition $a_n^n \not\equiv 0 \pmod{p}$. Parmi elles, il y a la substitution (16), qui laisse invariables $p^{\mu n - 1}$ lettres exactement et déplace la lettre $(0, \ldots, 0, 1)$. On en conclut, d'une part, que $H_{\beta_0\ldots\beta_{n-1}}$ ne peut être de classe inférieure à $p^{\mu n} - p^{\mu n - 1}$, d'autre part qu'il ne peut être de classe supérieure; donc il est de classe $p^{\mu n} - p^{\mu n - 1}$.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème IV. — *Le groupe linéaire général de degré $p^{\mu n}$ à n indices* $(\mathrm{mod}\,p^\mu)$, *p étant un nombre premier quelconque, est de classe $p^{\mu n} - p^{\mu n - 1}$.*

Nous allons compléter ce théorème en donnant quelques indications sur la classe des substitutions contenues dans ce groupe linéaire L.

D'après ce que nous avons vu (p. 306-307), $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_i}$ permute transitivement entre elles exactement $p^{\mu n}\left(1 - \frac{1}{p^{n-i}}\right)$ lettres de sa première catégorie. Une substitution de $H_{\beta_0\ldots\beta_i}$ déplace donc ces $p^{\mu n} - p^{(\mu-1)n+i}$ lettres, ou est semblable à une substitution de $H_{\beta_0\ldots\beta_{i+1}}$.

$H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_i}$ permute transitivement entre elles, exactement, $p^{\mu n} - p^{\mu n - n + i}$ lettres de sa première catégorie. Une substitution de $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_i}$ qui ne déplace pas toutes ces lettres est semblable à une substitution de $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{i+1}}$. Considérons une substitution S de $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_i}$ qui les déplace toutes :

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + a_1^{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_1^n x_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ x_i & x_i + a_i^{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_i^n x_n \\ x_{i+1} & a_{i+1}^{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_{i+1}^n x_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ x_n & a_n^{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_n^n x_n \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{mod}\,p^\mu).$$

S peut laisser immobiles certaines des lettres λ pour lesquelles $x_1, \ldots, x_i$ sont

arbitraires, les autres indices $\equiv 0 \pmod p$, en nombre $p^{\mu n-n+i}$, lettres qui n'appartiennent pas à la première catégorie de $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_i}$. On les détermine, si $x_{i+1}=\xi_{i+1}p, \ldots, x_n=\xi_n p$, par les congruences

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1^{i+1}\xi_{i+1}+\ldots+a_1^n\xi_n\equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^{i+1}\xi_{i+1}+\ldots+(a_n^n-1)\xi_n\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p^{\mu-1}}.$$

Si ces congruences ont θ systèmes de solutions en $\xi_{i+1}, \ldots, \xi_n$, le nombre de ces lettres est $p^{\mu i}\theta$. S déplace ainsi $p^{\mu n}-p^{\mu i}\theta$ lettres.

D'autre part, ces congruences (24) donnent aussi le nombre $p^{(\mu-1)i}\theta$ de lettres laissées immobiles par la substitution

$$\Sigma=\left|\begin{array}{ll} \xi_1 & \xi_1+a_1^{i+1}\xi_{i+1}+\ldots+a_1^n\xi_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_i & \xi_i+a_i^{i+1}\xi_{i+1}+\ldots+a_i^n\xi_n \\ \xi_{i+1} & \quad a_{i+1}^{i+1}\xi_{i+1}+\ldots+a_{i+1}^n\xi_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n & \quad a_n^{i+1}\xi_{i+1}+\ldots+a_n^n\xi_n \end{array}\right| \pmod{p^{\mu-1}}.$$

Soit $\Theta_{i,\mu}$ l'expression la plus générale du nombre de lettres déplacées par une substitution quelconque de $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_i}$; $p^{(\mu-1)n}-p^{(\mu-1)i}\theta$ est de la forme $\Theta_{i,\mu-1}$ et le nombre de lettres déplacées par S est compris dans la forme $p^{\mu n}-p^{\mu n-n+i}+p^i\Theta_{i,\mu-1}$. Le nombre de lettres déplacées par une substitution de $H_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{i+1}}$ analogue à S est compris dans la forme

$$p^{\mu n}-p^{\mu n-n+i+1}+p^{i+1}\Theta_{i+1,\mu-1}.$$

Etc.,

Finalement $\Theta_{i,\mu}$ est compris dans la forme $p^{\mu n}-p^{\mu n-n+j}+p^j\Theta_{j,\mu-1}$, où $j=i, i+1, \ldots,$ ou n. On en conclut que $\Theta_{0\mu}$ est compris dans la forme

$$p^{\mu n}-p^{(\mu-k)n+j_1+j_2+\ldots+j_k}+p^{j_1+j_2+\ldots+j_k}\Theta_{j_k,\mu-k}$$

où $j_1=0, 1, \ldots,$ ou n; $j_2=j_1, j_1+1, \ldots,$ ou n; ...; $j_k=j_{k-1}, j_{k-1}+1, \ldots,$ ou n, car on établit, de suite, cette formule exacte pour $k=1$, pour des valeurs de k croissantes. Finalement, puisque $\Theta_{j_{\mu-1},1}=p^n-p^{j_\mu}$, avec $j_\mu=j_{\mu-1}, j_{\mu-1}+1, \ldots,$ ou n, $\Theta_{0,\mu}$ est compris dans la forme

$$p^{\mu n}-p^{j_1+j_2+\ldots+j_\mu}.$$

Si nous prenons $j_\mu=j_{\mu-1}=\ldots=j_{m+1}=n$, j_m quelconque $=0, 1, 2, \ldots,$ ou n, $j_1=j_2=\ldots=j_{m-1}=0$, ce qui est possible, $j_1+\ldots+j_\mu=(\mu-m)n+j_m$

est un quelconque des nombres o à μn. Finalement, $\Theta_{0\mu}$ est compris dans la forme $p^{\mu n} - p^{\eta}$ où $\eta = 0, 1, 2, \ldots,$ ou $\mu n - 1$.

Le maximum est bien $p^{\mu n} - 1$ et le minimum $p^{\mu n} - p^{\mu n - 1}$.

D'autre part, H_{β_0} est transitif entre toutes les lettres de la première catégorie, c'est-à-dire entre toutes les lettres dont un indice est premier à p, lettres qu'il permute exclusivement entre elles; mais H_{β_0} qui contient la substitution

$$| x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n | \qquad (\text{mod}\, p^{\mu}),$$

remplace $(0, p, 0, \ldots, 0)$ par $(p, p, 0, \ldots, 0)$ et n'est pas transitif entre les lettres qu'il déplace.

On a ainsi ce théorème :

Théorème V. — *Le groupe linéaire général non homogène de degré* $p^{\mu n}$ *à n indices* (mod p^{μ}) *ne peut contenir que des substitutions déplaçant* $p^{\mu n}$ *ou*

$$P = p^{\mu n} - p^{\eta} \text{ lettres}$$

avec $\eta = 0, 1, 2, \ldots,$ *ou* $\mu n - 1$ (¹).

Le groupe linéaire général non homogène n'est ni deux fois complètement, ni deux fois incomplètement transitif, quand $\mu > 1$. *Il est imprimitif* (²).

On en déduira facilement la classe des substitutions d'ordre 2 que peut renfermer le groupe. Il suffira de faire $P \equiv 0 \pmod 2$.

Supposons, en particulier, $\mu = 2$:

$$P = p^{2n} - p^{\eta}.$$

P est pair quand p est impair, mais ne peut être égal à p^{2n}; si $p = 2$, P n'est pair que si $\eta \geqq 1$.

Nous obtenons ainsi, à titre d'exemple d'application du théorème I, le corollaire suivant :

Corollaire. — *Une équation de degré* p^{2n}, *et dont le groupe est contenu dans le groupe linéaire* (mod p^2) *à n indices a :*

1° *Si* $p > 2$, *ou* $p^{2n} - p^{\eta} < p^{2n}$ $(\eta = 0, 1, 2, \ldots,$ *ou* $2n - 1)$ *racines imaginaires;*

2° *Si* $p = 2$, 0 *ou* $2^{2n} - 2^{\eta}$ $(\eta = 0, 1, 2, \ldots,$ *ou* $2n - 1)$ *racines imaginaires.*

(¹) Ce qui précède ne prouve d'ailleurs pas qu'il en contient effectivement de chacune de ces classes, sauf de la classe $p^{\mu n} - p^{\mu n - 1}$. La formule du théorème V perfectionne une formule indiquée par nous dans les *Comptes rendus,* 11 avril 1904, p. 891.

(²) Jordan, *Traité,* p. 110.

VI.

LES SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2 DANS LE GROUPE LINÉAIRE.

On peut perfectionner les énoncés du paragraphe précédent en ce qui concerne la classe des substitutions d'ordre 2.

Quand on applique le théorème I, on est, en effet, conduit à n'envisager, dans le groupe G, que les substitutions d'ordre 2. Supposons déterminées les classes des substitutions du groupe G, $\mu_1, \mu_2, \ldots$. Les substitutions d'ordre 2 de G ne pourront avoir comme classe que ceux des nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots$ qui sont pairs : soient $2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots$ ces nombres.

Si, de plus, nous avons pu établir par un procédé quelconque que G ne contient que des substitutions paires, c'est-à-dire ([1]) équivalentes à un nombre pair de transpositions, les substitutions d'ordre 2 de G seront formées d'un nombre pair de cycles, c'est-à-dire sont de classe multiple de 4. Finalement les substitutions d'ordre 2 de G ne pourront avoir comme classe que ceux des nombres $2\lambda_1$, $2\lambda_2, \ldots$ qui sont multiples de 4, $4\lambda'_1, 4\lambda'_2, \ldots$.

Cherchons à appliquer cette remarque aux groupes linéaires. D'après un théorème de M. Jordan ([2]), nous savons que le groupe linéaire homogène à n indices est dérivé :

1° Des substitutions

$$g = | x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n;\ x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j;\ x_{i+1}, \ldots, x_n | \qquad (\mathrm{mod}\, m);$$

2° Des substitutions

$$g' = | x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n;\ x_1, \ldots, x_{n-1}, cx_n | \qquad (\mathrm{mod}\, m),$$

où c est un quelconque des nombres premiers à m.

La première, g, de ces substitutions laisse invariables, exactement, les lettres pour lesquelles $x_j \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, m)$, en nombre m^{n-1}. Sa classe est

$$m^n - m^{n-1} = m^{n-1}(m-1).$$

Son ordre est m.

La deuxième, g', laisse invariables les lettres telles que $(c-1)x_n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, m)$. Soit δ le plus grand diviseur de $c-1$ et m :

$$\frac{c-1}{\delta} x_n \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \frac{m}{\delta}\right);$$

([1]) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, 5e édition, 1885, p. 273-277.

([2]) *Traité des substitutions*, p. 93.

x_n a δ valeurs distinctes multiples de $\frac{m}{\delta}$, et la substitution g' en question laisse exactement δm^{n-1} lettres immobiles, c'est-à-dire est de classe

$$m^n - \delta m^{n-1} = m^{n-1}(m - \delta);$$

δ peut prendre ici une quelconque des valeurs des diviseurs de m qui sont $< m$.

Supposons d'abord m premier $= p$; $\delta = 1$. La classe des substitutions g, g', *génératrices* du groupe, est $p^{n-1}(p-1)$: c'est aussi (théorème III, p. 299) la classe du groupe. L'ordre de g est p, celui de g' est un des diviseurs, quelconque, δ' de $p - 1$.

Si $p = 2$, cette classe, 2^{n-1}, est toujours multiple de 4 quand $n \geqq 3$; $g' = 1$ et ordre de $g = 2$.

Lemme. — *Le groupe linéaire* (mod 2) *à* n *indices* ($n \geqq 3$) *ne contient que des substitutions paires. En particulier, il ne contient pas* [1] *de substitution d'ordre* 2 *et de classe* $2^n - 2$.

Nous allons encore traiter le cas des substitutions d'ordre 2 du groupe linéaire (mod p), ($p > 2$).

Si l'on se reporte à la forme canonique des substitutions linéaires (mod p) indiquée par M. Jordan [2] et à la détermination de l'ordre d'une substitution linéaire de forme canonique donnée, on voit que les quantités $k_0, k_1, \ldots,$ qui y figurent, devraient satisfaire [formule (4) de la page 127 du *Traité des substitutions* de M. Jordan] à $k_0^2 \equiv k_1^2 \equiv \ldots \equiv 1$ (mod p), ce qui donne $k_0, k_1, \ldots, \equiv \pm 1$ (mod p); les autres relations (4), du même Traité, étant impossibles, montrent que la forme canonique est

$$| y_1, \ldots, y_n;\ \varepsilon_1 y_1, \ldots, \varepsilon_n y_n | \qquad (\text{mod } p)$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont égaux à ± 1. Les quantités $k_0, k_1, \ldots,$ *étant réelles, on peut ramener une substitution linéaire d'ordre* 2 (mod p) *à sa forme canonique par une transformation d'indices réelle; toute substitution* [3] *linéaire d'ordre* 2 *est semblable à la substitution*

$$g'' = | x_1, \ldots, x_n;\ \varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n | \qquad (\text{mod } p)$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *sont égaux à* ± 1.

---

(1) Ceci résulte d'ailleurs du fait que le groupe linéaire homogène à n indices (mod 2) est simple pour $n \geqq 3$ (Jordan, *Traité des substitutions*, p. 106).

(2) *Traité des substitutions*, p. 126.

(3) *Comp.* notre Thèse de Doctorat, p. 86.

Il ne nous reste plus qu'à voir dans quels cas, parmi les substitutions g'', il y a des substitutions impaires.

Si k des quantités $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont $= -1$, nous pourrons toujours supposer que ce sont les k premières, et

$$g'' = | x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n; \; -x_1, \ldots, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n | \pmod{p}.$$

Cette substitution d'ordre 2 laisse immobiles exactement les lettres telles que

$$x_1 \equiv \ldots \equiv x_k \equiv 0,$$

en nombre p^{n-k}, et renferme $\frac{1}{2}(p^n - p^{n-k}) = p^{n-k}\frac{p^k-1}{2}$ cycles de 2 lettres. Cette substitution est de classe $p^n - p^{n-k}$ ($k = 1, 2, \ldots,$ ou n); elle sera donc impaire à la condition nécessaire et suffisante que

$$\frac{p^k-1}{2} = 2\lambda + 1, \qquad p^k - 1 \equiv 2 \pmod{4},$$

$$p^k \equiv 3 \equiv -1 \pmod{4},$$

ce qui exige k impair et $p = 4h - 1$; quand $p = 4h + 1$, au contraire, on n'a que des substitutions paires d'ordre 2.

Théorème. — *Les substitutions d'ordre 2 d'un groupe linéaire* (mod$p$) ($p > 2$) *à n indices sont paires quand $p = 4h + 1$, paires ou impaires quand $p = 4h - 1$. Il y en a de chacune des classes $p^{n-k}(p^k - 1)$ ($k = 1, 2, \ldots,$ ou n).*

La première partie de ce théorème peut d'ailleurs s'établir plus simplement : la substitution g' pour $c = -1$ est d'ordre 2 à $p^{n-1}\frac{p-1}{2}$ cycles et est impaire quand $p = 4h - 1$; d'autre part, quand $p = 4h + 1$, les seules classes possibles sont (théorème III, p. 299) multiples de 4, et les substitutions d'ordre 2 sont toutes paires.

Mais on peut appliquer au groupe linéaire homogène (mod 2) un raisonnement semblable : en effet, d'après la forme canonique des substitutions de ce groupe (*Traité des substitutions* de M. Jordan, p. 127), $k_0^2 \equiv k_1^2 \equiv \ldots \equiv 1$, $2k_0^2 \equiv 2k_1^2 \equiv \ldots \equiv 0$, les autres relations (4) de M. Jordan étant impossibles. La moitié des indices d'une substitution d'ordre 2 du groupe linéaire homogène (mod 2) au moins, doit rester invariable, c'est-à-dire a toujours la forme

$$g'' = | x_1, \ldots, x_n; \; x_1, x_2 + x_1, x_3, x_4 + x_3, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k} + x_{2k-1}, x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_n | \pmod{2},$$

les indices pouvant encore être supposés réels, puisque $k_0 \equiv k_1 \equiv \ldots \equiv 1 \pmod 2$). Autrement dit (JORDAN, *Journal de Mathématiques,* 1872, p. 351-357) :

Toute substitution linéaire homogène d'ordre $2 \pmod 2$ *à* n *indices est semblable à la substitution*

$$g''' = |\, x_1, \ldots, x_n;\ x_1, x_2 + x_1, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k} + x_{2k-1}, x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_n \,| \pmod 2,$$

et de classe $2^n - 2^{n-k}\left[k = 1, 2, \ldots, \text{ou } \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)\right]$.

Cette substitution g''' laisse invariables les lettres d'indices

$$x_1 \equiv x_3 \equiv \ldots \equiv x_{2k-1} \equiv 0 \pmod 2,$$

c'est-à-dire est de classe $2^n - 2^{n-k}\left[k = 1, 2, \ldots, \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)\right]$; il existe toujours des substitutions d'ordre 2 pour chacune de ces $\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$ valeurs de k.

Examinons encore le cas où $m = 2^\nu (\nu > 1)$, et voyons si le groupe linéaire homogène $(\bmod 2^\nu)$ contient des substitutions impaires d'ordre 2, en étudiant les substitutions g et g'.

Parité de g. — g est de classe $2^{\nu(n-1)}(2^\nu - 1)$; son ordre est 2^ν. Si $x_j = 2^\varphi \xi$, où $\varphi < \nu$, ξ impair, g remplace x_i par $x_i + 2^\varphi \xi$, $x_i + 2^\varphi \xi$ par $x_i + 2 . 2^\varphi \xi, \ldots$, $x_i + a . 2^\varphi \xi$ par $x_i + (a+1) 2^\varphi \xi, \ldots$, c'est-à-dire que g comprend $2^{\nu(n-2)}$ cycles de $2^{\nu-\varphi}$ lettres correspondant à $x_j = 2^\varphi \xi$, et à une même valeur de x_i, d'où

$$2^{\nu(n-2)} \frac{2^{\nu-\varphi}}{2} \frac{2^\nu}{2^{\nu-\varphi}} = 2^{\nu(n-1)-1}$$

cycles de $2^{\nu-\varphi}$ lettres correspondant à l'ensemble des lettres pour lesquelles x_j est divisible par 2^φ sans l'être par $2^{\varphi+1}$. Ces cycles équivalent, comme on sait, à

$$2^{\nu(n-1)-1}(2^{\nu-\varphi} - 1)$$

transpositions.

Il est, en général, inutile de calculer à combien de transpositions équivaut g : nous savons que g est une substitution paire dès que

$$\nu(n-1) - 1 \geqq 1, \qquad \nu(n-1) \geqq 2,$$

ce qui a lieu dès que $n \geqq 3$ ou $n = 2$, $\nu \geqq 2$.

Si $n = 1$, $\nu = 2$, G est un groupe de degré 4 à un seul indice

$$|x, ax + b| \quad (\bmod 4).$$

La substitution $|x, -x|$ (mod 4) est d'ordre et de classe 2, par suite impaire.

Parité de g'. — En général, on remarquera que g' permute entre elles les lettres pour lesquelles $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ont mêmes valeurs : si g' opère une substitution circulaire d'ordre a entre les lettres correspondant à un certain système de valeurs de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, et aux valeurs $x'_n, x''_n, \ldots, x_n^{(a)}$ de x_n, g' opère une substitution circulaire de même ordre a entre les lettres qu'on déduit de celles-là en donnant à $x_1, \ldots, x_{n-1}$ des valeurs quelconques : l'ensemble de ces substitutions circulaires équivaut alors à $(a-1)2^{\nu(n-1)}$ transpositions. Donc g' équivaut à

$$2^{\nu(n-1)}\Sigma(a-1)$$

transpositions : quand $n > 1$, ce nombre est pair, et g' est paire.

Au contraire, si $n = 1$

$$g' = |x_1, -x_1| \quad (\bmod 2^\nu)$$

est d'ordre 2 et laisse immobiles exactement les lettres telles que $x_1 \equiv -x_1$ (mod 2^ν), c'est-à-dire 0, $2^{\nu-1}$; donc g' déplace $2^\nu - 2$ lettres et est une substitution impaire.

Nous conclurons ce théorème :

Théorème. — *Le groupe linéaire* (mod 2^ν) ($\nu > 1$) *à n indices ne contient que des substitutions paires quand $n > 1$. Il en est différemment pour $n = 1$.*

VII.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Le rapprochement du théorème I, de la remarque III du théorème II, des théorèmes III, IV et V et de leurs corollaires nous donne dès lors, de suite, un certain nombre de propriétés géométriques.

Ainsi (p. 295), le groupe de l'équation aux points d'inflexion des courbes du troisième degré est contenu dans le groupe linéaire non homogène (mod 3) à 2 indices, dont la classe est 6 (théorème III) : donc

I. — *Si un des points d'inflexion d'une cubique (à coefficients réels) est*

imaginaire, 6 ou 8 des points d'inflexion de la cubique sont imaginaires (¹).

L'équation aux 4^6 cubiques ayant en trois points un contact du troisième ordre avec une quartique générale a son groupe contenu dans le groupe linéaire non homogène (mod 4) à 6 indices (p. 297). D'après le corollaire du théorème V et le théorème IV (et la page 315).

II. — *Parmi les 4^6 cubiques ayant en 3 points un contact du troisième ordre avec une quartique générale (réelle) il y en a* 0 *ou* 4^6 *ou* $4^6 - 2^\eta$ ($\eta = 2, 3, \ldots,$ *ou* 11) *qui sont imaginaires.*

En particulier, s'il y en a une imaginaire, $2^{11} = \frac{1}{2} 4^6$ *au moins sont imaginaires.*

L'équation aux $3^6 - 1$ systèmes de cubiques (p. 298) ayant en 4 points un contact du deuxième ordre avec une quartique générale a son groupe contenu dans le groupe linéaire homogène (mod 3) à 6 indices. Choisissant, parmi ces cubiques, celles qui ont, en particulier, un point réel déterminé de contact sur la quartique, nous déduisons des théorèmes I et III le résultat suivant :

III. — *Parmi les $3^6 - 1$ cubiques ayant en 4 points, dont un réel arbitrairement choisi, un contact du deuxième ordre avec une quartique générale (réelle), si une est imaginaire, il y en a*

$$3^6 - 3^5, \quad 3^6 - 3^4, \quad \ldots, \quad 3^6 - 3 \quad \text{ou} \quad 3^6 - 1$$

qui sont imaginaires.

En particulier, s'il y en a une imaginaire, $3^6 - 3^5 = \frac{2}{3} 3^6$ *au moins sont imaginaires.*

L'équation aux $2^6 - 1 = 63$ systèmes de coniques tangentes en 4 points à une quartique générale (p. 285 et 298) a son groupe contenu dans le groupe linéaire homogène (mod 2) à 6 indices. Raisonnant comme ci-dessus (d'après la page 314) :

IV. — *Parmi les $2^6 - 1 = 63$ coniques tangentes en 4 points, dont un réel choisi arbitrairement, à une quartique générale (réelle), si une est imaginaire,*

$$2^6 - 2^5 = 2^5 = 32, \quad 2^6 - 2^4 = 48 \quad \text{ou} \quad 2^6 - 2^3 = 56$$

sont imaginaires.

(¹) *Comparer* SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, 5ᵉ édition, 1885, p. 613. — SALMON, *Géométrie analytique* (*Courbes planes*), traduction Chemin, Paris, 1884, Chapitre V, en particulier Section III.

En particulier, si une est imaginaire, $2^5 = 32 = \frac{1}{2} 2^6$ *au moins sont imaginaires.*

V. — *Parmi* (¹) *les* 3^{20} *courbes du cinquième ordre ayant en* 10 *points un contact du second ordre avec une sextique générale (réelle), il y en a*

$$0, \quad 3^{20} - 3^{19}, \quad 3^{20} - 3^{18}, \quad \ldots, \quad 3^{20} - 3 \quad \text{ou} \quad 3^{20} - 1$$

qui sont imaginaires.

En particulier, si une est imaginaire, $3^{20} - 3^{19} = \frac{2}{3} 3^{20}$ *au moins sont imaginaires.*

VI. — *Parmi les* $4^2 = 16$ *plans* (²) *qui coupent une courbe gauche du quatrième ordre en* 4 *points consécutifs, s'il y en a d'imaginaires,* 8, 12 *ou* 16 *sont imaginaires.*

On pourrait évidemment multiplier ces exemples.

L'application du théorème I réussit encore dans des cas où il n'y a pas lieu à l'application des théorèmes II et suivants.

On sait (³) que les 16 plans tangents singuliers de la surface de Kummer dépendent d'une équation du seizième degré dont le groupe G est contenu dans le groupe linéaire non homogène de degré 16 à 4 indices (mod 2). De plus, le groupe G est dérivé de 6 substitutions (substitutions A, B, C, D, E, F de M. Jordan) toutes paires. D'après le théorème III, les substitutions d'ordre 2 de G, qui doivent être paires, par suite déplacer $4h$ lettres, ne pourront être que des classes 8, 12 ou 16.

Des propriétés semblables ont lieu pour les 16 points singuliers de la surface de Kummer : les 16 points étant 6 à 6 dans les plans tangents singuliers, on peut leur appliquer les raisonnements que M. Jordan applique aux plans tangents singuliers.

VII. — *Parmi les* 16 *plans tangents singuliers de la surface de Kummer, il y en a* 0, 8, 12 *ou* 16 *qui sont imaginaires; de même parmi les* 16 *points singuliers de cette surface.*

Il est encore intéressant d'utiliser la méthode générale indiquée au début du paragraphe V pour déterminer la classe des substitutions d'ordre 2 du groupe G

(¹) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 308.

(²) *Id.*, p. 308. Le groupe correspondant contient effectivement des substitutions d'ordre 2 et de classe 8 ou 12.

(³) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 313.

qui contient celui de l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième degré, et est dérivé des substitutions A, B, C, D, E, F de M. Jordan (*Traité*, p. 316).

G est transitif entre les 27 lettres $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u'$. Les catégories (10) se réduisent à une. Il suffit de déterminer la classe de H_a.

H_a permute transitivement entre elles, d'une part,

$$b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g, \quad h, \quad i, \quad k, \quad l,$$

c'est-à-dire les 10 lettres qui figurent avec a dans un même trio du Tableau des 45 triangles (1), d'autre part les 16 autres lettres de G,

$$m, \quad n, \quad p, \quad \ldots, \quad u',$$

comme on le vérifie en considérant successivement les 15 substitutions

$\mathrm{DECD}^2 = (mn \ \ldots)\ldots,$	$\mathrm{DECB} = (mn' \ldots)\ldots,$
$\mathrm{DE} = (mp \ \ldots)\ldots,$	$\mathrm{D}^2\mathrm{B} = (mp' \ldots)\ldots,$
$\mathrm{DC}^2 = (mq \ \ldots)\ldots,$	$\mathrm{DECBDE} = (mq' \ldots)\ldots,$
$\mathrm{D}^2 = (mr \ \ldots)\ldots,$	$\mathrm{DEB}^2 = (mr' \ldots)\ldots,$
$\mathrm{DEC}^2 = (ms \ \ldots)\ldots,$	$\mathrm{DECBD}^2 = (ms' \ldots)\ldots,$
$\mathrm{D} = (mt \ \ldots)\ldots,$	$\mathrm{DEB} = (mt' \ldots)\ldots,$
$\mathrm{DEC} = (mu \ \ldots)\ldots,$	$\mathrm{DECBD} = (mu' \ldots)\ldots.$
$\mathrm{DEB}^2\mathrm{D} = (mm' \ldots)\ldots,$	

Pour déterminer la classe de H_a, il suffira de déterminer celle des groupes H_{ab} et H_{am}.

Premier cas : *Groupe* H_{ab}. — abc est laissé immobile par H_{ab}, en sorte que $H_{ab} = H_{abc}$ ($H_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}$ est le groupe des substitutions de G qui laissent α_1, α_2, α_3, ... immobiles). L'ordre $\mathcal{H}_{ab}$ de H_{ab} est

$$\frac{\mathcal{G}}{27.10} = 8.24.$$

H_{abc} peut déplacer une quelconque des 24 autres lettres. H_a permutant exclusivement entre elles $b, c, \ldots, l$ d'une part, $m, n, \ldots, u'$ d'autre part, il en est de même de H_{abc}.

(1) Le dixième triangle du Tableau de M. Jordan est $cm'n'$ et non $cm'n$.

H_{abc} permute transitivement

$$d,\quad h,\quad k,\quad g,\quad f,\quad i,\quad l,\quad e,$$

comme le montrent les substitutions C, D, E, ED, DC. De même, il permute transitivement $m, n, \ldots, u$ d'une part, $m', n', \ldots, u'$ d'autre part.

Les catégories (10) correspondant à H_{abc} seront alors représentées ici par les groupes

$$H_{abcd},\quad H_{abcm},\quad H_{abcm'}.$$

D'où 3 sous-cas à distinguer.

Premier sous-cas : H_{abcd}. — Comme l'a montré M. Jordan, et comme on le voit de suite,

$$H_{abcd} = H_{abcde}$$

et

$$\mathcal{H}_{abcde} = \frac{8.24}{8} = 24.$$

Opérons sur H_{abcde} comme nous l'avons déjà fait sur G et ses sous-groupes : H_{abcde} contient D, E, F, et en est évidemment dérivé, car on vérifie que le groupe dérivé des substitutions opérées par D, E, F entre m, p, r, t est le groupe symétrique de 4 éléments.

Formons les catégories analogues à (10). H_{abcde} permute transitivement

$$f,\quad g,\quad h,\quad i,\quad k,\quad l;$$

$$m,\quad p,\quad r,\quad t;$$

$$m',\quad p',\quad r',\quad t';$$

$$n,\quad q,\quad s,\quad u;$$

$$n',\quad q',\quad s',\quad u'.$$

Il suffit de considérer les sous-groupes suivants :

H_{abcdef}, d'ordre 4, qui contient F et DEDF de classe 12, DED de classe 20, et est de classe 12; H_{abcdem}, d'ordre 6, dérivé de E et F, et dont la classe est évidemment 12;

$$H_{abcdem'} = H_{abcdem} = H_{abcden} = H_{abcden'}.$$

Deuxième sous-cas : $H_{abcm} = H_{abcmn}$. — Il est encore d'ordre 24, et contient les substitutions C, E, F dont il est dérivé.

Formons les catégories analogues à (10). H_{abcmn} permute transitivement

$$\begin{array}{cccccc} & d, & h, & k, & f; & \\ & e, & i, & l, & g; & \\ p, & q, & r, & s, & t, & u; \\ & m', & s', & u', & q'; & \\ & n', & r', & t', & p'. & \end{array}$$

Appliquant la condition (A) (p. 299), nous n'avons à considérer que

H_{abcmnu} d'ordre 4,

$H_{abcmnm'}$ d'ordre 6

ou

$H_{abcmnn'}$ d'ordre 6.

$H_{abcmnm'}$ est dérivé de E et F et contient 1, E, E^2, F, $E^{-1}FE$, $E^{-2}FE^2$; sa classe est 12 :

$$H_{abcmnn'} = H_{abcmnm'}.$$

Enfin H_{abcmnu} laisse t immobile, et contient

$$CE = (dk)(hf)(el)(ig)(m'u')(s'q')(pq)(rs)(n't')(p'r') \quad \text{de classe } 20,$$

$$C^{-1}FC = (dk)(el)(t'n')(m'u')(qr)(ps)$$

et

$$CE.C^{-1}FC = (fh)(gi)(q's')(p'r')(pr)(qs) = EFE^{-1}.$$

H_{abcmnu} est de classe 12.

Troisième sous-cas : $H_{abcm'} = H_{abcm'n'}$. — Il est encore d'ordre 24 et contient E et F. $H_{abcm'}$ contient également

$$K = (gd)(hk)(il)(ef)(np)(su)(mq)(rt)(r's')(t'u'),$$

par suite,

$$K^{-1}EK = (ekh)(dli)(ntr)(mus)(p's'u')(q'r't').$$

Nous considérerons le sous-groupe de celles des substitutions de $H_{abcm'n'}$ qui laissent une autre lettre immobile.

Si cette lettre est une des lettres d, e, f, g, h, i, k, l, le sous-groupe correspondant est semblable à un sous-groupe de H_{abcd}; on applique la condition (A) (p. 299). Si c'est une des lettres m, n, p, q, r, s, t, u, le sous-groupe correspondant est semblable à un sous-groupe de H_{abcm}; on applique encore la condition (A). Il suffit de considérer le cas où c'est une des lettres p', q', r', s', t', u'.

H_{amq} est dérivé de ces 3 substitutions, car $H_{amqp'}$ contient F et est d'ordre 2. Nous n'avons d'ailleurs à répartir en catégories que les 9 lettres précédentes.

Il suffit de considérer

$$H_{amqp} \quad \text{et} \quad H_{amqp'}.$$

$H_{amqp} = H_{amqpb}$ et est contenu dans H_{ab}; la condition (A) s'applique.

$H_{amqp'}$ se réduit aux substitutions 1 et F et est de classe 12.

Tous les cas sont ainsi épuisés, et nous voyons que la classe du groupe G de l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième degré est 12.

Mais on peut aussi déterminer les classes des substitutions d'ordre 2 contenues dans ce groupe G. D'abord G ne contient que des substitutions dérivées de A, B, C, D, E, F qui sont paires : ses substitutions d'ordre 2 auront leur classe multiple de 4 et déplaceront 12, 16, 20 ou 24 lettres. Nous avons rencontré une substitution d'ordre 2 et de classe 20 (p. 319); mais nous allons voir qu'il n'y a pas de classe 16.

S'il y avait une substitution de classe 16 et d'ordre 2, il y en aurait une dans le groupe H_a, par suite dans $H_{ab} = H_{abc}$, ou H_{am}.

1° Si c'était dans H_{abc}, il y en aurait une dans

$$H_{abcd} = H_{abcde}, \qquad H_{abcm} = H_{abcmn} \qquad \text{ou} \qquad H_{abcm'} = H_{abcm'n'}.$$

Si c'était dans H_{abcde}, ce groupe est dérivé de D, E, F, et déplace exactement 22 lettres; donc il y aurait une substitution de classe 16 dans H_{abcdef}, ce qui n'est pas, ou dans H_{abcdem} dérivé de E et de F, ce qui n'est pas.

Si c'était dans H_{abcmn}, ce groupe est dérivé de C, E, F et déplace exactement 22 lettres; donc il y aurait une substitution de classe 16 dans H_{abcmnu} dont les substitutions sont de classe 12 et 20, ou dans $H_{abcmnm'} = H_{abcmnn'}$ dérivé de E et F et dont les substitutions d'ordre 2 sont de classe 12.

Si c'était dans $H_{abcm'n'}$, ce groupe est dérivé de E, F et $K^{-1}EK$ et déplace encore exactement 22 lettres; donc il y aurait une substitution d'ordre 16 dans $H_{abcm'n'p'}$ dont les substitutions sont de classe 12 et 20.

Finalement H_{abc} ne contient pas de substitution de classe 16.

2° Si H_{am} en contenait une, il y en aurait une dans H_{amq}, dérivé de B, F et $E^{-1}C^{-1}FCE$, et qui déplace 24 lettres. Il y en aurait donc une dans $H_{amqp'}$ qui ne contient qu'une substitution de classe 12. H_{am} ne contient pas de substitution de classe 16.

Finalement G ne contient pas de substitution de classe 16, et nous obtenons, grâce au théorème I, ce résultat :

VIII. — *Le groupe de l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième*

degré est de classe 12; *ses substitutions d'ordre* 2 *déplacent* 24, 20 *ou* 12 *lettres. Cette équation possède* 3, 7, 15 *ou* 27 *racines réelles.*

Parmi les 27 *droites d'une surface du troisième degré, si* α *sont réelles,* α *est un des nombres* 3, 7, 15 *ou* 27 (¹).

Ce qui précède va encore nous donner une application dans la théorie des courbes du quatrième degré (c'est-à-dire des quartiques). On sait que ces courbes possèdent en général 28 tangentes doubles; le groupe G_2 de l'équation déterminant ces 28 tangentes est contenu dans un groupe Γ, dont le sous-groupe H formé des substitutions laissant une même lettre immobile coïncide avec le groupe de G de l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième degré. Γ est donc de classe 12, et ses substitutions d'ordre 2 déplacent 12, 20, 24 ou 28 lettres.

IX. — *Le groupe de l'équation aux* 28 *tangentes doubles des quartiques générales est de classe* 12; *ses substitutions d'ordre* 2 *déplacent* 28, 24, 20 *ou* 12 *lettres.*

Cette équation possède 0, 4, 8, 16 *ou* 28 *racines réelles.*

Parmi les 28 *tangentes doubles des quartiques générales, si* α *sont réelles,* α *est un des nombres* 0, 4, 8, 16 *ou* 28 (²).

On peut songer encore à faire application du théorème I à d'autres problèmes de contact, étudiés par Clebsch et à des équations corrélatives envisagées par M. Jordan (*Traité,* p. 329-333). Ces groupes sont :

1° Les deux groupes de Steiner, dont nous venons d'étudier un cas particulier (groupe de l'équation aux 28 tangentes doubles des quartiques générales);

2° D'autres groupes non linéaires (*Traité,* p. 331).

Ce qui précède pose le problème de la détermination de la classe de ces groupes et de celles des substitutions d'ordre 2 qui y sont contenues.

Nous nous contenterons de remarquer à ce sujet que le premier groupe $G^{(n)}$ de Steiner à $2n$ indices est dérivé (*Traité,* p. 231) de substitutions d'ordre 2 et de classe $2\mathfrak{A}_{n-1}$, où

$$\mathfrak{A}_n = 2^{2n-1} - 2^{n-1}.$$

Ces substitutions sont paires dès que

$$\mathfrak{A}_{n-1} = 2^{2n-3} - 2^{n-2} \equiv 0 \pmod 2,$$

(¹) Comparer, par exemple, d'Ocagne, *Nouvelles Annales,* 1895, p. 339 et suivantes. — L. Lévy, *id.,* p. 334 et suivantes.

(²) D'après Salmon, *Géométrie analytique* (*courbes planes*), traduction Chemin, Paris, 1884, p. 312, Zeuthen a montré qu'une quartique peut posséder exactement 4, 8, 16 ou 28 bitangentes réelles (*Math. Ann.,* t. VII, p. 411). Il resterait à voir si le groupe de l'équation contient des substitutions d'ordre 2 et de classe 28.

c'est-à-dire $n \geqq 3$. Il en sera, *a fortiori*, de même pour le second groupe de Steiner $G_1^{(n)}$ qui est contenu dans $G^{(n)}$. Donc :

X. — *Les deux groupes de Steiner à* $2n$ *indices, de degré* $\mathfrak{K}_n = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$, *ne contiennent que des substitutions paires, quand* $n \geqq 3$. *Une équation de même degré, dont le groupe est contenu dans un de ces groupes, a* $4h$ *racines imaginaires* (h *entier*).

Le théorème II est susceptible d'extensions au cas où la quantité r (p. 286) n'est pas un nombre premier, ni une puissance de nombre premier. Nous allons le vérifier sur un cas particulier.

On sait que les points (¹) où une conique a avec une cubique générale un contact du cinquième ordre sont déterminés par

$$u = \frac{2P + x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{6}, \tag{25}$$

ω_1 et ω_2 étant les périodes d'une fonction elliptique de paramètre u dépendant de la cubique, et x_1, x_2 des entiers prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5. Quand x_1, x_2 sont pairs simultanément, on obtient les points d'inflexion, au nombre de 9. Sur les 36 points (25), il y en a véritablement 27 de surosculation par une conique. Les 36 points dépendent d'une équation $X = 0$ du trente-sixième degré.

La condition nécessaire et suffisante pour que trois de ces points soient en ligne droite est que

$$x + x_1'' + x_1''' \equiv x_2' + x_2'' + x_2''' \equiv 0 \pmod 6. \tag{26}$$

Par exemple, les points d'inflexion pris 3 à 3 constituent un cas particulier des solutions de ces congruences; de même que les trois points de surosculation qui sont les points de contact des 3 tangentes issues d'un point d'inflexion. Le groupe G de $X = 0$ est contenu dans le groupe Γ entre les 36 lettres $(x_1, x_2) \pmod 6$ dont les substitutions laissent invariable l'ensemble des solutions de ces congruences (²). D'après ce que nous avons vu (p. 286), le groupe Γ contient : 1° les

(¹) JORDAN, *Cours lithographié d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Iʳᵉ division. — APPELL et GOURSAT, *Fonctions algébriques*, p. 490. — SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, 5ᵉ édition, 1885, p. 624.

(²) Les seuls cas analogues traités par M. Jordan sont ceux où le module est premier ou une puissance de nombre premier, et sont compris comme cas particulier dans notre théorème II.

substitutions

$$(27) \qquad |x_1, x_2;\ x_1+\alpha_1, x_2+\alpha_2| \quad (\text{mod } 6),$$

telles que α_1, α_2 soient des nombres pairs quelconques (mod 6), puisque le plus grand commun diviseur de $r_1 = 3$ et $r = 6$ est 3, substitutions qui forment un groupe G'_1 d'ordre 9 ; 2° les substitutions

$$(28) \qquad |x_1, x_2;\ a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2, a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2| \quad (\text{mod } 6),$$

qui forment un groupe G''_1. L'ordre de G''_1 est [1] $\Omega(6^2) = (6, 2)6(6, 1) = 24.6.2$. Ces 2 catégories de substitutions permutent entre elles les 9 lettres dont les 2 indices sont pairs.

Je dis que Γ ne contient pas d'autres substitutions que celles dérivées de G'_1 et G''_1.

Considérons une substitution S de Γ qui ne laisse aucune lettre immobile, et faisons dans (26)

$$x'_1 = x''_1 = x'''_1, \qquad x'_2 = x''_2 = x'''_2,$$

$$(29) \qquad 3x'_1 \equiv 3x'_2 \equiv 0 \quad (\text{mod } 6).$$

On obtient 9 solutions correspondant aux 9 systèmes de valeurs paires de x_1 et x_2, c'est-à-dire aux points d'inflexion; la droite définie par les 3 points identiques satisfaisant à (29) est la tangente d'inflexion; Γ remplace une solution de (29) par une autre solution, c'est-à-dire permute entre eux ces 9 points, par suite, les 27 autres des 36 points solutions de $X = 0$.

S remplace un de ces 9 points [2] a_{00} par un autre de ces 9 points $a_{x'_1 x'_2}$; mais, parmi les substitutions (27), il y a une substitution Σ remplaçant a_{00} par $a_{\alpha_1 \alpha^2}$, avec $\alpha_1 = x'_1$, $\alpha_2 = x'_2$. Donc $S\Sigma^{-1}$ laisse a_{00} invariable et appartient au sous-groupe H de Γ laissant a_{00} invariable.

Soit S_1 une substitution de H. Faisons dans (26)

$$x'''_1 \equiv x'''_2 \equiv 0, \qquad x'_1 \equiv x''_1, \qquad x'_2 \equiv x''_2 \quad (\text{mod } 6) :$$

(26) devient

$$2x'_1 \equiv 2x''_2 \equiv 0 \quad (\text{mod } 6).$$

---

(1) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 96, où l'on trouvera la signification du symbole (m, ρ), indiquée d'ailleurs plus haut, p. 304 :

$$(6, \rho) = 6\rho\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)\left(1 - \frac{1}{3\rho}\right).$$

(2) Nous désignerons, en général, ici le point d'indice x_1, x_2 par $a_{x_1 x_2}$.

S_1, qui laisse a_{00} immobile, permute entre elles les solutions de cette congruence, c'est-à-dire les lettres dont les indices sont tous deux multiples de 3; géométriquement, les points solutions $a_{x'_1 x'_1}$ (autres que a_{00}) sont les points de contact des tangentes issues de a_{00} à la cubique; les 3 droites correspondantes sont ces tangentes, que S_1 permute entre elles.

Ceci posé, S_1 remplace a_{10} par une lettre $a_{\xi_1 \xi_2}$ dont les indices ont leur plus grand commun diviseur premier à 6. Mais, parmi les substitutions (28), il existe une substitution Σ_1 jouissant de cette propriété : il suffit, en effet, de prendre $a_1^1 \equiv \xi_1$, $a_2^1 \equiv \xi_2$, $\xi_1 a_2^2 - \xi_2 a_1^2 \equiv \pm 1 \pmod 6$: l'équation $\xi_1 a_2^2 - \xi_2 a_1^2 = 1$ ($|\xi_1|, |\xi_2| \leqq 3$), et, *a fortiori*, la congruence $\xi_1 a_2^2 - \xi_2 a_1^2 \equiv 1 \pmod 6$, possèdent toujours une solution a_2^2, a_1^2. Alors $S_2 = S_1 \Sigma_1^{-1}$ laisse a_{10} immobile; de plus, d'après

$$(30) \qquad 0+1-1 \equiv 1+1-2 \equiv 0+2-2 \equiv 2+1-3 \pmod 6,$$

cette substitution laisse $a_{x_1 0}$ immobile quel que soit x_1.

Les substitutions (28) qui laissent $a_{x_1 0}$ immobile sont telles que $a_1^1 \equiv 1$, $a_2^1 \equiv 0$, c'est-à-dire de la forme

$$\Sigma_2 = | x_1, x_2; \; x_1 + a_1^2 x_2, \; a_2^2 x_2 | \pmod 6 \qquad a_2^2 \equiv \pm 1;$$

elles remplacent a_{01} par $a_{a_1^2 a_2^2}$, où $a_2^2 = \pm 1$.

Considérons S_2 : S_2 permute entre elles les lettres dont les indices sont divisibles tous deux par 2 ou 3, et laisse $a_{x_1, 0}$ immobile, par suite remplace a_{01} par $a_{\xi_1 \xi_2}$; si ξ_2 n'est pas premier à 6, S_2, qui laisse a_{00} immobile, remplace, d'après (30), $a_{0 x_2}$ par 6 lettres $a_{\xi'_1 \xi'_2}$, telles que ξ'_2 a, avec 6, un commun diviseur > 1. D'après

$$(31) \qquad -x'_1 + 0 + x'_1 \equiv 0 - x_2 + x'_2 \equiv 0,$$

on voit qu'il en serait de même de $a_{x'_1 x'_2}$, puisque S_2 laisse $a_{-x'_1 0}$ immobile. Ce résultat est absurde; donc S_2 remplace, comme Σ_2, a_{01} par $a_{\xi_1 \xi_2}$, où $\xi_2 = \pm 1$. On peut donc trouver Σ_2 telle que $S_3 = S_2 \Sigma_2^{-1}$ laisse a_{01} immobile. D'après (30), S_3 laisse $a_{0 x_2}$ immobile, comme aussi $a_{x_1 0}$; d'après (31), S_3 laisse $a_{x'_1 x'_2}$ immobile, quels que soient x'_1, x'_2, et se réduit à 1. Donc :

Le groupe Γ *est dérivé des substitutions* (27) *et* (28). Il permute entre eux les 27 points où les 2 indices ne sont pas pairs à la fois, et l'équation de degré 36 précitée, réductible, se décompose en 2 : une de degré 9 aux abscisses des points d'inflexion, une de degré 27 donnant les 27 autres points. Dès lors :

Théorème. — *Le groupe de l'équation aux 27 points (autres que les points d'inflexion), où une cubique générale possède un contact du cinquième ordre avec une conique, est contenu dans le groupe* Γ_1 *des substitutions que le*

groupe Γ *dérivé du groupe* G'_1 *des substitutions*

$$|x_1, x_2;\ x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2| \quad (\text{mod}\, 6)$$

[α_1, α_2 *pairs* (mod 6)], *et du groupe* G''_1 *des substitutions*

$$|x_1, x_2;\ a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2, a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2| \quad (\text{mod}\, 6)$$

opère entre les 27 *lettres* $a_{x_1 x_2}$ *dont un des indices est impair.*

Il nous reste à trouver la classe de Γ_1 et la classe de ses substitutions d'ordre 2.

Γ_1 est transitif entre ses 27 lettres a_{x_1, x_2} telles que x_1, x_2 ne sont pas pairs à la fois. En effet, il contient la substitution

$$|x_1, x_2;\ a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \alpha_1, a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \alpha_2| \quad (\text{mod}\, 6),$$

où α_1, α_2 sont pairs à la fois, substitution qui remplace a_{10} par la lettre arbitraire $a_{\xi_1 \xi_2}$, avec $\xi_1 = a_1^1 + \alpha_1$, $\xi_2 = a_2^1 + \alpha_2$, $a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \equiv \pm 1$. ξ_1 ou ξ_2 est impair; si, par exemple, c'est ξ_1, on prend α_1 tel que a_1^1 soit $= \pm 1$; puis $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 1$, $a_2^1 = \xi_2 - \alpha_2$, et l'on obtient bien une substitution remplaçant a_{01} par $a_{\xi_1 \xi_2}$.

Appliquons encore la méthode générale (p. 298) pour la détermination de la classe des substitutions d'un groupe; il suffit de considérer le groupe H des substitutions de Γ_1, laissant a_{30} immobile : les substitutions de H sont telles que

$$3a_1^1 + \alpha_1 \equiv 3, \qquad 3a_2^1 + \alpha_2 \equiv 0 \quad (\text{mod}\, 6);$$

α_1, α_2 sont divisibles par 2 et 3, par suite nuls. On a

$$3(a_1^1 - 1) \equiv 0, \qquad 3a_2^1 \equiv 0;$$

a_1^1 est impair quelconque, a_2^1 pair quelconque; les substitutions de H sont de la forme

$$S' = |x_1, x_2;\ a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2, a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2| \quad (\text{mod}\, 6)$$

avec $a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 \equiv \pm 1$ (mod 6); a_2^2 est impair.

Formons les catégories correspondantes : H contient les substitutions (1) (mod 6)

$$\begin{array}{lll}
T = |x_1, x_2;\ x_1 + x_2, & 2x_1 + x_2| & \text{d'ordre } 8, \\
T_1 = |x_1, x_2;\ x_1 + x_2, & 2x_1 + 3x_2| & \text{d'ordre } 6, \\
T_2 = |x_1, x_2;\ x_1 + x_2, & x_2| & \text{d'ordre } 6, \\
T_3 = |x_1, x_2;\ x_1 - x_2, & -x_2| & \text{d'ordre } 2, \\
T_4 = |x_1, x_2;\ x_1, & 2x_1 + x_2| & \text{d'ordre } 3, \\
T_5 = |x_1, x_2;\ -x_1, & x_2| & \text{d'ordre } 2.
\end{array}$$

(1) Nous prions le lecteur de former, en cas de besoin, les substitutions correspondantes entre les $a_{x_1 x_2}$.

T et T_1 permutent a_{10} transitivement avec 8 lettres au moins; T_2, T_3 laissent a_{10} immobile, et le groupe dérivé de T_2, T_3 est formé des substitutions de H

$$S'' = |x_1, x_2;\ x_1 + a_1^2 x_2,\ \pm x_2| \qquad (\text{mod } 6)$$

(a_1^2 quelconque) au nombre de 12, qui laissent a_{10} immobile : c'est le groupe $H_{a_{10}}$. La catégorie représentée par a_{10} comprend alors 8 lettres, puisque ordre $H = \mathcal{K} = 96$.

T et T_1 permutent transitivement a_{01} avec 16 lettres au moins; T_4, T_5 laissent a_{01} immobile, et le groupe dérivé de T_4, T_5 est d'ordre 6 et formé des substitutions de H,

$$S''_1 = |x_1, x_2;\ \pm x_1,\ 2kx_1 + x_2| \qquad (\text{mod } 6)$$

($k = 0$, 1 ou 2), au nombre de 6 : c'est le groupe $H_{a_{01}}$. La catégorie représentée par a_{01} comprend 16 lettres.

Enfin la catégorie représentée par a_{03} comprend a_{03} et a_{33}.

Une substitution de H déplace 26 lettres (cas de la substitution T_1^2 d'ordre 2), ou appartient à $H_{a_{10}}$, $H_{a_{01}}$, $H_{a_{03}}$.

Au lieu de continuer à former les catégories (10), il sera plus simple d'étudier directement les substitutions de ces trois groupes.

$H_{a_{10}}$. — S'' laisse $a_{x_1 x_2}$ immobile si

$$a_1^2 x_2 \equiv 0, \qquad x_2 \equiv \pm x_2.$$

Avec le signe +, $a_1^2 \not\equiv 0$, et l'on obtient 6, 12 ou 18 lettres laissées immobiles, $a_{x_1 0}$, ou $a_{x_1 0}$ et $a_{x_1 3}$, ou $a_{x_1 0}$, $a_{x_1 2}$ et $a_{x_1 4}$. Avec le signe —, $x_2 = 0$ ou 3, et l'on obtient 6 ou 12 lettres laissées immobiles, $a_{x_1 0}$, ou $a_{x_1 0}$ et $a_{x_1 3}$.

Il faut négliger, parmi elles, celles dont les 2 indices sont pairs, au nombre de 3, 3 ou 9; on obtient ainsi 3 ou 9 lettres laissées immobiles, sur 27 : les substitutions de $H_{a_{10}}$ sont de classe 24 (exemple T_3), ou 18.

$H_{a_{01}}$. — S''_1 laisse $a_{x_1 x_2}$ immobile si

$$x_1 \equiv \pm x_1, \qquad 2kx_1 \equiv 0 \qquad (k = 0,\ 1 \text{ ou } 2).$$

Avec le signe +, $k \not\equiv 0$, $x_1 = 0$ ou 3; les lettres laissées immobiles sont (0, x_2), (3, x_2). Avec le signe —, on a les mêmes lettres : parmi les 27 lettres de Γ_1, il en reste 9 laissées immobiles, et les substitutions de $H_{a_{01}}$ sont de classe 18 (exemple T_5).

$H_{a_{03}}$. — Une substitution de ce groupe est de classe 24, ou laisse une autre lettre immobile, c'est-à-dire est semblable à une lettre de $H_{a_{10}}$ ou $H_{a_{01}}$. Donc :

Corollaire I. — *Le groupe de l'équation aux 27 points (autres que les points*

d'inflexion) où une cubique générale a un contact du cinquième ordre avec une conique est de classe 18; *ses substitutions déplacent* 27, 26, 24 *ou* 18 *lettres. Cette équation possède* 27, 9, 3 *ou* 1 *racines réelles.*

Parmi ces 27 *points de surosculation, si* α *sont réels,* α *est* ([1]) *un des nombres* 1, 3, 9 *ou* 27.

On sait que l'équation en question est résoluble par radicaux : cela pourrait aussi se déduire de l'étude ([2]) des facteurs de composition de Γ.

On peut encore le voir directement : Γ opère entre les abscisses des 9 points d'inflexion les substitutions du groupe linéaire g (mod 3) à 2 indices, d'ordre 9.8.6. Γ contient donc un sous-groupe invariant d'ordre 6 laissant les abscisses de ces 9 points immobiles. Γ est alors composé avec ce groupe d'ordre 6 (ou un isomorphe holoédrique de ce groupe) qui est résoluble, et le groupe g qui l'est aussi. Donc ([3]) Γ et tout groupe qu'il contient ([4]) sont résolubles.

APPLICATION AUX CONSTRUCTIONS QUE L'ON PEUT EFFECTUER AVEC LA RÈGLE, OU PAR LA RÈGLE ET LE COMPAS.

Étant donnée l'équation $X = 0$ de degré d, si l'on peut résoudre complètement l'équation en lui adjoignant ([5]) quelques-unes de ses racines $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$ convenablement choisies, les autres racines sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots x_\delta$, que l'on sait, dès lors, construire géométriquement avec *la règle seule* ([6]). La connaissance du groupe de $X = 0$ ou d'un groupe Γ le contenant permettra de fixer la valeur exacte ou une limite supérieure de δ.

Exemples. — Pour résoudre une équation dont le groupe est contenu dans le groupe linéaire général non homogène à q indices (mod r) (r premier), il suffit de

---

(1) On sait (Salmon, *loc. cit.*, p. 160. — Serret, *loc. cit.*, p. 613) qu'une cubique générale a au plus 3 points d'inflexion réels. La tangente en un point de surosculation réel passant par un point d'inflexion réel, on voit que, en réalité, $\alpha \neq 27$.

(2) Il suffit de s'appuyer sur la théorie générale des facteurs de composition du groupe linéaire (Jordan, *Traité*, p. 99).

(3) Jordan, *Traité*, p. 395.

(4) *Ibid.*, p. 387.

(5) Pour le sens de ce mot, *voir* Jordan, *Traité*, p. 253.

(6) On sait, en effet, construire le produit $\alpha\beta$ et le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ à l'aide de la règle seule, par suite une fonction rationnelle quelconque des quantités connues et adjointes. De même les radicaux carrés se construisent à l'aide de la règle et du compas (*voir*, par exemple, Pruvost, *Géométrie analytique*, t. I, 1888, p. 10).

connaître les racines

$$(0, 0, \ldots, 0), \quad (1, 0, \ldots, 0), \quad (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, \ldots, 0, 1),$$

dont un seul indice est $\not\equiv 0$ et $\equiv 1 \pmod{r}$, au nombre de $q+1$. Donc ici $\delta \leqq q+1$. Si ce groupe coïncide avec le groupe linéaire général non homogène ou homogène, en vertu du théorème III, $\delta = q+1$ ou q respectivement.

La connaissance de 3 points d'inflexion convenablement choisis d'une courbe du troisième degré suffit pour construire les autres par la règle seule.

En général, d'ailleurs, quand on adjoint $d-1$ racines de $X=0$, la $d^{\text{ième}}$ racine est déterminée rationnellement. Si u est la classe du groupe de $X=0$, la connaissance de $d-u$ racines détermine les autres rationnellement.

Application. — Connaissant $mn-1$ des points d'intersection de 2 courbes de degré m et n, le $mn^{\text{ième}}$ peut être construit à l'aide de la règle seule.

Dans certains cas, la considération du groupe Γ permettra encore de dire combien il faut connaître au minimum de racines pour construire les autres à l'aide *de la règle et du compas.*

Soit Δ une fonction alternée : elle est susceptible de 2 valeurs au plus, et dépend d'une équation du second degré au plus, à coefficients rationnels; on peut la construire par la règle et le compas. En l'adjoignant à $X=0$, on réduit le groupe Γ aux substitutions de Γ qui sont contenues dans le groupe alterné, et forment un groupe Γ'. Adjoignons alors à $X=0$, Δ et $d-2$ racines de X : le groupe de $X=0$ se réduit à l'unité. La connaissance de $d-2$ racines permet donc de construire les autres par la règle et le compas. Ainsi : quand on connaît $mn-2$ des points d'intersection de 2 courbes de degré m et n, on peut construire les 2 autres par la règle et le compas; quand on connaît 7 points de l'intersection de 2 cubiques, les 2 derniers peuvent se construire par la règle et le compas.

D'ailleurs, ces résultats relatifs aux constructions par la règle ou par la règle et le compas sont plus ou moins connus, ou sont des conséquences du Livre III du *Traité des substitutions* de M. Jordan.

Mais *nous allons indiquer une méthode pour déterminer le nombre minimum de points, courbes, etc. déterminés par une équation* $X=0$, *qu'il suffit de connaître pour que les autres puissent être construits par la règle seule ou par la règle et le compas.*

On sait que l'adjonction d'une racine a à une équation réduit le groupe de cette équation à celles de ses substitutions qui laissent a immobile. Pour résoudre l'équation, il suffit de lui adjoindre successivement assez de racines pour que le nouveau groupe de l'équation se réduise à l'unité.

La méthode générale à employer pour déterminer le nombre minimum des racines nécessaires à la résolution complète est identique à celle que nous avons indiquée pour la détermination de la classe d'un groupe (p. 298).

On remarque, en effet, que 2 groupes semblables ne diffèrent que par la notation; soient 2 équations qui ont pour groupes ces 2 groupes : si la résolution de l'une s'obtient par l'adjonction de k racines convenablement choisies, la résolution de l'autre s'obtiendra par l'adjonction de k racines convenablement choisies.

Dès lors, avec les notations de la page 298, l'adjonction d'une racine réduit le groupe G de l'équation à l'un des groupes H_a, $H_{a'}$, ..., ou à un groupe semblable à l'un de ceux-là; il suffit d'étudier un représentant de chacune des catégories de groupes correspondant à (10), en opérant sur chacun d'eux comme on l'a fait sur G, etc. Dans la suite des opérations, on applique encore la condition (A).

Soit n le degré de G,

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots$$

les degrés de H_a, $H_{a'}$, ... L'adjonction d'une racine déplacée par H_a à H_a, autrement dit, la considération du sous-groupe des substitutions de H_a laissant immobile une lettre déplacée par H_a conduit à de nouveaux groupes représentants de degrés

$$n_{1,1}, \quad n_{1,2}, \quad \ldots, \quad < n_1;$$

de même $H_{a'}$ conduit à de nouveaux groupes représentants, de degrés

$$n_{2,1}, \quad n_{2,2}, \quad \ldots, \quad < n_2;$$

et ainsi de suite. En général, on obtiendra des sous-groupes de degrés

$$n_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$$

constamment décroissants.

Le nombre cherché ici, M_r, *relatif aux constructions par la règle seule, est la valeur minima* (¹) *qu'il faut attribuer à k pour que*

$$n_{i_1, i_2, \ldots, i_k} = 1.$$

(¹) On pourra aussi chercher la valeur maxima, ou même les valeurs exactes : si u est la classe de G, ces divers nombres sont $\leqq n - u$. Si, en laissant de côté le sous-groupe de G formé de la substitution 1, on peut trouver dans G des groupes déplaçant $n - u_0$, $n - u_1$, ..., $n - u_{\lambda-1}$ lettres, avec $u_0 < u_1 < \ldots < u_{\lambda-1}$, et non $n - u_\lambda$, avec $u_\lambda \neq u_0$, $u_1, \ldots, u_{\lambda-1}$, G est dit *un groupe à* λ *degrés* (*voir* notre Note du *Bull. Soc Math.*, 1897, t. XXV, p. 189). La connaissance de λ donnera ici $M_r \leqq \lambda$.

Considérant les divers nombres $n_{i_1,\dots,i_k}$ satisfaisant à cette égalité, le plus petit des nombres $n_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ corrélatifs est égal à la classe du groupe G.

Pour déterminer le nombre M_{rc}, analogue à M_r, mais relatif aux constructions par la règle et le compas, on remarquera d'abord que $M_{rc} \leqq M_r$. On considérera, en appliquant la même méthode, les sous-groupes de degrés

$$n_{i_1,i_2,\dots,i_k}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit résoluble à l'aide d'équations du second degré, autrement dit pour que ses racines puissent être construites par la règle et le compas, est que l'ordre du groupe G de cette équation soit une puissance de 2.

En effet, on sait qu'un groupe résoluble d'ordre m a pour facteurs de composition ([1]) les divers diviseurs premiers de m, c'est-à-dire que sa résolution se ramène à celles d'équations d'ordre et de degré égaux à ces divers facteurs : ces équations seront du deuxième degré à la condition nécessaire et suffisante que les facteurs de composition soient tous égaux à 2. Par conséquent, l'ordre de G doit être une puissance de 2.

Réciproquement, si ordre $G = 2^m$, on sait ([2]) que G est résoluble par radicaux du second degré, c'est-à-dire que tous ses facteurs de composition sont premiers et égaux à 2.

Le nombre cherché ici, M_{rc}, *relatif aux constructions par la règle et le compas, est la valeur minima qu'il faut attribuer à k pour que le sous-groupe correspondant soit d'ordre* $= 2^m$.

Appliquons cette méthode à l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième degré, et au groupe G (p. 317) qui comprend le groupe de cette équation. Les développements des pages 317 et suivantes montrent que la construction de ces droites par la règle et le compas est possible quand on se donne ([3]) a, b, d, f, la construction par la règle seule quand on se donne a, b, d, f, h.

XI. *Il suffit de connaître* 4 *des* 27 *droites, convenablement choisies, d'une surface du troisième degré, pour que l'on puisse construire les autres à l'aide de la règle et du compas. Il suffit de connaître* 5 *de ces droites, convenablement choisies, pour que l'on puisse construire les autres à l'aide de la règle seule.*

---

(1) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 387.

(2) VOGT, *Résolution alg. des équations*, Nony, 1895, p. 136.

(3) D'autres groupes de lettres conduisent au même résultat; ainsi la construction par la règle et le compas est possible quand on se donne a, b, m, u ou a, b, m', p' ou a, m, q, p'.

On vérifie encore qu'on ne peut diminuer ces nombres en adjoignant d'autres séries de racines.

Considérons maintenant les 28 tangentes doubles d'une quartique générale. En adjoignant à l'équation du vingt-huitième degré correspondante une de ses racines, on réduit le groupe à un groupe contenu dans le groupe G précédent. Donc :

XII. *Il suffit de connaître* 5 *des* 28 *tangentes doubles, convenablement choisies, d'une quartique générale, pour que l'on puisse construire les autres à l'aide de la règle et du compas. Il suffit de connaître* 6 *de ces bitangentes, convenablement choisies, pour que l'on puisse construire les autres à l'aide de la règle seule* (1).

VIII.

SUR LA TRANSITIVITÉ ENTRE LES COMBINAISONS DE ν LETTRES.

Reprenons la propriété 2° énoncée page 284 : on peut la préciser un peu plus. Sans être μ_1+1 fois transitif, le groupe G de $X=0$ pourrait être transitif entre les combinaisons μ_1+1 à μ_1+1 des d points; cela suffit pour entraîner que les d points sont sur la même courbe de degré μ.

De même, s'il y a une relation géométrique entre les points, courbes, etc. définis par $X=0$, relation où l'on peut faire figurer μ_2 de ces points, courbes, etc. choisis arbitrairement (2), et s'il n'y en a pas où μ_2+1 arbitrairement choisis puissent figurer, il est bien évident que le groupe de $X=0$ ne pourrait permuter transitivement les combinaisons des lettres μ_2+1 à μ_2+1.

Nous sommes ainsi amené incidemment à envisager dans la théorie des substitutions, en vue d'applications géométriques possibles, et, de plus, en raison de son intérêt propre, un genre de transitivité relative ainsi défini :

Si un groupe G *de substitutions entre d lettres* $a_1, a_2, \ldots, a_d$ *contient une substitution remplaçant une combinaison quelconque de* ν *des d lettres par une autre arbitrairement choisie, nous dirons que* G *est transitif entre les combinaisons* ν *à* ν *de ces d lettres.*

L'étude de ce genre de transitivité a déjà été envisagée dans plusieurs de nos

---

(1) *Comparer* Clebsch, *Leçons sur la Géométrie,* trad. A. Benoist, t. III. Paris, 1883, p. 451.

(2) L'ensemble de ces relations forme alors ce que nous avons appelé (Note au bas de la p. 282) *un système complet;* le faisceau des substitutions laissant invariable la valeur numérique de chacune des fonctions du système forme un groupe, qui contient G.

Mémoires antérieurs ([1]). Un groupe ν fois transitif entre les d lettres est transitif entre les combinaisons ν à ν des d lettres; mais la réciproque n'est pas vraie; ainsi ([2]), le groupe des substitutions $W = | x ;\ a^2x + b | \pmod{p}$, ($p$ premier), d'ordre $p\frac{p-1}{2}$, quand $p = 4h + 3$, est transitif entre les combinaisons 2 à 2 des p lettres $0, 1, 2, \ldots, p-1$, et, cependant, il n'est pas deux fois transitif.

Nous savons encore ([3]) que, si un groupe G est transitif entre les combinaisons ν à ν de d lettres, il est transitif entre ces d lettres; que si G est transitif entre les combinaisons 3 à 3 de ces d lettres, il l'est aussi entre les combinaisons 2 à 2.

Mais l'on peut, plus généralement, se poser les problèmes suivants :

I. *Si* G, *de degré d, est transitif entre les combinaisons ν à ν de d lettres* $\left(\nu \leqq \frac{d}{2}\right)$, *est-il transitif entre les combinaisons ν' à ν', quand $\nu' < \nu$?*

La réponse est affirmative pour $\nu' = 1$, ou pour $\nu \leqq 3$.

II. *Si* G *ne contient pas le groupe alterné de degré d, ν* $\left(\textit{supposé} \leqq \frac{d}{2}\right)$ *est-il limité en fonction de d, comme l'est* ([4]) *la transitivité de* G?

III. *Si* G *ne contient pas le groupe alterné de degré d, et si* G *est transitif entre les combinaisons ν à ν de ses lettres, sa classe est-elle limitée inférieurement en fonction de d?*

Plus généralement, on pourra songer à traiter, pour ce genre de transitivité, les mêmes problèmes ([5]) que pour la transitivité ordinaire.

Nous allons indiquer ci-dessous un résultat relatif à la question I, et résoudre affirmativement les questions II et III.

I. Il y a, en dehors des cas où soit $\nu' = 1$, soit $\nu \leqq 3$, une infinité de valeurs de d pour lesquelles la propriété I comporte une réponse affirmative.

([1]) *J. de Math.*, 1895, 1897. — *Mém. des Savants étrangers*, t. XXXII. — *Bull. Soc. Math.*, t. XXIV, 1896, p. 89.

([2]) *Bull. Soc. Math.*, t. XXIV, 1896, p. 90.

([3]) *Id.*, p. 89.

([4]) JORDAN, *Traité des subst.*, p. 76 et *J. de Math.*, 1895, p. 35. — A. BOCHERT, *Math. Ann.*, t. XXIX, XXXIII et XL.

([5]) On peut d'ailleurs encore se poser les mêmes problèmes à propos de la transitivité incomplète, définie plus haut, page 300.

En effet, supposons G transitif entre les C_d^ν combinaisons des d lettres ν à ν : chaque combinaison de ν lettres comprend ν combinaisons de $\nu - 1$ lettres. Si G n'est pas transitif entre les combinaisons de $\nu - 1$ lettres, il permute exclusivement entre elles λ des $C_d^{\nu-1}$ combinaisons des d lettres $\nu - 1$ à $\nu - 1$, avec $\lambda < C_d^{\nu-1}$. Si une combinaison de ν lettres comprend exactement λ_1 combinaisons de $\nu - 1$ lettres appartenant à ces λ, il en est de même pour chaque combinaison de ν lettres en vertu de la transitivité de G entre les combinaisons des d lettres ν à ν. On peut alors supposer $\lambda_1 \leqq \frac{\nu}{2}$.

Ces λ combinaisons comprennent en tout $\lambda_1 C_d^\nu$ combinaisons de $\nu - 1$ lettres, chacune étant comptée ainsi $d - \nu + 1$ fois, puisque chacune appartient à $d - \nu + 1$ combinaisons de ν lettres. Donc

$$\lambda = \frac{\lambda_1 C_d^\nu}{d - \nu + 1}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1 \leqq \frac{\nu}{2};$$

$$\lambda = \lambda_1 \frac{d(d-1)\ldots(d-\nu+2)}{\nu!}.$$

Prenons

$$d = \nu!\, h - 1 \qquad (h \text{ entier} > 0);$$

$d - i$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 2)$, a avec $\nu!$ le plus grand commun diviseur $i + 1$. Donc $d(d-1)\ldots(d-\nu+2)$ a avec $\nu!$ le plus grand commun diviseur $(\nu-1)!$: $\frac{\lambda_1}{\nu}$ devrait être entier, comme λ, ce qui n'est pas. Donc G est transitif entre les combinaisons $\nu - 1$ à $\nu - 1$ de ses d lettres.

Posant $\nu - 1 = \nu_1$, on peut raisonner sur les combinaisons de ν_1 et $\nu_1 - 1$ lettres, comme on vient de raisonner sur celles de ν et $\nu - 1$ lettres. Les conclusions seront les mêmes, car si $h\nu = h_1$, $d = \nu_1!\, h_1 - 1$. G est transitif entre les combinaisons $\nu - 2$ à $\nu - 2$ de ses d lettres.

On pourra évidemment ensuite raisonner de même sur $\nu_2 = \nu_1 - 1 = \nu - 2, \ldots, \nu_j = \nu - j, \ldots$. Donc :

Théorème. — *Si un groupe* G, *de degré* $d = \nu!\, h - 1$, (h *entier* > 0), *est transitif entre les combinaisons* ν *à* ν *de ces d lettres, il est transitif entre les combinaisons* ν' *à* ν' *de ses d lettres, quand* $\nu' < \nu$.

Il en est de même pour d quelconque quand $\nu' = 1$ *ou quand* $\nu \geqq 3$.

II. Si G est transitif entre les combinaisons des d lettres ν à ν, il l'est aussi entre les combinaisons des d lettres $d - \nu$ à $d - \nu$: car soient c_1, c_2 2 combinaisons ν à ν; C_1, C_2 les combinaisons $d - \nu$ à $d - \nu$ des d lettres formées par celles des d lettres qui n'appartiennent pas à c_1 ou c_2; une substitution de G qui rem-

place c_1 par c_2 remplace forcément C_1 par C_2. On peut donc se contenter d'examiner ce qui se passe dans le cas où G est transitif entre les combinaisons ν à ν des d lettres, avec $\nu \leqq \frac{d}{2}$. La propriété à établir est alors la suivante :

$$\frac{d}{2} - \nu \leqq \varphi(d),$$

où $\varphi(d)$ est une certaine fonction > 0 de d.

Nous indiquerons d'abord une démonstration directe du lemme suivant de M. Jordan [1], démonstration indépendante de la considération des facteurs de composition.

LEMME I. — *Si un groupe Γ, transitif et de degré d, a son ordre divisible par un nombre premier $p > \frac{d}{2}$, autrement dit si Γ contient une substitution circulaire d'ordre $p > \frac{d}{2}$, Γ est primitif, par suite $d - p + 1$ fois transitif.*

Nous savons d'abord que ce lemme est vrai quand Γ est primitif [2]; mais nous allons montrer que Γ ne peut être transitif, sans être primitif.

En effet, supposons Γ transitif, mais non primitif, Γ contenant une substitution circulaire d'ordre $p > \frac{d}{2}$. Γ admet une répartition de ses d lettres en systèmes de non-primitivité de θ lettres $\left(\theta \leqq \frac{d}{2} < p\right)$. On a $p < d$, puisque d est divisible par $\theta < d$, par suite non premier.

Désignons par H_α le sous-groupe des substitutions de Γ qui laissent la lettre α immobile : H_α contient une substitution circulaire S d'ordre p. Soit s_1 le système d'imprimitivité auquel appartient α : H_α permute exclusivement entre elles les $\theta - 1$ lettres de ce système autres que α, lettres dont aucune, par suite, n'appartient à la substitution S, puisque $\theta - 1 < p$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les lettres de $S = (a_1 a_2 \ldots a_p)$.

Si a_1 et a_{k+1} $(0 < k \leqq p - 1)$ appartiennent à un même système s_2 de non-primitivité, $S^k = (a_1\, a_{k+1}\, a_{2k+1} \ldots)$ montre que S^k laisse s_2 invariable; a_{k+1} est remplacé par une lettre a_{2k+1} de s_2, a_{2k+1} par une lettre a_{3k+1} de s_2, etc. Finalement, les p lettres de S appartiendraient au système s_2, ce qui est absurde, puisque $p > \theta$. Donc les p lettres de S appartiennent à p systèmes distincts, ce qui est

---

(1) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 284.

(2) *Id.*, Note C, p. 664. — JORDAN, *Journal de Mathématiques*, 1871, p. 384. — E. NETTO-BATTAGLINI, *Teoria delle Sostituzioni*, p. 79-80.

encore absurde, car le nombre $\frac{d}{\theta}$ des systèmes est $\leqq \frac{d}{2} < p$, puisque $\theta \geqq 2$. Donc F ne peut être imprimitif. C. Q. F. D.

Ce lemme en entraîne un autre quand on s'appuie sur le théorème suivant [1] de M. Jordan :

Quand p est un nombre premier impair, un groupe de degré $p+k$ ne peut être plus de k fois transitif, si $k \geqq 3$, à moins de contenir le groupe alterné.

Soit alors $\frac{d}{2} < p \leqq d-3$: tout étant posé comme au lemme I, Γ sera $d-p+1$ fois transitif; $p+k=d$, $k \geqq 3$, $d-p+1=k+1$. Γ serait de degré $p+k$ avec $k \geqq 3$, et plus de k fois transitif, ce qui est impossible d'après le théorème ci-dessus. Si donc nous admettons que, d étant quelconque, il y a toujours un ou des nombres premiers plus petits que $d-2$ et plus grands que $\frac{d}{2}$, nous obtenons ainsi une limite de transitivité des groupes de degré d où intervient le plus grand de ces nombres premiers :

Lemme II. — *Si p est le plus grand des nombres premiers inférieurs à $d-2$, un groupe G de substitutions transitif entre d lettres et qui ne contient pas le groupe alterné de d lettres n'est pas plus de $d-p$ fois transitif, ou, ce qui revient au même, est d'ordre premier à p; on a*

$$\frac{d}{2} < p < d-2 \quad [2].$$

Ce n'est qu'une transformation de l'énoncé de M. Jordan. Mais cette nouvelle limite de transitivité s'étend à la transitivité entre les combinaisons ν à ν des d lettres.

En effet, considérons un groupe G transitif entre les combinaisons ν à ν des d lettres $\left(\nu \leqq \frac{d}{2}\right)$, et qui ne contient pas le groupe alterné des d lettres. Son ordre $\mathcal{G}$ est divisible par

$$C_d^\nu = \frac{d(d-1)\ldots(d-\nu+1)}{\nu!}.$$

Soit encore p le plus grand des nombres premiers plus grands que $\frac{d}{2}$ et infé-

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. I, 1872-1873, p. 42.

[2] D'après Tchebychef; *voir* ci-dessous.

rieurs à $d-2$: si $d-\nu+1\leqq p$ ou $\nu\geqq d-p+1$, G contiendra une substitution d'ordre p et sera $d-p+1$ fois transitif contrairement au lemme II. Donc

$$\nu\leqq d-p.$$

Mais, d'après Tchebychef et Serret (*Algèbre supérieure*, t. II, 5me édition, 1885, p. 238), il y a toujours un nombre premier $\leqq d-3$ et plus grand que

$$\delta_d=\frac{5}{6}(d-3)-2\sqrt{d-3}-25\frac{\log^2(d-3)}{16A\log 6}-125\frac{\log(d-3)}{24A}-\frac{25}{6A'},$$

où

$$A=0,92129\ldots,$$

$$\delta_d=\frac{5}{6}d(1-\varepsilon_d),\qquad (\varepsilon_d>0,\ \varepsilon_\infty=0);$$

les logarithmes sont ici népériens, et $d\geqq 6$.

Donc, dès que d est supérieur à une certaine limite Δ,

$$\delta_d>\frac{4}{5}d,$$

et il y a toujours un nombre premier au plus égal à $d-3$ et $>\frac{4}{5}d$.

On vérifie que, si l'on prend $\Delta=10\,003$, $\delta'_d-\frac{4}{5}$ est positif pour $d\geqq\Delta$, $\delta_\Delta-\frac{4}{5}\Delta$ est aussi positif, par suite aussi $\delta_d-\frac{4}{5}d$ quand $d>10\,003$ (1).

---

(1) Pour les valeurs de $d\leqq 10\,003$, on vérifiera à l'aide d'une Table de nombres premiers qu'il y a un nombre premier p avec $\frac{4}{5}d<p\leqq d-3$ tant que $d\geqq 40$. Un des moyens les plus rapides de le faire est de se reporter à la Table suivante de M. J. Glaisher : ***Factor Table for the Fourth Million***, London, Taylor and Francis, 1879, p. 48; où l'on trouve tous les nombres premiers jusqu'à 30 341 avec la différence Δ_1 des nombres premiers consécutifs 2 à 2 (on peut aussi se contenter du Tableau de la page 340). On remarque que $\Delta_1\leqq 36$, quand $d\leqq 10\,003$; p existera donc tant que

$$d-3-\frac{4}{5}d=\frac{d}{5}-3\geqq 37,\qquad d\geqq 200.$$

Quand $d<200$, $\Delta_1\leqq 14$; p existe tant que

$$\frac{d}{5}-3\geqq 15,\qquad d\geqq 90.$$

Nous obtenons ainsi ce lemme :

LEMME. — *Quel que soit le nombre d, il y a toujours un nombre premier p au plus égal à d — 3 et supérieur à* $\frac{4}{5}d$, *dès que d est supérieur à* 39.

Dès lors, si d est assez grand, $\nu \leqq d-p$, $p > \frac{4}{5}d$, $\nu < \frac{d}{5}$. Nous obtenons ainsi ce résultat :

THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de substitutions entre d lettres qui permute transitivement les combinaisons* ν *à* ν *de ces d lettres* $\left(\nu \leqq \frac{d}{2}\right)$, *p le plus grand nombre premier inférieur à d — 2 et plus grand que* $\frac{d}{2}$: *on a forcément*

$$\nu \leqq d-p.$$

Quand $d \geqq 40$, *on a*

$$\nu < \frac{d}{5},$$

pour $d < 40$,

$$\nu \leqq 8.$$

Ce théorème comprend le lemme II comme cas particulier, car un groupe de degré d ν fois transitif est transitif entre les combinaisons des d lettres ν à ν.

Remarque. — MM. A. Bochert [1] et Jordan ont indiqué pour un groupe t fois transitif de degré d des limites de transitivité très avantageuses en général. Ainsi M. Jordan a démontré [2] que pour ce groupe

$$\log(d-t) \geqq a\sqrt{t \log t} \qquad (\lim_{d=\infty} a = \log 2).$$

Mais la formule $\nu \leqq d-p$ du théorème précédent est susceptible de nous donner une formule analogue $\nu \leqq \psi(d)$ si l'on connaît une limite supérieure de la diffé-

---

Quand $d < 90$, $\Delta_1 \leqq 6$; p existe tant que

$$d \geqq 50.$$

Pour $40 \leqq d < 50$, on vérifie la chose directement.
Enfin, quand $d < 40$, on voit de suite que

$$\nu \leqq 8.$$

[1] *Math. Ann.*, t. XXIX, XXXIII et XL.
[2] *Journal de Mathématiques*, 1895, p. 35.

rence $d - p$ en fonction de d : l'utilisation de la valeur de $\psi(d)$ déduite des résultats de Tchebychef nous a précisément donné en général $\nu < \frac{d}{5}$.

On ne connaît pas, croyons-nous, de valeur plus avantageuse de $\psi(d)$, ou mieux, de la limite supérieure de la différence Δ_1 entre 2 nombres premiers consécutifs ϖ_1, ϖ_2 ($\varpi_2 > \varpi_1$) en fonction de ϖ_2 ou ϖ_1, quel que soit ϖ_2. Mais, dans les limites des Tables des nombres premiers, on peut chercher une valeur de $\psi(d)$ aussi avantageuse que possible. En particulier, on peut chercher à vérifier ainsi jusqu'à $d = 9.10^6$ par exemple (Tables de Burckhardt et de M. Glaisher), pour la transitivité entre les combinaisons de ν lettres, une formule analogue à celle de MM. Bochert ou Jordan.

Voici comment on peut opérer : formons (par la pensée) un Tableau où les nombres premiers sont rangés par ordre de grandeur croissante, et où nous portons, vis-à-vis de chaque nombre premier, la différence Δ_1 avec le nombre premier précédent; puis ne conservons dans ce Tableau que les différences Δ_1 qui sont supérieures à toutes les précédentes. Nous obtenons le Tableau suivant [1], valable pour les 9.10^6 premiers nombres :

Nombres premiers.	Différence Δ_1 avec le précédent.	Valeur $\Delta_1 + 2$.	Valeur de $2 \log_{10} \varpi_2$.	Valeur de $(2 \log_{10} \varpi_2)^2$.
2	1	3	0,602	0,36
5	2	4	1,398	1,96
11	4	6	2,083	4,34
29	6	8	2,925	8,56
97	8	10	3,974	15,80
127	14	16	4,208	17,70
541	18	20	5,466	29,88
907	20	22	5,915	34,99
1 151	22	24	6,122	37,48
1 361	34	36	6,268	39,29
9 587	36	38	7,963	63,41
15 727	44	46	8,393	70,44
19 661	52	54	8,587	73,74
31 469	72	74	8,996	80,87
156 007	86	88	10,386	107,77
360 749	96	98	11,114	123,59
370 373	112	114	11,137	124,03
492 227	114	116	11,384	129,60
1 349 651	118	120	12,260	150,31
1 357 333	132	134	12,265	150,43
2 010 881	148	150	12,607	158,94
4 652 507	154	156	13,335	177,82

[1] Pour les 100 000 premiers nombres, nous avons déjà un Tableau analogue, ne compre-

Soit x_i le nombre premier qui figure dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de ce Tableau, δ_i la différence Δ_1 correspondante : quand $d - 2 \leqq x_{i+1} - \delta_{i+1}$, le nombre premier p immédiatement inférieur à $d - 2$ est au moins égal à $d - 2 - \delta_i$, et

$$\nu \leqq d - p \leqq d - (d - 2 - \delta_i) = \delta_i + 2.$$

Donc :

Corollaire I. — *Quand* $d - 2 \leqq x_{i+1} - \delta_{i+1}$, *on a*

$$\nu \leqq \delta_i + 2,$$

---

nant que les deux premières colonnes, dressé par M. J. Glaisher (*Messenger of Math.*, 1878, t. VII, p. 174-175), et rectifié ici par nous d'après J. Glaisher, *Factor Table for the Fourth Million*, London, Taylor and Francis, 1879, p. 48. Au delà, nous nous sommes servi du Tableau des différences Δ_1 de 80 et au-dessus pour le premier million (*Mess., loc. cit.*, p. 104), 100 et au-dessus pour les 9 premiers millions (Glaisher, *Factor Table for the Sixth Million*, etc., 1883, p. 64-65). Enfin nous avons vérifié personnellement, d'après les Tables de Burkhardt (Paris, 1817), l'exactitude du Tableau précédent entre 100 000 et 405 000.

Les mêmes résultats et vérifications nous ont encore permis de constater l'exactitude, dans les limites des Tables, de ce théorème empirique :

h étant donné, on peut toujours trouver 2 nombres premiers consécutifs dont la différence est $2h$.

Ce théorème était déjà vérifié implicitement par M. Glaisher, qui, toutefois, ne l'a pas énoncé, jusqu'à $h = 32$ (pour les 100 000 premiers nombres, *Mess., loc. cit.*, p. 174, et *Factor Table for the Fourth Million*, p. 48). Pour $40 \leqq h \leqq 70$, il résulte des Tableaux de *séquences* de nombres non premiers (valeurs de $\Delta_1 - 1$) indiqués par M. Glaisher (*Tables et Mess., loc. cit.*, p. 104 et 171). Pour $33 \leqq h \leqq 39$, on a :

Pour 162 209......	$\Delta_1 = 66$	Pour 404 671......	$\Delta_1 = 74$
134 581......	68	212 777......	76
173 429......	70	188 107......	78
31 469......	72 (Glaisher)		

Enfin, d'après les Tableaux de M. Glaisher, on peut encore avoir

$$h = 73,\ 74,\ 76,\ 77.$$

Finalement, ce théorème est vrai pour $h \leqq 70$. On sait de plus (*Mess., loc. cit.*, p. 106 et E. Lucas, vol. VIII, 1879, p. 81) que la différence $2h$ de 2 nombres premiers consécutifs peut croître indéfiniment.

Mentionnons les différences

$$265\,703 - 265\,621 = 82, \qquad 360\,749 - 360\,653 = 96,$$
$$396\,833 - 396\,733 = 100, \qquad 404\,941 - 404\,851 = 90,$$

qui ne figurent pas dans la Table de M. Glaisher (*Mess., loc. cit.*, p. 104).

Notre travail personnel nous permet d'affirmer, sauf erreur de notre part, et sous réserve de l'exactitude de la Table des nombres premiers de Burckhardt (Paris, 1817), les résultats précédents pour les nombres $\leqq 405\,000$. Au delà, une vérification spéciale serait utile.

x_i et δ_i étant le nombre premier et la différence Δ_1 correspondante de la $i^{\text{ième}}$ ligne (2 *premières colonnes*) *du Tableau précédent* ($d < 4\,652\,356$). *Quand* $9.10^6 \geqq d \geqq 4\,652\,356$,

$$\nu \leqq 156.$$

On peut substituer à ce Tableau une formule valable dans les limites des Tables, en cherchant une limite supérieure de $d - p$ en fonction de d à l'aide de ce Tableau.

Nous écrivons dans le même Tableau les valeurs de $\Delta_1 + 2$, les logarithmes ordinaires de d (base 10), enfin le nombre $(2 \log_{10} d)^2$. On constate que l'on a constamment, pour les nombres $\geqq 29$,

$$\Delta_1 + 2 < (2 \log_{10} d)^2.$$

D'ailleurs, $4 \log_{10}^2 d \geqq 6$ dès que

$$\log_{10} d \geqq \frac{\sqrt{6}}{2} = 1,224\ldots, \qquad d \geqq 16,79 \qquad \text{ou} \qquad d \geqq 17.$$

Par conséquent :

Lemme. — *Dans les limites des Tables de nombres premiers* (ϖ_2 *et* $d \leqq 9.10^6$), *la différence* Δ_1 *entre* 2 *nombres premiers consécutifs* ϖ_1, ϖ_2 ($\varpi_2 > \varpi_1$) *satisfait à*

$$\Delta_1 \leqq 4 (\log_{10} \varpi_2)^2 - 2,$$

quand $\varpi_2 > 17$. *De même, la différence* Δ_2 *entre un nombre quelconque* $d > 13$ *et le nombre premier* p *immédiatement inférieur à* $d - 2$ *est telle que*

$$\Delta_2 \leqq 4 (\log_{10} d)^2.$$

Corollaire II. — *On a*

$$\nu \leqq 4 (\log_{10} d)^2,$$

quand $13 < d < 9.10^6$.

C'est là, bien entendu, jusqu'à nouvel ordre, une formule empirique.

Il est bon de signaler ici que δ_i doit croître indéfiniment avec x_i, ainsi que l'ont remarqué MM. Glaisher [1] et E. Lucas [2].

En effet, si p est premier impair, les nombres $p! + i (i = 2, 3, \ldots, p + 1)$ ne

---

(1) *Mess., loc., cit.*, p. 106.

(2) *Mess., loc. cit.*, vol. VIII, 1879, p. 81.

sont pas premiers. Quand

$$d = p! + p + 4 = \left(\frac{p}{e}\right)^{p+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi e}(1+\varepsilon),$$

$$\Delta_2 \geqq p + 3;$$

$$\log d = (p + \tfrac{1}{2})(\log p - \log e)(1+\varepsilon') = p \log p (1+\varepsilon'');$$

$$\log \log d = \log p + \log \log p + \log(1+\varepsilon'') = \log p(1+\varepsilon''');$$

$$p = \frac{\log d}{\log \log d}(1+\varepsilon^{(\text{IV})}).$$

Finalement, pour une infinité de valeurs de d,

$$\Delta_2 \geqq \frac{\log d}{\log \log d}(1+\varepsilon^{(\text{V})}),$$

($\lim \varepsilon^{(j)} = 0$ pour $d = \infty$) et Δ_2 croît indéfiniment avec d.

On peut améliorer un peu cette limite inférieure en considérant, au lieu des nombres $p! + i$, les nombres $2.3.5.7.11\ldots p + i$, où figure seulement le produit des nombres premiers au plus égaux à p. En remarquant que, si

$$\theta(p) = \log_e 2.3\ldots p,$$

on a, d'après Tchebychef [1],

$$(1+\eta)Ap < \theta(p) < (1+\eta_1)\tfrac{6}{5}Ap, \quad (A = 0{,}92129\ldots, \lim \text{ de } \eta \text{ et } \eta_1 = 0 \text{ pour } d = \infty),$$

on trouverait

$$\Delta_2 \geqq \lambda \log_{10} d \qquad (\lambda \text{ fini})$$

pour une infinité de valeurs de d.

III. — On sait [2] que si un groupe G de degré d est ν fois transitif $\left(\frac{d}{2} \geqq \nu \geqq 2\right)$, sa classe u est limitée inférieurement en fonction de $d\left(u \geqq \frac{n}{4}, \text{ quand } n > 29\right)$. On peut se demander si un théorème analogue n'a pas lieu pour la transitivité entre les combinaisons de ν lettres. Nous allons établir le théorème suivant, qui permet de répondre affirmativement, mais est, sans doute, susceptible de perfectionnements :

---

(1) *Journal de mathématiques*, 1852, p. 379, ou SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, 5e édition, 1885, p. 236. L'emploi de la formule d'Halphen, $\theta(p) = p(1+\varepsilon^{(\text{VI})})$ (HADAMARD, *Bulletin de la Société mathématique*, 1896, p. 217) conduit à une inégalité de même forme.

(2) A. BOCHERT, *Math. Ann.*, t. XL, 1892, p. 181.

Théorème. — *Si un groupe* G, *de degré* d, *est transitif entre les combinaisons de ses lettres* ν *à* $\nu\left(\frac{d}{2} \geqq \nu \geqq 2\right)$, *il est primitif; par suite* (¹) *sa classe* u *est limitée inférieurement en fonction de* d.

En effet, supposons que G admette une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité de k lettres,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k; \quad a_{k+1}, \quad \ldots, \quad a_{2k}; \quad \ldots, \qquad \text{et} \qquad d = k\delta \geqq 2k.$$

On peut écrire

$$\nu = kl + m \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqq m < k.$$

Prenons la combinaison c_1

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_k; \quad a_{k+1}, \quad \ldots, \quad a_{2k}; \quad \ldots; \quad a_{kl+1}, \quad \ldots, \quad a_{kl+m}:$$

si $m = 0$ ou 1, $l \geqq 1$; $kl + m = \nu \leqq \frac{d}{2}$.

Supposons d'abord que, en dehors des $l+1$ systèmes d'imprimitivité (l si $m = 0$) qui ont des lettres dans c_1, il y en ait au moins 2 autres, c'est-à-dire $(l+3)k \leqq d$ (quand $m = 0$, $(l+2)k \leqq d$). Ceci aura toujours lieu, puisque $2kl + 2m \leqq d$, $d \geqq 2kl + k$, dès que $(l+3)k \leqq 2kl + k$, c'est-à-dire $l \geqq 2$ (quand $m = 0$, $2kl \leqq d$, dès que $(l+2)k \leqq 2kl$, ou $l \geqq 2$).

Nous pourrons trouver une combinaison c_2 contenant les lettres de c_1, sauf 2, arbitrairement choisies, et de plus 2 lettres a_i, a_j appartenant à 2 systèmes différents et différents de ceux qui ont des lettres communes avec c_1 : il y a une substitution S remplaçant c_1 par c_2; elle substitue à une des lettres $a_1, \ldots, a_{kl}$ la lettre a_i ou a_j, et à une lettre du même système une des lettres $a_1, \ldots, a_{kl+m}$, c'est-à-dire que G n'admettrait pas la répartition en systèmes considérée.

Supposons alors $l < 2$:

1° $l = 1$, $1 \leqq m \leqq k - 1$, $d \geqq 2k + 2m$, $d \geqq 4k$ ou $d = 3k$.

Si $d \geqq 4k$, $(l+3)k = 4k \leqq d$, et le même raisonnement réussit.

Si $d = 3k$, soit $k > 2$, $d > 6$ (pour $d \leqq 6$, le théorème résulte du théorème qui suit); nous prendrons 2 lettres a_j, $a_{j'}$ appartenant au troisième système; il y a une substitution T remplaçant $a_1, \ldots, a_{k+m}$ par ces mêmes lettres, moins deux arbitraires appartenant au premier système, et par a_j, $a_{j'}$. Parmi les $k+m$ nouvelles lettres, il y en a forcément, puisque $k > 2$, une appartenant au premier système. Les lettres $a_1, \ldots, a_{k+m}$ comprennent les lettres de 2 systèmes, les lettres substituées, celles de 3 systèmes : résultat absurde.

(¹) Jordan, *J. für Math.*, t. LXXIX, 1875, p. 248-258.

2° $l=1, m=0$, $d \geqq 2k$. Quand $d \geqq 3k$, on raisonne comme quand $l \geqq 2$; quand $d=2k$, on raisonne comme pour $l=1$, $m>0$.

3° $l=0$, $\nu=m \leqq k-1$, $d \geqq 2m$, $d \geqq 2k$.

Si $d \geqq 3k$, on peut raisonner à peu près comme quand $l \geqq 2$. Soit donc $d=2k$: $a_1, \ldots, a_{m-1} a_m$ appartiennent au premier système; il y aurait une substitution S remplaçant $a_1, \ldots, a_{m-1} a_m$ par $a_1, \ldots, a_{m-1} a_j$ où a_j appartient au deuxième système, ce qui est absurde. C. Q. F. D.

Nous allons encore établir le théorème suivant :

Théorème — *Soit* G *un groupe de substitutions de degré d, transitif entre les combinaisons de ses lettres* 3 *à* 3 *ou* 2 *à* 2 : G *est primitif. S'il n'est pas* 2 *fois transitif, d est impair, et le sous-groupe de ses substitutions laissant une lettre* a_1 *immobile permute transitivement entre elles les* $d-1$ *autres lettres* $\frac{d-1}{2}$ *à* $\frac{d-1}{2}$.

En effet, soit G un groupe de substitutions de degré d entre les lettres

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_d;$$

supposons ce groupe transitif entre les combinaisons 2 à 2 de ces lettres, et soit H_{a_1} le sous-groupe des substitutions de G qui laissent a_1 immobile. Le cas où G serait transitif entre les combinaisons 3 à 3 se ramène à celui-là (théorème de la page 335).

H_{a_1} est d'ordre $\mathcal{H}$, et ses substitutions sont

$$1=h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_{\mathcal{H}};$$

elles permutent entre elles, transitivement, $\theta-1$ des lettres $a_2, \ldots, a_d$ autres que a_1, par exemple

$$a_2, \quad \ldots, \quad a_\theta.$$

Désignons par $s_{\lambda\mu}$ la combinaison $a_\lambda a_\mu$: si g_2 remplace a_1 par a_{λ_1}, et

$$s_{12}, \quad \ldots, \quad s_{1\theta},$$

par

$$s_{\lambda_1\lambda_2}, \quad \ldots, \quad s_{\lambda_1\lambda_\theta},$$

$h_j g_2$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ a_1 & a_k & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_k & \ldots \\ a_{\lambda_1} & a_{\lambda_k} & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ a_{\lambda_1} & a_{\lambda_k} & \ldots \end{pmatrix}$$

$(k=2, 3, \ldots, \text{ou } \theta)$, et remplace s_{12} par une des combinaisons $s_{\lambda_1\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_1\lambda_\theta}$.

Formant le tableau des substitutions de G

$$\left\{\begin{array}{llll} h_1, & h_2, & \ldots, & h_{\mathcal{K}}, \\ h_1 g_2, & h_2 g_2, & \ldots, & h_{\mathcal{K}} g_2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots, \\ h_1 g_d, & h_2 g_d, & \ldots, & h_{\mathcal{K}} g_d, \end{array}\right.$$

où $h_1 g_i = g_i$ est une substitution n'appartenant pas aux lignes précédentes, on voit que ces substitutions remplacent s_{12} par au plus $d\theta$ combinaisons distinctes. Or, G est transitif entre les combinaisons 2 à 2, $s_{\lambda\mu}$, au nombre de $d\frac{d-1}{2}$, en sorte que $d\theta \geqq d\frac{d-1}{2}$, $\theta \geqq \frac{d-1}{2}$.

Si $\theta = d-1$, G est 2 fois transitif; sinon, nous opérerons sur $a_1 a_{\theta+1}$ comme nous venons de le faire sur $a_1 a_2$, et nous trouverons encore que H_{a_1} permute $a_{\theta+1}$ avec $\theta' \geqq \frac{d-1}{2}$ lettres distinctes, et forcément distinctes de $a_2, \ldots, a_\theta$.

Or $\theta + \theta' \leqq d-1$; donc $\theta = \theta' = \frac{d-1}{2}$, d impair.

Enfin, G est primitif; en effet, il en est bien ainsi quand G est 2 fois transitif; si G n'est pas 2 fois transitif, soit G imprimitif : G devrait admettre une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité δ à δ, δ divisant d : H_{a_1} permute entre elles les lettres du système de non-primitivité dont fait partie a_1, et ce système comprendrait au moins $1 + \frac{d-1}{2}$ lettres, ce qui serait absurde. G est donc toujours primitif. C. Q. F. D.

Nous avons vu (¹) qu'il y avait des groupes de substitutions G entre d lettres (d premier $= 4h+3$) qui ne sont pas 2 fois transitifs, et qui permutent transitivement les combinaisons de leurs lettres 2 à 2. De même, il y a des groupes G entre d lettres qui ne sont pas 3 fois transitifs, et qui permutent transitivement les combinaisons de leurs lettres 3 à 3.

En effet, nous allons obtenir ce résultat :

Théorème. — *Le groupe de degré $p+1$ (p premier) et d'ordre $\frac{(p+1)p(p-1)}{2}$ formé des substitutions linéaires fractionnaires* (mod p) *dont le déterminant est résidu quadratique* (mod p) *et qui n'est que 2 fois transitif entre ses $p+1$ indices, permute transitivement les combinaisons* 3 *à* 3 *de ses $p+1$ indices quand $p = 4h+3$.*

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, 1896, p. 90 et ci-dessus, p. 334.

En effet, considérons le groupe G des substitutions linéaires fractionnaires

$$\left| z, \frac{az+b}{a'z+b'} \right| \quad (\operatorname{mod} p), \qquad ab'-ba' \not\equiv 0,$$

où p est premier, 3 fois transitif, de degré $p+1$ entre les nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1, \infty$, et d'ordre $\mathcal{G} = (p+1)p(p-1)$. Soit $p = 4h+3$.

L'ensemble des substitutions de ce groupe dont le déterminant est résidu quadratique $(\operatorname{mod} p)$ forme un groupe G_1 deux fois transitif, qui ne contient pas la substitution $|z, -z|\,(\operatorname{mod} p)$, et qui est d'ordre $\frac{(p+1)p(p-1)}{2} = \mathcal{G}_1 = \frac{\mathcal{G}}{2}$.

G opère entre les combinaisons 3 à 3 de ses nombres ou indices les substitutions d'un groupe transitif F de degré C^3_{p+1}. Le sous-groupe L des substitutions de G laissant une de ces combinaisons, $0, 1, -1$, immobile est d'ordre 6; ce sous-groupe comprend la substitution $|z, -z|\,(\operatorname{mod} p)$, dont le déterminant, pour $p = 4h+3$, n'est pas résidu quadratique $(\operatorname{mod} p)$. Le sous-groupe M de G_1 laissant la combinaison $0, 1, -1$ immobile est formé des substitutions de L dont le déterminant est résidu quadratique $(\operatorname{mod} p)$, c'est-à-dire est d'ordre 3. Donc G_1 permute transitivement entre elles au moins

$$\frac{\mathcal{G}_1}{3} = C^3_{p+1}$$

combinaisons 3 à 3, c'est-à-dire est transitif entre ces combinaisons.

Remarque. — Ce qui précède suggère l'idée suivante :

Un groupe G *transitif entre les combinaisons* ν *à* ν *de ses lettres, n'est-il pas* $\nu - 1$ *fois transitif?*

Si l'on pouvait répondre affirmativement, on en déduirait certains des résultats précédents comme corollaires.

Inversement, ce qui précède peut aider à élucider cette question.

IX.

INDICATION DE SUJETS A ÉTUDIER COMME CONSÉQUENCE DE CE QUI PRÉCÈDE ([1]).

I. — Détermination plus complète de la classe des substitutions d'ordre 2, ou

---

([1]) Nous nous contenterons de signaler l'application immédiate des théorèmes I, etc. aux équations de la division des fonctions elliptiques, hyperelliptiques, à l'équation modulaire (JORDAN, *Traité*, p. 343, 344, 354).

même d'ordre $\neq 2$, des groupes connus, en particulier pour les groupes linéaires à n indices (mod m), m étant quelconque, pour les groupes orthogonaux, abéliens, hypoabéliens (indices réels ou imaginaires) et pour les groupes de Steiner (*voir* p. 323 ci-dessus). Consulter Jordan, *Traité des substitutions* et L.-E. Dickson, *Linear Groups*, Leipzig, Teubner, 1901.

II. Détermination de la classe des mêmes groupes ou d'une limite inférieure de cette classe.

III. Extensions du théorème II au cas où le module r est quelconque : la même marche, avec des modifications convenables, est peut-être applicable.

IV. Application géométrique des théorèmes I, II, III, etc., et des déterminations proposées ci-dessus à d'autres théorèmes de Clebsch (Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 63 et 64; Clebsch et Lindemann, *Leçons sur la Géométrie*, traduction Benoist, Paris, Gauthier-Villars; Jordan, *Traité des substitutions*, Livre III, Chap. III), aux travaux de M. Humbert sur la Géométrie (par exemple, *Journal de Mathématiques*, 1886, p. 308 et suivantes).

V. Continuation de l'étude de la transitivité entre les combinaisons de ν lettres ou de la transitivité incomplète. En particulier, si un groupe G, de degré d, est transitif entre les combinaisons de ν lettres $\left(\nu \leqq \frac{d}{2}\right)$, l'est-il, *en général*, entre les combinaisons de ν' lettres ($\nu' < \nu$), ou peut-on citer des cas où cette propriété n'ait pas lieu?

Quand $\nu \geqq 2$, 3, 4, peut-on assigner une limite inférieure à la classe u de G, analogue à la limite inférieure de la classe trouvée par M. A. Bochert (*Math. Annalen*, t. XL, 1892, p. 176 et suivantes), pour les groupes 2, 3, 4 fois transitifs? Peut-on trouver pour ν une limite supérieure en fonction de d, *quel que soit d*, analogue à celle indiquée par MM. A. Bochert (*Math. Annalen*, t. XXIX, XXXIII et XL) et Jordan (*Journal de Mathématiques*, 1895, p. 35).

G n'est-il pas $\nu - 1$ fois transitif entre ses d lettres?

VI. Soit

$$\Phi = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_\lambda \ldots x_{\lambda'} \qquad (\lambda' > \lambda)$$

une somme de produits de d lettres $x_1, x_2, \ldots, x_d$, ces produits contenant une fois, et une seule, chaque combinaison de λ lettres, mais non toutes les combinaisons de $\lambda + 1$ lettres : étude des groupes de substitutions entre d lettres

laissant Φ invariable. Sont-ils transitifs, et dans quels cas? Classe des substitutions de ces groupes. Applications géométriques, s'il y a lieu.

Cas où $\lambda = 2$, $\lambda' = 3$ (*Comparer* JORDAN, *Traité des substitutions,* Livre III, Chap. III, en particulier, ses systèmes de trios; et NETTO, *Substitutionentheorie, Tripelnsysteme* ou NETTO-BATTAGLINI, *Teoria delle Sostituzioni*, *equazione ternaria,* p. 220).

Bourg-la-Reine, avril 1904.



TABLE DES MATIÈRES (Fascicule N° 3, 1904).

34813 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.



ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1904.

PARIS.
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE.
ED. PRIVAT,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1904

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

Quatrième fascicule.



THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS FONDAMENTALES,

Par M. W. STEKLOFF.

INTRODUCTION.

1. La solution de la plupart des questions de la Physique mathématique se ramène à la détermination d'une fonction dépendant du temps t et des coordonnées rectangulaires x, y, z et vérifiant dans un domaine donné (D), limité par une surface fermée (S), telle ou telle équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre jointe à certaines conditions aux limites ainsi qu'à certaines conditions initiales correspondant à une valeur donnée de la variable t (par exemple $t = 0$).

La plupart de ces équations différentielles peuvent être partagées en deux catégories différentes : les unes se représentent sous cette forme générale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + d\frac{\partial U}{\partial x} + e\frac{\partial U}{\partial y} + f\frac{\partial U}{\partial z} + gU = 0, \tag{1}$$

les autres sous la forme suivante

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + d\frac{\partial U}{\partial x} + e\frac{\partial U}{\partial y} + f\frac{\partial U}{\partial z} + gU = 0, \tag{2}$$

où a, b, c, d, e, f, g sont les fonctions données des variables x, y, z. Divers problèmes de l'Hydrodynamique, de l'Acoustique, de l'Électricité et du Magnétisme, de l'Élasticité, etc. dépendent de l'intégration des équations de première espèce (1), la solution de plusieurs questions de la théorie analytique de la chaleur se ramène à l'intégration des équations de seconde espèce (2).

Rappelons quelques cas les plus simples et les plus importants. Posons dans (1),

$$a = b = c = -k, \qquad d = e = f = g = 0;$$

il viendra

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = k\,\Delta U = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \qquad k > 0. \tag{3}$$

C'est l'équation du mouvement vibratoire d'une masse gazeuse renfermée dans un vase solide.

Faisant les mêmes suppositions dans (2), nous obtiendrons

$$(4) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = k\,\Delta U,$$

l'équation de refroidissement d'un corps solide.

Supposons, par exemple, que le vase solide reste immobile. Le problème de l'Acoustique se ramène à la détermination d'une fonction U des quatre variables t, x, y, z vérifiant l'équation (3) et satisfaisant aux conditions

$$(5) \qquad \frac{\partial U_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)},$$

$$(6) \qquad U = f(x, y, z), \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = f_1(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

où f et f_1 désignent des fonctions données; (S) désigne la surface du vase, n la direction de la normale extérieure à (S), le symbole

$$\frac{\partial U_i}{\partial n}$$

désigne la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(n, z),$$

lorsque le point x, y, z tend vers un point de (S) en restant constamment à l'intérieur de (S) (sur la normale n).

Quant au problème de la chaleur, il se ramène à la détermination d'une fonction U satisfaisant à l'équation (4) jointe aux conditions

$$(7) \qquad \frac{\partial U_i}{\partial n} + hU = 0 \quad \text{sur (S)},$$

$$(8) \qquad U = f(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

où h est une constante positive.

Dans les cas limites, la constante h peut se réduire à zéro ou à l'infini; dans le cas de $h = 0$, la condition (7) se réduit à (5); dans le cas de $h = \infty$, elle se remplace par la suivante :

$$(9) \qquad U = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Si la fonction U ne dépend pas de t, les équations (1) et (2) se réduisent à la

suivante :

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+d\frac{\partial U}{\partial x}+e\frac{\partial U}{\partial y}+f\frac{\partial U}{\partial z}+gU=0.$$

Les conditions initiales perdent leur sens et il ne reste que les conditions aux limites; rappelons, pour exemple, les problèmes classiques de Dirichlet et de C. Neumann.

2. Fourier, Cauchy et Lamé furent les premiers qui ont proposé une méthode générale pour résoudre tous les problèmes dont nous avons parlé au début du n° **1**.

Pour expliquer les principes de cette méthode, il suffit de considérer certains exemples les plus simples.

Posons dans (3)

$$U=V(A\cos\lambda t+B\sin\lambda t),$$

A et B étant des constantes arbitraires, λ un nombre positif, V une fonction ne dépendant que de x, y, z.

Substituant cette expression de U dans (3) et (5), il viendra

$$\Delta V+\frac{\lambda^2}{k}V=0 \quad \text{à l'intérieur de (S)},$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n}=0 \quad \text{sur (S)}.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que k soit égal à une constante positive. Supposons ensuite qu'il existe une infinité de nombres positifs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_k, \quad \ldots$$

vérifiant les équations

$$(10) \qquad \Delta V_k+\lambda_k V_k=0 \quad \text{à l'intérieur de (S)} \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

jointes aux conditions

$$(11) \qquad \frac{\partial V_{ki}}{\partial n}=0 \quad \text{sur (S)} \qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

La série

$$U=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(A_k\cos t\sqrt{k\lambda_k}+B_k\sin t\sqrt{k\lambda_k})+B_0 t,$$

B_0, A_k et B_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) étant des constantes, représentera la solution du problème, si nous choisissons les A_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) et B_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) de façon que l'on ait

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k = f(x, y, z), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k\lambda_k}\, B_k V_k + B_0 = f_1(x, y, z).$$

La même méthode s'applique à l'équation de la chaleur (4); il suffit de poser

$$(13) \qquad U = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k e^{-k\lambda_k t},$$

où V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) sont les fonctions de x, y, z satisfaisant aux conditions

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\Delta V_k + \lambda_k V_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)}, \\ &\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} + h\, V_k = 0 \quad \text{sur (S)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

La série (13) représentera la solution du problème, si nous choisissons les constantes A_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) de façon que la première des équations (12) soit satisfaite.

La méthode dont il s'agit s'applique aussi au cas où la fonction cherchée U ne dépend pas de t.

Rappelons, pour exemple, le problème de Dirichlet :

Trouver une fonction de x, y, z vérifiant l'équation

$$(15) \qquad \Delta U = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (S)$$

et se réduisant à la fonction donnée f sur (S).

Soit V_k une solution particulière de l'équation (15); l'expression $A_k V_k$, A_k étant une constante, le sera aussi.

La série

$$(16) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k$$

représentera la solution générale, si nous choisissons les solutions simples V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) et les constantes A_k de façon que cette série soit convergente à l'intérieur de (S) et se réduise à la fonction donnée f sur (S).

La même méthode s'applique aux autres problèmes analogues, par exemple au problème de Neumann.

3. On voit, par ce qui précède, que le problème se partage, en général, en deux parties principales :

(A). *Démontrer l'existence d'une infinité de solutions simples des équations du problème (en faisant abstraction des conditions initiales).*

(B). *Établir la possibilité du développement d'une fonction donnée* $f(x, y, z)$, *dans un certain domaine* (D), *en séries procédant suivant les fonctions* $V_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$, *auxquelles se réduisent les solutions simples pour* $t = 0$.

Faisons quelques remarques relatives au problème (A) en nous bornant aux cas des équations de l'Acoustique et de la Chaleur. Les solutions simples satisfont, comme nous l'avons vu, aux équations (10).

Si nous prenons les conditions aux limites sous la forme

$$V_k = 0 \quad \text{sur (S)}, \tag{17}$$

nous obtiendrons les fonctions $V_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ dont l'existence a été établie pour la première fois par M. H. Poincaré dans son Mémoire connu : *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti di Palermo,* 1894).

Si nous posons $h = 0$, nous obtiendrons les fonctions $V_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfaisant aux équations (10) jointes aux conditions (11). J'ai établi l'existence de ces fonctions dans mon Mémoire : *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (*Annales de l'École Normale,* 1902) [1].

Supposant enfin que h est une constante différente de zéro, nous obtiendrons les fonctions V_k vérifiant les équations (14). La démonstration de l'existence de ces fonctions se trouve dans divers Mémoires de MM. H. Poincaré, S. Zaremba, A. Korn ainsi que dans mon Mémoire tout à l'heure mentionné.

Il importe de remarquer que toutes les fonctions considérées peuvent être définies par certaines équations fonctionnelles, comme je l'ai déjà montré dans mes recherches antérieures.

Dans le cas (17) on trouve, en effet,

$$V_k = \lambda_k \int G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, V_k(\xi, \eta, \zeta)\, d\tau',$$

l'intégrale, prise par rapport à ξ, η, ζ, étant étendue au domaine (D) tout entier, G désignant la fonction de Green (*voir* H. Poincaré, *loc. cit.*).

Les fonctions, satisfaisant aux conditions (10) et (11), vérifient les équations

$$V_k = \lambda_k \int J(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, V_k(\xi, \eta, \zeta)\, d\tau',$$

---

[1] *Voir* aussi W. Stekloff, *Sur les équations différentielles de la Physique mathématique* [*Recueil mathématique de Moscou,* 1896 (en russe)].

où J désignent une fonction symétrique en x, y, z et ξ, η, ζ, continue à l'intérieur de (S), sauf pour

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

où elle devient infinie comme $\frac{\mu}{r}$, μ étant une constante, r la distance de deux points $m(x, y, z)$ et $m_1(\xi, \eta, \zeta)$, et satisfaisant aux conditions

$$\Delta J = \frac{1}{D} \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)} \quad (^1),$$

D désignant le volume du domaine (D).

Dans le cas général, où h est une constante positive différente de zéro, on a

$$V_k = \lambda_k \int H(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) V_k(\xi, \eta, \zeta) d\tau',$$

H étant une fonction dont j'ai établi l'existence dans mon Mémoire cité (p. 250), continue dans (D), sauf pour

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

où elle devient infinie comme $\frac{\mu}{r}$, et symétrique en x, y, z; ξ, η, ζ (²).

4. Passons maintenant au cas où la fonction cherchée U ne dépend pas de t (*voir* n° 2) et considérons les solutions simples de l'équation de Laplace correspondant aux problèmes de Dirichlet et de Neumann.

Les fonctions fondamentales de M. H. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XX), les fonctions de M. Éd. Le Roy (*Annales de l'École Normale*, 1898-1899) et les fonctions fondamentales dont j'ai établi l'existence en 1899 (³), représentent ces solutions simples de l'équation de Laplace.

On pourrait démontrer que toutes les fonctions considérées satisfont aux

---

(¹) W. Stekloff, *Sur les problèmes fondamentaux, etc.* (*Annales de l'École Normale*, 1902, p. 248).

(²) Rappelons que H satisfait aux conditions

$$\Delta H = 0, \qquad \frac{\partial H_i}{\partial n} + hH = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

(³) W. Stekloff, *Sur l'existence des fonctions fondamentales* (*Comptes rendus*, 27 mars 1899).

équations de la forme

$$V_k = \lambda_k \int p(\xi, \eta, \zeta)\, G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, V_k(\xi, \eta, \zeta)\, ds',$$

l'intégrale étant étendue à la surface donnée (S).

On a, par exemple, pour les fonctions de M. Le Roy,

$$V_k = \lambda_k \int p(\xi, \eta, \zeta)\, \frac{1}{r}\, V_k(\xi, \eta, \zeta)\, ds',$$

où p est une fonction positive ne s'annulant pas et continue sur (S).

5. On voit, par ce qui précède, que toutes les fonctions dont il s'agit se partagent en deux catégories :

Les unes, que nous désignerons, en général, par V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), ont cette propriété commune : elles satisfont aux équations fonctionnelles de la forme

$$V_k = \lambda_k \int p(\xi, \eta, \zeta)\, G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, V_k(\xi, \eta, \zeta)\, d\tau',$$

où λ_k sont des constantes, p est une fonction continue positive et ne s'annulant pas dans le domaine (D), G est une fonction symétrique en x, y, z et ξ, η, ζ, continue en tous les points de (D), sauf pour le point

$$x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta,$$

où elle devient infinie comme la fonction $\frac{\mu}{r}$.

Les autres, que nous désignerons, en général, par W_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), vérifient les équations suivantes

$$W_k = \mu_k \int q(\xi, \eta, \zeta)\, J(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, W_k(\xi, \eta, \zeta)\, ds',$$

où μ_k sont des constantes, q et J les fonctions jouissant des mêmes propriétés par rapport aux points de la surface (S) que les fonctions p et G par rapport aux points du domaine (D), limité par (S).

6. Il est naturel maintenant de poser ces questions générales :

1° Peut-on trouver, pour chaque domaine (D), limité par une surface donnée (S), et pour toutes les fonctions données $p(x, y, z)$ et $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$, satisfaisant aux conditions générales énoncées dans le numéro précédent, une

CHAPITRE I.

REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

1. Désignons par (S) une surface fermée satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *En tout point de* (S) *il existe un plan tangent déterminé;*

2° *Autour de chaque point p de* (S) *on peut décrire une sphère* (σ) *d'un certain rayon* D, *assez petit mais déterminé, de telle façon qu'une parallèle à la normale à* (S) *en p ne puisse rencontrer la surface* (S), *à l'intérieur de* (σ), *qu'en un seul point ;*

3° *L'angle aigu que font les normales à* (S), *en deux points quelconques p et p' de* (S), *est plus petit que ar, a désignant un nombre fixe ne dépendant pas de la position des points p et p' sur* (S), *r désignant la distance pp'.*

On sait que le *principe de Neumann* s'applique à toute surface (S) jouissant des propriétés énoncées.

On peut donc résoudre le problème de Dirichlet pour toute surface (S) appartenant à la classe considérée, c'est-à-dire trouver une expression analytique de la fonction U satisfaisant aux conditions

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{à l'intérieur ou à l'extérieur de (S),}$$

$$U = f(x, y, z) \quad \text{sur (S),}$$

quelle que soit la fonction donnée f, *continue* sur (S).

Cela résulte de diverses recherches de MM. S. Zaremba, A. Liapounoff et W. Stekloff (Voir *Journal de Mathématiques, Annales de l'École Normale, Communications de la Société mathématique de Kharkow, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie,* 1899-1902).

Nous n'allons considérer, pour fixer les idées, que des surfaces satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, mais il est utile de remarquer d'avance que plusieurs résultats de nos recherches, qui vont suivre, resteront vrais pour une classe de surfaces beaucoup plus générale, à savoir pour toutes les surfaces auxquelles s'applique *le principe de Dirichlet* (voir H. Poincaré, *American Journal,* t. XII).

2. Désignons le domaine de l'espace, limité par une surface (S), par (D); le domaine extérieur à (S), nous le désignerons par (D'). Remarquons qu'on peut

considérer (D′) comme une limite d'un domaine, limité par la surface donnée (S) et par une sphère, décrite autour de l'origine des coordonnées, de rayon R, lorsque R tend vers l'infini.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction quelconque de trois variables réelles x, y, z; on peut la considérer comme une fonction du point m de l'espace, en entendant par x, y, z les coordonnées (rectangulaires) du point m.

Nous désignerons une telle fonction simplement par

$$f(m).$$

Toute fonction $F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ de six variables réelles x, y, z et ξ, η, ζ peut être considérée comme une fonction de deux points m et m_1 ayant respectivement x, y, z et ξ, η, ζ pour coordonnées.

Nous désignerons une telle fonction par

$$F(m, m_1).$$

L'intégrale d'une fonction quelconque $F(m, m_1)$, prise par rapport aux variables x, y, z et étendue au domaine (D) tout entier, nous la désignerons par

$$\int F(m, m_1)\, d\tau;$$

l'intégrale analogue, prise par rapport aux variables ξ, η, ζ et étendue au domaine (D), nous la désignerons par

$$\int F(m, m_1)\, d\tau',$$

$d\tau$ et $d\tau'$ étant les éléments de volume du domaine (D).

Désignons encore par

$$\int F(m, m_1)\, dT$$

l'intégrale, prise par rapport à $m(x, y, z)$ et étendue au domaine, composé de deux domaines (D) et (D′) (c'est-à-dire l'intégrale, étendue à l'espace tout entier).

Désignons enfin par

$$\int F(m)\, d\tau_1,$$

$F(m)$ étant une fonction quelconque du point m, l'intégrale, étendue au domaine (D′), $d\tau_1$ étant l'élément de volume de (D′).

3. Avant d'aller plus loin, signalons un lemme remarquable qui jouera un rôle important dans les recherches qui vont suivre.

Voici l'énoncé du lemme dont il s'agit :

Soit

$$f(m) = \alpha_1 f_1(m) + \alpha_2 f_2(m) + \ldots + \alpha_n f_n(m),$$

où α_s $(s = 1, 2, 3, \ldots, n)$ *sont des constantes indéterminées,* $f_s(m)$ $(s = 1, 2, \ldots n)$ *fonctions du point* m, *linéairement indépendantes et continues avec ses dérivées du premier ordre dans le domaine* (D).

On peut toujours disposer les constantes α_s $(s = 1, 2, 3, \ldots, n)$, *en les assujettissant à vérifier un certain nombre d'équations linéaires et homogènes, de telle manière que le rapport*

$$\frac{\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]d\tau}{\int f^2\, d\tau}$$

soit plus grand qu'un nombre L_n, *ne dépendant que de la surface* (S) [*ne dépendant pas de* $f(m)$] *et infiniment croissant avec l'indice* n, *de sorte que*

$$\lim_{n=\infty} L_n = \infty.$$

Je me permets de ne pas exposer la démonstration que le lecteur trouvera dans le Mémoire bien connu de M. H. Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti di Palermo,* 1894).

J'appellerai ce lemme *lemme fondamental de M. H. Poincaré.*

SOLUTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE FONDAMENTALE.

4. Désignons par $p(m)$ une fonction positive, bornée, intégrable et ne s'annulant pas dans le domaine (D).

On aura, quelle que soit la position du point m dans (D),

$$\alpha < p(m) < \beta, \tag{1}$$

α et β étant des nombres fixes.

Soit $H(m, m_1)$ une fonction de deux points m et m_1 satisfaisant aux conditions suivantes :

(*a*) *Elle est symétrique en* $m(x, y, z)$ *et* $m_1(\xi, \eta, \zeta)$;

(*b*) *Elle reste continue en tous les points* m, INTÉRIEURS *à* (S), *quelle que soit la position du point* m_1 *dans* (D) (*et inversement*);

(*c*) *Il existe un nombre fixe* A *tel qu'on ait*

$$\int |H(m, m_1)|\, d\tau' < A, \tag{2}$$

quelle que soit la position du point m dans (D) [*les points de la surface* (S) *y compris*].

Désignons par $G(m, m_1)$ la fonction suivante

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{r}, \tag{3}$$

μ étant une constante, r la distance mm_1.

Il est évident que la fonction $G(m, m_1)$ est aussi symétrique en m et m_1.

5. Maintenant, proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Trouver une fonction $V(m)$ *vérifiant l'équation fonctionnelle*

$$V(m) = \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V(m_1)\, d\tau' + f(m), \tag{4}$$

$f(m)$ étant une fonction donnée, bornée et intégrable à l'intérieur de (D), *λ étant un paramètre.*

L'équation (4) représente une généralisation de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \psi(x),$$

étudiée par M. I. Fredholm, sous certaines suppositions très générales par rapport à la fonction $f(x)$, dans son Mémoire : *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta mathematica,* t. XXVII, p. 365) (¹).

J'emploierai, dans mes recherches, une autre méthode, différente de celle de M. I. Fredholm, à savoir la méthode de Schwarz-Poincaré (*Rendiconti di Palermo,* 1894).

J'imposerai encore certaines restrictions à la fonction $G(m, m_1)$ dont j'ai déjà signalé quelques-unes au numéro précédent, sans traiter le problème dans toute sa généralité, mais les restrictions dont il s'agit sont justifiées par les applications de l'équation (4) à la Physique mathématique, comme nous verrons cela plus tard.

Moyennant la méthode de Schwarz-Poincaré, cherchons $V(m)$ sous la forme de la série

$$V(m) = v_0(m) + \lambda v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \ldots + \lambda^k v_k(m) + \ldots, \tag{5}$$

où $v_k(m)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les fonctions du point m.

(¹) *Voir* aussi D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* Heft I, 1904). — V. Volterra, *Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti* (*Annali di Matematica*, t. XXV).

Substituant cette expression de $V(m)$ dans (4), on trouve

$$(6)\qquad v_0(m)=f(m),$$

$$(6_1)\qquad v_k(m)=\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,v_{k-1}(m_1)\,d\tau' \qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

Désignons par J_k $(k=0,1,2,3,\ldots)$ l'intégrale suivante

$$(7)\qquad J_k=\int p(m)\,v_k^2(m)\,d\tau>0.$$

De l'égalité (6_1) on tire

$$(7_1)\qquad v_k^2(m)\leqq\int p(m_1)\,G^2(m,m_1)\,d\tau'\int p(m_1)\,v_{k-1}^2(m_1)\,d\tau'=J_{k-1}\int p(m_1)\,G^2(m,m_1)\,d\tau',$$

où, en vertu de (3),

$$\int p(m_1)\,G^2(m,m_1)\,d\tau'<2\int p(m_1)\left[H^2(m,m_1)+\frac{\mu^2}{r^2}\right]d\tau'.$$

Désignons par (S_i) une surface fermée intérieure à (S), par (D_i) le domaine limité par (S_i).

D'après l'hypothèse faite par rapport à $H(m,m_1)$, on peut assigner un nombre fixe A_1^2, tel qu'on ait

$$(2_1)\qquad \int H^2(m,m_1)\,d\tau'<A_1^2,$$

pour tous les points intérieurs à la surface (S_i) qui peut être si voisine de (S) qu'on le veut.

D'autre part, on sait que

$$\int\frac{d\tau'}{r^2}<2\pi l,$$

l désignant la plus grande distance de deux points de (S).

On trouve donc, eu égard à (1),

$$(2_2)\qquad \int p(m_1)\,G^2(m,m_1)\,d\tau'<2\beta(A_1^2+2\pi\mu^2 l)=Q^2,$$

quelle que soit la position du point m dans le domaine (D_i).

On a donc, eu égard à (7_1),

$$(8)\qquad v_k^2(m)<Q^2 J_{k-1}.$$

On peut dire, en se rappelant les propriétés de la surface (S_i), que cette inégalité a lieu pour tous les points m, *intérieurs* au domaine (D).

6. Reprenons l'équation (6_1) et posons

$$S = \int p(m_1) H(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau',$$
$$R = \mu \int \frac{p(m_1) v_{k-1}(m_1)}{r} d\tau'.$$

On trouve, en vertu de (1) et (2),

$$S^2 \leqq \int p(m_1) | H(m, m_1) | d\tau' \int p(m_1) | H(m, m_1) | v_{k-1}^2(m_1) d\tau'$$
$$< \beta A \int p(m_1) | H(m, m_1) | v_{k-1}^2(m_1) d\tau'.$$

D'autre part,

$$R^2 < 2\pi\mu^2 l \beta J_{k-1},$$

et, par suite,

$$v_k^2(m) < 2(S^2 + R^2) < 2\beta\left[A \int p(m_1) | H(m, m_1) | v_{k-1}^2(m_1) d\tau' + 2\pi\mu^2 l J_{k-1}\right],$$

d'où, eu égard à (2),

$$\int p(m) v_k^2(m) d\tau = J_k < 2\beta^2 (A^2 + 2\pi\mu^2 l D) J_{k-1} = B^2 J_{k-1}, \tag{9}$$

D désignant le volume du domaine (D).

7. Multiplions maintenant (6_1) par $p(m) v_k(m) d\tau$ et intégrons, en étendant l'intégration au domaine (D).

On trouve, eu égard à (7),

$$J_k = \int p(m) v_k(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau' \right) d\tau,$$

d'où l'on tire, en échangeant l'ordre des intégrations,

$$J_k = \int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \left(\int p(m) G(m, m_1) v_k(m) d\tau \right) d\tau'$$
$$= \int p(m_1) v_{k-1}(m_1) v_{k+1}(m_1) d\tau',$$

car la fonction $G(m, m_1)$ est symétrique en m et m_1.

De cette égalité on tire l'inégalité suivante

$$J_k^2 \leqq J_{k-1} J_{k+1}, \tag{10}$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de l'indice $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Les inégalités (9) et (10) donnent

$$\frac{J_1}{J_0} < \frac{J_2}{J_2} < \frac{J_3}{J_3} < \ldots < \frac{J_k}{J_{k-1}} < \ldots < B^2. \tag{11}$$

8. Comparons maintenant les séries

$$(5_1) \qquad V'(m) = v_1(m) + \lambda v_2(m) + \ldots + \lambda^{k-1} v_k(m) + \ldots$$

et

$$Q\sqrt{J_0} + Q\lambda\sqrt{J_1} + Q\lambda^2\sqrt{J_2} + \ldots + Q\lambda^{k-1}\sqrt{J_{k-1}} + \ldots,$$

dont la dernière converge, pourvu que

$$|\lambda| < \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J_{k-1}}}{\sqrt{J_k}} = \rho_0,$$

où, en vertu de (9),

$$\rho_0 > \frac{1}{B}$$

est un nombre positif, *différent de zéro, quelle que soit la fonction* $f(m)$. On en conclut, eu égard à (8), que *la série* (5_1) *converge absolument et uniformément à l'intérieur de* (D), *pourvu que*

$$(12) \qquad |\lambda| < \rho_0 = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J_{k-1}}}{\sqrt{J_k}}.$$

Donc la série (5_1) représente une fonction $V'(m)$ continue à l'intérieur du domaine (D) pour les valeurs du paramètre λ satisfaisant à la condition (12).

9. Quant à la série (5), elle représente une fonction bornée et intégrable dans (D).

Si nous supposons que $f(m)$ soit continue à l'intérieur de (D), il en sera de même de la fonction $V(m)$, car, en vertu de (6), (5) et (5_1),

$$V(m) = f(m) + \lambda V'(m).$$

Il ne reste qu'à prouver que la fonction trouvée $V(m)$ satisfait à l'équation (4).

Remplaçons dans (5) m par m_1, multiplions l'égalité ainsi obtenue par $p(m_1)\,G(m, m_1)$ et intégrons-la.

On trouve, en se rappelant que la série (5_1) converge uniformément dans (D),

$$\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,V(m_1)\,d\tau' = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int p(m_1)\,G(m, m_1)\,v_k(m_1)\,d\tau',$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (5), (6) et (6_1),

$$\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,V(m_1)\,d\tau' = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} v_{k+1}(m) = \frac{1}{\lambda}[V(m) - v_0(m)]$$

ou

$$V(m) = \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V(m_1)\, d\tau' + f(m);$$

c'est précisément l'équation (4). C. Q. F. D.

10. Supposons maintenant, pour plus de simplicité, que la fonction $f(m)$ soit continue dans (D).

Considérons $V(m)$ comme une fonction du paramètre λ et désignons par ρ le rayon de la convergence absolue et uniforme de la série (5).

L'inégalité (12) montre que

(13) $$\rho \geqq \rho_0.$$

Montrons que ρ *est précisément égal à* ρ_0.

Posons, en général,

(14) $$J_{r,s} = \int p(m)\, v_r(m)\, v_s(m)\, d\tau,$$

r et s étant des entiers quelconques.

On trouve, conformément aux notations du n° 5 [l'égalité (7)],

(15) $$J_{r,r} = J_r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Remplaçons dans (6_1) k par s, multiplions le résultat ainsi obtenu par $p(m)\, v_r(m)\, d\tau$ et intégrons.

On obtient

$$\begin{aligned} J_{r,s} &= \int p(m)\, v_r(m) \left(\int p(m_1)\, G(m, m_1)\, v_{s-1}(m_1)\, d\tau' \right) d\tau \\ &= \int p(m_1)\, v_{s-1}(m_1) \left(\int p(m)\, G(m, m_1)\, v_r(m)\, d\tau \right) d\tau' \\ &= \int p(m_1)\, v_{s-1}(m_1)\, v_{r+1}(m_1)\, d\tau' = J_{r+1, s-1}, \end{aligned}$$

d'où

(16) $$J_{r,s} = J_{r+k, s-k},$$

k étant un entier positif, plus petit que s.

Supposons que $s > r$ et que les nombres s et r soient pairs ou impairs à la fois.

On peut toujours poser

$$s = r + 2j,$$

j étant un entier convenablement choisi.

Remplaçant dans (16) k par j, il viendra, eu égard à (15),

(17) $$J_{r,s} = J_{r+j, r+j} = J_{r+j} = J_{\frac{r+s}{2}}.$$

Cela posé, considérons les séries

$$(18) \qquad s_0(m) = v_0(m) + \lambda^2 v_2(m) + \lambda^4 v_4(m) + \ldots + \lambda^{2k} v_{2k}(m) + \ldots,$$

$$(18_1) \qquad s_1(m) = v_1(m) + \lambda^2 v_3(m) + \lambda^4 v_5(m) + \ldots + \lambda^{2k} v_{2k+1}(m) + \ldots$$

Le rayon de la convergence uniforme de ces séries ne surpasse pas celui des séries

$$\int p(m)\, s_0(m)\, v_0(m)\, d\tau = \int p(m)\, v_0^2(m)\, d\tau + \lambda^2 \int p(m)\, v_0(m)\, v_2(m)\, d\tau + \ldots + \lambda^{2k} \int p(m)\, v_0(m)\, v_{2k}(m)\, d\tau + \ldots$$

et

$$\int p(m)\, s_1(m)\, v_1(m)\, d\tau = \int p(m)\, v_1^2(m)\, d\tau + \lambda^2 \int p(m)\, v_1(m)\, v_3(m)\, d\tau + \ldots + \lambda^{2k} \int p(m)\, v_1(m)\, v_{2k+1}(m)\, d\tau + \ldots,$$

qui se réduisent, en vertu de (17), aux suivantes :

$$(18_2) \qquad J_0 + \lambda^2 J_1 + \lambda^4 J_2 + \ldots + \lambda^{2k} J_k + \ldots$$

et

$$(18_3) \qquad J_1 + \lambda^2 J_2 + \lambda^4 J_3 + \ldots + \lambda^{2k} J_{k+1} + \ldots.$$

Supposons que $\lambda > 0$. Chacune de ces dernières séries ne peut converger que pour les valeurs de λ, plus petites que le nombre ρ_0,

$$\rho_0 = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J_{k-1}}}{\sqrt{J_k}}.$$

Donc, les séries (18) et (18_1) ont le même rayon ρ_1 de convergence qui est au plus égal à ρ_0.

Or, le rayon ρ de convergence de la série (5)

$$v_0(m) + \lambda v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \ldots + \lambda^k v_k(m) + \ldots = s_0(m) + \lambda s_1(m)$$

est, évidemment, égal à ρ_1.

Il s'ensuit que

$$\rho = \rho_1 \leqq \rho_0.$$

On a donc précisément, eu égard à (13),

$$\rho = \rho_0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

11. Nous n'avons considéré les valeurs de la fonction $G(m, m_1)$ et des fonctions $v_k(m)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) que pour les points intérieurs à (S). Or, la fonc-

tion $G(m, m_1)$, considérée, par exemple, comme une fonction du point m, peut être prolongée à l'espace extérieur à (S), c'est-à-dire à tous les points du domaine (D'), et cela d'une infinité de manières.

A chaque prolongement déterminé de la fonction $G(m, m_1)$ correspondra un prolongement bien déterminé des fonctions $v_k(m)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, définies par les relations (6_1).

Supposons maintenant que la fonction $H(m, m_1)$ *reste continue avec ses dérivées du second ordre dans le domaine* (D) *tout entier* [les points de la surface (S) y compris].

Dans ce cas, on peut trouver deux nombres fixes A et L, de façon que l'on ait

$$(19) \qquad \int G^2(m, m_1)\,d\tau' < A, \qquad \int [\Delta H(m, m_1)]^2\,d\tau' < L^2,$$

quelle que soit la position du point m dans le domaine (D).

Formons la fonction $U(m, m_1)$ satisfaisant aux conditions

$$\Delta U(m, m_1) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{à l'extérieur de} \quad (S),$$

$$U(m, m_1) = H(m, m_1) \quad \text{sur} \quad (S),$$

et se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien.

C'est le problème extérieur de Dirichlet qui peut être résolu dans le cas considéré, car, d'après les suppositions faites, la surface (S) satisfait aux conditions 1°, 2° et 3° du n° 1 et la fonction $H(m, m_1)$ reste continue sur (S).

Nous supposons toujours que *le point m_1 se trouve dans le domaine* (D).

Prenons maintenant pour $G(m, m_1)$ la fonction, définie par les conditions suivantes :

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{r} \quad \text{à l'intérieur de} \quad (S),$$

$$G(m, m_1) = U(m, m_1) + \frac{\mu}{r} \quad \text{à l'extérieur de} \quad (S).$$

Dans ce cas, *toutes les fonctions $v_k(m)$* $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, définies par les relations (6_1), *seront continues dans l'espace tout entier; leurs dérivées du premier ordre seront continues à l'intérieur et à l'extérieur de la surface* (S).

Désignons par R la distance du point m à l'origine des coordonnées.

On aura, quelle que soit la position du point m dans le domaine (D'), extérieur à (S),

$$R\,|G(m, m_1)| < A,$$

$$R^2 \left| \frac{\partial G(m, m_1)}{\partial x} \right| < B$$

et les inégalités analogues pour les dérivées de $G(m, m_1)$ par rapport à y et à z, A et B étant des nombres fixes.

Par conséquent,

$$R\,|v_k(m)| < \int p(m_1) R\,|G(m, m_1)|\,|v_{k-1}(m_1)|\,d\tau' < A \int p(m_1)\,|v_{k-1}(m_1)|\,d\tau' = A_1,$$

$$R^2 \left|\frac{\partial v_k(m)}{\partial x}\right| < \int p(m_1) R^2 \left|\frac{\partial G(m, m_1)}{\partial x}\right| |v_{k-1}(m_1)|\,d\tau' < B \int p(m_1)\,|v_{k-1}(m_1)|\,d\tau' = B_1,$$

. . . . ,

A_1 et B_1 étant des nombres fixes.

On en conclut que chacune des fonctions $v_k(m)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien.

Il est évident ensuite que *chacune des fonctions* $v_k(m)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *admet les dérivées du second ordre, continues dans* (D'), *et satisfait à l'équation*

$$(20) \qquad \Delta v_k(m) = 0 \quad \text{à l'extérieur de (S).}$$

Supposons encore que *la fonction* $p(m)$ *soit choisie de façon que le potentiel*

$$\int \frac{p(m)\, v_k(m)}{r}\, d\tau$$

admette les dérivées du second ordre à l'intérieur de (D).

Cette condition étant remplie, on trouve

$$(21) \qquad \Delta v_k(m) = -4\pi\mu\, p(m)\, v_{k-1}(m) + \int p(m_1)\, v_{k-1}(m_1)\, \Delta H(m, m_1)\, d\tau'$$

à l'intérieur de (S).

12. Introduisons maintenant les notations suivantes :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Désignons par n la direction de la normale extérieure à (S).

Les limites, vers lesquelles tend une fonction quelconque F du point m, lorsque m tend vers un point de la surface (S), nous les désignerons par

$$F_i \quad \text{et} \quad F_e,$$

selon que m reste constamment à l'intérieur ou à l'extérieur de (S).

gnons encore par les symboles

$$\frac{\partial F_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_e}{\partial n}$$

u'on appelle *dérivées normales intérieure et extérieure* de la fonction F, t-à-dire les limites vers lesquelles tend l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial F}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial F}{\partial z}\cos(n, z),$$

lorsque le point $m(x, y, z)$ tend vers un point de (S) en restant respectivement à l'intérieur ou à l'extérieur de (S) (sur la normale n).

Comme, d'après l'hypothèse faite, $H(m, m_1)$ reste continue sur (S) avec ses dérivées de deux premiers ordres, la fonction $U(m, m_1)$, définie dans le numéro précédent, admet la dérivée normale

$$\frac{\partial U_e}{\partial n}$$

régulière sur (S) [1].

On peut donc trouver un nombre fixe L_1, tel qu'on ait

$$(19_1) \qquad \int P^2\,ds = \int\left(\frac{\partial H_i}{\partial n} - \frac{\partial U_e}{\partial n}\right)^2 ds < L_1^2,$$

l'intégrale étant étendue à la surface (S).

Cela posé, appliquons le théorème de Green à la fonction $v_k(m)$.

On trouve, conformément aux notations introduites (*voir* aussi n° 2),

$$\int\sum\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau = -\int v_k\,\Delta v_k\,d\tau + \int v_{ki}\frac{\partial v_{ki}}{\partial n}\,ds$$

et, en vertu de (20),

$$\int\sum\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau_1 = -\int v_k\,\Delta v_k\,d\tau_1 - \int v_{ke}\frac{\partial v_{ke}}{\partial n}\,ds = -\int v_{ki}\frac{\partial v_{ke}}{\partial n}\,ds,$$

car v_k reste continue dans l'espace tout entier.

Or,

$$v_k(m) = \int p(m_1)\,H(m, m_1)\,v_{k-1}(m_1)\,d\tau' + \mu\int\frac{p(m_1)\,v_{k-1}(m_1)}{r}\,d\tau'.$$

---

[1] *Voir* mon Ouvrage : *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique*, Kharkow, 1901, p. 181 (en russe). Les conditions plus générales de l'existence des dérivées normales d'une fonction harmonique sont indiquées dans le Mémoire de M. Liapounoff : *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques*, 1889).

Les dérivées du premier ordre du potentiel newtonien

$$\int \frac{p(m_1)v_{k-1}(m_1)}{r}\,d\tau'$$

restent continues dans l'espace tout entier; on a donc

$$\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} - \frac{\partial v_{ke}}{\partial n} = \int p(m_1)\,v_{k-1}(m_1)\left(\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial n} - \frac{\partial \mathrm{U}_e}{\partial n}\right)d\tau'$$

et, eu égard à (21),

$$(22)\quad \mathrm{I}_k = \int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T} = 4\pi\mu \int p v_k v_{k-1}\,d\tau - \int v_k\left(\int p v_{k-1}\,\Delta\mathrm{H}\,d\tau'\right)d\tau \text{ [1]}$$
$$+ \int v_{ki}\left[\int p(m_1)\,v_{k-1}(m_1)\left(\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial n} - \frac{\partial \mathrm{U}_e}{\partial n}\right)d\tau'\right]ds.$$

Or,

$$\left[\int v_k\left(\int p v_{k-1}\,\Delta\mathrm{H}\,d\tau'\right)d\tau\right]^2 \leqq \int v_k^2\,d\tau \int\left(\int p v_{k-1}\,\Delta\mathrm{H}\,d\tau'\right)^2 d\tau$$

et

$$\left(\int p v_{k-1}\,\Delta\mathrm{H}\,d\tau'\right)^2 \leqq \int p v_{k-1}^2\,d\tau' \int p(\Delta\mathrm{H})^2\,d\tau',$$

d'où, en vertu de (1), (7) et (19),

$$\left(\int p v_{k-1}\,\Delta\mathrm{H}\,d\tau'\right)^2 < \beta \mathrm{L}^2 \mathrm{J}_{k-1}.$$

Par conséquent, en vertu de (9),

$$\left|\int v_k\left(\int p v_{k-1}\,\Delta\mathrm{H}\,d\tau'\right)d\tau\right| < \mathrm{L}\sqrt{\frac{\beta \mathrm{D}}{\alpha}}\sqrt{\mathrm{J}_k}\sqrt{\mathrm{J}_{k-1}} < \mathrm{BL}\sqrt{\frac{\beta \mathrm{D}}{\alpha}}\,\mathrm{J}_{k-1}.$$

D'autre part,

$$\left[\int v_{ki}\left(\int p(m_1)\,v_{k-1}(m_1)\,\mathrm{P}\,d\tau'\right)ds\right]^2 \leqq \int v_{ki}^2\,ds \int\left(\int p(m_1)\,v_{k-1}(m_1)\,\mathrm{P}\,d\tau'\right)^2 ds,$$
$$\left(\int p(m_1)\,v_{k-1}(m_1)\,\mathrm{P}\,d\tau'\right)^2 \leqq \int p(m_1)\,v_{k-1}^2(m_1)\,d\tau' \int p(m_1)\,\mathrm{P}^2\,d\tau',$$

et, en vertu de (19_1),

$$\int ds\left(\int p(m_1)\,v_{k-1}(m_1)\,\mathrm{P}\,d\tau'\right)^2 \leqq \mathrm{J}_{k-1}\int p(m_1)\left(\int \mathrm{P}^2\,ds\right)d\tau' < \beta \mathrm{D}\mathrm{L}_1^2\,\mathrm{J}_{k-1}.$$

---

[1] Nous écrivons, pour plus de simplicité, F au lieu de F(m), H au lieu de H(m, m_1), etc., ce qui ne peut donner lieu à aucun malentendu.

Par conséquent,

$$\left|\int v_{ki}\left(\int p(m_1)\, v_{k-1}(m_1)\,\mathrm{P}\, d\tau'\right) ds\right| < \mathrm{L}_1 \sqrt{\beta \mathrm{D}}\sqrt{\mathrm{J}_{k-1}}\left(\int v_{ki}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, dans le cas considéré, l'inégalité (8) a lieu pour tous les points du domaine (D) [les points de (S) y compris].

On a donc

$$\left|\int v_{ki}\left(\int p(m_1)\, v_{k-1}(m_1)\,\mathrm{P}\, d\tau'\right) ds\right| < \mathrm{S}\mathrm{L}_1 \mathrm{Q}\sqrt{\beta \mathrm{D}}\,\mathrm{J}_{k-1},$$

S désignant la grandeur de la surface (S).

On trouve donc finalement, eu égard à (22),

$$\mathrm{I}_k < \left(4\pi\mu \mathrm{B} + \mathrm{BL}\sqrt{\frac{\beta \mathrm{D}}{\alpha}} + \mathrm{SL}_1 \mathrm{Q}\sqrt{\beta \mathrm{D}}\right)\mathrm{J}_{k-1} = \mathrm{N}\mathrm{J}_{k-1}, \tag{23}$$

car, en vertu de (9),

$$\left|\int p v_k v_{k-1}\, d\tau\right| < \sqrt{\mathrm{J}_k}\sqrt{\mathrm{J}_{k-1}} < \mathrm{B}\mathrm{J}_{k-1}.$$

L'inégalité (23) donne

$$\frac{\mathrm{I}_k}{\mathrm{J}_k} < \mathrm{N}\frac{\mathrm{J}_{k-1}}{\mathrm{J}_k},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{J}_k}{\mathrm{J}_{k-1}} < \mathrm{N}\frac{\mathrm{J}_k}{\mathrm{I}_k} < \mathrm{N}\beta\frac{\int v_k^2\, d\tau}{\int \sum\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T}} < \mathrm{N}\beta\frac{\int v_k^2\, d\tau}{\int \sum\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau}. \tag{24}$$

Il est utile de remarquer que dans certains cas particuliers la démonstration de l'inégalité

$$\frac{\mathrm{J}_k}{\mathrm{J}_{k-1}} < \mathrm{N}\beta\frac{\int v_k^2\, d\tau}{\int \sum\left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau} \tag{24_1}$$

peut être essentiellement simplifiée.

Supposons, par exemple, la fonction $\mathrm{G}(m, m_1)$ choisie de façon que l'on ait

$$\int v_{ki}\frac{\partial v_{ki}}{\partial n}\, ds \leqq 0 \tag{19_2}$$

pour toutes les valeurs de l'indice $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Ces conditions étant remplies, l'introduction de la fonction $\mathrm{U}(m, m_1)$ ainsi que de l'inégalité (19_1) devient inutile.

En effet, de l'inégalité

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau = -\int v_k \Delta v_k d\tau + \int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds,$$

on tire immédiatement, eu égard à (19_2),

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau < \left| \int v_k \Delta v_k d\tau \right|,$$

d'où, comme précédemment,

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau < \left(4\pi\mu B + BL\sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}}\right) J_{k-1} = NJ_{k-1}.$$

Cette inégalité conduit tout de suite à (24_1).

Supposons encore que la fonction symétrique $H(m, m_1)$, considérée comme une fonction du point m, jouisse des propriétés suivantes :

Elle reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admet les dérivées du second ordre continues dans (D), se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation

$$\Delta H(m, m_1) = 0 \quad \text{à l'extérieur de (D)} \quad (^1).$$

Ces conditions étant remplies, l'introduction de la fonction $U(m, m_1)$ sera aussi inutile, car toutes les fonctions v_k seront continues avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, de sorte qu'on aura

$$(19_3) \qquad \int \left(v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} - v_{ke} \frac{\partial v_{ke}}{\partial n}\right) ds = 0$$

et, par suite,

$$L_k = \int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 dT = 4\pi\mu \int p v_k v_{k-1} d\tau - \int v_k \left(\int p v_{k-1} \Delta H d\tau'\right) d\tau,$$

d'où l'on tire, comme précédemment, l'inégalité (23) et puis l'inégalité (24).

Nous aurons l'occasion de faire usage de ces remarques plus tard.

13. Supposons maintenant que la fonction $f(m)$ dans l'équation (4) se représente sous la forme suivante :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n,$$

---

(1) Ce sont les suppositions que j'ai faites dans ma Note : *Sur certaines égalités communes à toutes les fonctions fondamentales* (*Comptes rendus*, 4 juillet 1904).

α_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ étant des constantes indéterminées, f_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ étant des fonctions du point m, linéairement indépendantes et continues dans (D).

Les relations (6_1) montrent que, dans le cas considéré, chacune des fonctions v_k sera une fonction linéaire de constantes α_s.

D'après le lemme fondamental de M. H. Poincaré (n° 3), on peut toujours disposer les α_s de façon que l'on ait

$$\frac{\int v_k^2\,d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau} < \frac{1}{L_n}.$$

Nous aurons alors, eu égard à (24),

$$\frac{J_k}{J_{k-1}} < N\beta \frac{\int v_k^2\,d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 dT} < N\beta \frac{\int v_k^2\,d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau} < \frac{N\beta}{L_n} = \frac{K}{L_n}$$

et, en vertu de (11),

$$\frac{\sqrt{J_1}}{\sqrt{J_0}} < \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_1}} < \ldots < \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k-1}}} < \sqrt{\frac{K}{L_n}}.$$

Désignons par (E_k) l'ensemble des valeurs des α_s, pour lesquelles ces inégalités ont lieu.

Remplaçons k par $k+1$; nous obtiendrons, comme précédemment, les inégalités suivantes :

$$\frac{\sqrt{J_1}}{\sqrt{J_0}} < \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_1}} < \ldots < \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k-1}}} < \frac{\sqrt{J_{k+1}}}{\sqrt{J_k}} < \sqrt{\frac{K}{L_n}},$$

ainsi qu'un ensemble correspondant (E_{k+1}).

Comme ces inégalités entraînent les inégalités précédentes, on en conclut que l'ensemble (E_{k+1}) est renfermé dans (E_k).

Supposant que l'indice k croisse indéfiniment, nous obtiendrons une suite d'ensembles

$$(E_k), \quad (E_{k+1}), \quad (E_{k+2}), \quad \ldots, \quad (E_{k+p}), \quad \ldots,$$

dont chacun des suivants est renfermé dans le précédent.

Il s'ensuit que chacun des ensembles (E_{k+p}) est un ensemble bien déterminé, quel que soit le nombre p.

Supposant que p croisse indéfiniment et en passant à la limite, nous obtien-

drons un ensemble déterminé $(E_\infty) = (E)$ de valeurs des α_s, telles qu'on aura

$$\frac{\sqrt{J_1}}{\sqrt{J_0}} < \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_1}} < \ldots < \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k-1}}} < \ldots < \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L_n}}.$$

Dans ce cas nous aurons (*voir* n° 9)

$$\rho = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J_{k-1}}}{\sqrt{J_k}} > \frac{\sqrt{L_n}}{\sqrt{K}}, \tag{25}$$

l'inégalité qui nous sera nécessaire plus loin.

14. Montrons maintenant, en suivant une voie indiquée par M. H. Poincaré, que $V(m)$, *considéré comme fonction du paramètre* λ, *est une fonction méromorphe en* λ *n'ayant que des pôles simples et réels.*

Formons les séries

$$\tag{26} \left\{ \begin{array}{l} u_1 \;\; = v_1 \;\; + \lambda v_2 \;\; + \lambda^2 v_3 \;\; + \ldots, \\ u_2 \;\; = v_2 \;\; + \lambda v_3 \;\; + \lambda^2 v_4 \;\; + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_k \;\; = v_{k-1} + \lambda v_k \;\; + \lambda^2 v_{k+1} + \ldots, \\ u_{k+1} = v_k \;\; + \lambda v_{k+1} + \lambda^2 v_{k+2} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{n+1} = v_n \;\; + \lambda v_{n+1} + \lambda^2 v_{n+2} + \ldots, \end{array} \right.$$

qui convergent, évidemment, absolument et uniformément dans (D) pour les mêmes valeurs du paramètre λ que la série (5).

Elles représentent donc les fonctions u_k ($k = 1, 2, \ldots, n+1$) continues dans (D). Ces fonctions satisfont aux conditions

$$u_k - \lambda u_{k+1} = v_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n), \tag{27}$$

$$u_k(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, u_{k-1}(m_1)\, d\tau' \qquad (k = 2, 3, \ldots, n+1), \tag{28}$$

ce qui résulte immédiatement de (6_1) et (26).

Désignons maintenant par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

n constantes indéterminées et posons

$$w = \alpha_1 V + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n. \tag{29}$$

Multipliant cette égalité par $\lambda\, p(m_1)\, G(m, m_1)\, d\tau'$ et intégrant, on trouve, eu

égard à (4), (27), (28) et (29),

$$\lambda \int p(m_1) \, G(m, m_1) \, w(m_1) \, d\tau'$$
$$= \alpha_1 V(m) - \alpha_1 v_0(m) + \lambda\alpha_2 u_3(m) + \lambda\alpha_3 u_4(m) + \ldots + \lambda\alpha_n u_{n+1}(m)$$
$$= w - \alpha_1 v_0 - \alpha_2(u_2 - \lambda u_3) + \ldots + \alpha_n(u_n - \lambda u_{n+1})$$
$$= w - (\alpha_1 v_0 + \alpha_2 v_1 + \alpha_3 v_2 + \ldots + \alpha_n v_{n-1}).$$

Donc, la fonction $w(m)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$w(m) = \lambda \int p(m_1) \, G(m, m_1) \, w(m_1) \, d\tau' + f_1(m),$$

où l'on a posé

$$f_1(m) = \alpha_1 v_0(m) + \alpha_2 v_1(m) + \alpha_3 v_2(m) + \ldots + \alpha_n v_{n-1}(m).$$

C'est une équation de la même forme que (4), que nous avons pris pour le point de départ de nos recherches.

Répétant presque textuellement les raisonnements précédents (n^{os} **4-11**), on s'assure que $w(m)$ se représente sous la forme de la série

$$(30) \qquad w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \ldots + \lambda^k w_k + \ldots,$$

dont le rayon ρ_1 de la convergence absolue et uniforme est égal à

$$\rho_1 = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J'_k}}{\sqrt{J'_{k+1}}},$$

où l'on a désigné par J'_k ce qui devient J_k [*voir* n° **5**, l'égalité (7)], si l'on y remplace v_k par w_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Ce résultat reste vrai, quelles que soient les constantes α_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$.

Or, d'après la proposition établie dans le n° **13**, on peut choisir les α_s de façon que l'on ait

$$\rho_1 > \frac{\sqrt{L_n}}{\sqrt{K}}.$$

D'autre part, en choisissant convenablement le nombre n, on aura

$$\rho_1 > \frac{\sqrt{L_n}}{\sqrt{K}} > A,$$

A étant un nombre donné à l'avance, qu'on pourra prendre aussi grand qu'on voudra, car (*voir* n° **3**)

$$\lim_{n=\infty} L_n = \infty.$$

On en conclut qu'*on peut toujours choisir le nombre n et disposer ensuite les constantes* $\alpha_s (s = 1, 2, \ldots, n)$ *de façon que l'on ait*

$$\rho_1 > \rho, \tag{31}$$

ρ *désignant le rayon de convergence de la série* (5).

15. Nous avons vu (n° **13**) que le rayon ρ de convergence de la série (5), représentant la solution de l'équation (4), dépend du choix de la fonction $f(m)$, mais il ne peut pas dépasser un certain nombre positif et différent de zéro.

En le désignant par l_1, supposons que la fonction $f(m)$ soit choisie de façon que

$$\rho = l_1.$$

Supposons encore que les constantes α_s soient choisies de façon que [l'inégalité (31) du numéro précédent]

$$\rho_1 > \rho.$$

Formons le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} &V \quad - \lambda u_2 = v_0, \\ &u_2 \quad - \lambda u_3 = v_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &u_{n-1} - \lambda u_n = v_{n-2}, \\ &\alpha_1 V + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = w. \end{aligned}$$

En les résolvant par rapport à V, on trouve

$$V(m) = \frac{P(m)}{D(\lambda)}, \tag{32}$$

où l'on a posé

$$P(m) = \begin{vmatrix} w\ (m) & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ v_0\ (m) & -\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v_1\ (m) & 1 & -\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & . & \ldots & \ldots & . & . \\ v_{n-3}(m) & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 0 \\ v_{n-2}(m) & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, \tag{33}$$

$$D(\lambda) = \alpha_n - \lambda\alpha_{n-1} + \lambda^2\alpha_{n-2} + \ldots + (-\lambda)^{n-1}\alpha_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda \end{vmatrix}. \tag{34}$$

La fonction $P(m)$ se représente sous la forme de la série

$$(35)\qquad P(m) = P_0(m) + \lambda P_1(m) + \lambda^2 P_2(m) + \ldots + \lambda^k P_k(m) + \ldots$$

qui converge absolument et uniformément dans (D), pourvu que

$$(36)\qquad |\lambda| < \rho_1 > l_1.$$

Or, nous avons vu que la fonction $V(m)$ cesse d'être continue pour les valeurs de λ dont le module est égal à l_1.

Il s'ensuit que le polynome $D(\lambda)$ admet au moins une racine λ' dont le module est égal à l_1; cette racine représente en même temps un pôle de la fonction $V(m)$, considérée comme fonction du paramètre λ.

On en conclut que *la fonction* $V(m)$ *vérifiant l'équation* (4) *est, en général, une fonction méromorphe du paramètre* λ.

16. Démontrons qu'*elle ne peut admettre que des pôles simples.*

Soit $\lambda = \lambda'$ un pôle de la fonction $V(m)$.

Substituant (32) dans (4), il viendra

$$(37)\qquad P(m) = \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, P(m_1)\, d\tau' + D(\lambda) f(m).$$

Désignons par $V'(m)$ ce que devient $P(m)$, si l'on y pose $\lambda = \lambda'$.

On aura

$$(38)\qquad V'(m) = \lambda' \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V'(m_1)\, d\tau'.$$

Supposons que λ' soit un pôle multiple de la fonction $V(m)$ et, par suite, une racine multiple de polynome $D(\lambda)$; soit $q+1$ son ordre de multiplicité.

On a

$$(39)\qquad D(\lambda') = 0,\qquad D^{(1)}(\lambda') = 0,\qquad D^{(2)}(\lambda') = 0,\qquad \ldots,\qquad D^{(q)}(\lambda') = 0,$$

$D^{(s)}(\lambda)$ désignant la dérivée de $s^{\text{ième}}$ ordre du polynome $D(\lambda)$.

Désignons par $P^{(s)}(m)$ la dérivée de $s^{\text{ième}}$ ordre de la fonction $P(m)$, prise par rapport à λ; on a

$$(40)\qquad P^{(s)} = s!\, P_s + \frac{(s+1)!}{1} \lambda P_{s+1} + \ldots + \frac{(s+k)!}{k!} \lambda^k P_{s+k} + \ldots.$$

Or, l'égalité (33) montre que

$$P_{n+k} = (-1)^{n-1} w_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

On en conclut que le rayon de convergence de la série (40) est égal à celui de (30); la série (40) représente donc une fonction continue dans (D), pourvu que λ satisfasse à l'inégalité (36).

Différentions maintenant (37) s fois par λ; il viendra, eu égard à (39),

$$(41)\qquad P^{(s)}(m)=\lambda'\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,P^{s}(m_1)\,d\tau'+s!\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^k}{(\lambda')^{s-1-k}}\,\frac{P^{(k)}}{k!}.$$

Cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de s à partir de $s=0$ jusqu'à $s=q$.

On en tire, en remplaçant s par $s-1$,

$$(42)\qquad P^{(s-1)}(m)=\lambda'\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,P^{(s-1)}(m_1)\,d\tau'+(s-1)!\sum_{k=0}^{s-2}\frac{(-1)^k}{(\lambda')^{s-2-k}}\,\frac{P^{(k)}}{k!}.$$

Posons

$$\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,P^{(s-1)}(m_1)\,d\tau'=U(m).$$

On aura, en se rappelant que $G(m,m_1)$ est une fonction symétrique en m et m_1,

$$\int p(m)\,G(m,m_1)\,P^{(s-1)}(m)\,d\tau'=U(m_1).$$

Supposons maintenant que

$$P^{(k)}(m)=0\qquad\text{pour}\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-2.$$

Multiplions (41) et (42) respectivement par

$$p(m)\,P^{(s-1)}(m)\,d\tau\quad\text{et}\quad p(m)\,P^{(s)}(m)\,d\tau,$$

retranchons et intégrons le résultat ainsi obtenu.

Remarquant que

$$\int p(m)\,P^{(s-1)}(m)\left(\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,P^{(s)}(m_1)\,d\tau'\right)d\tau$$
$$=\int p(m_1)\,P^{(s)}(m_1)\left(\int p(m)\,G(m,m_1)\,P^{(s-1)}(m)\,d\tau\right)d\tau'=\int p(m_1)\,P^{(s)}(m_1)\,U(m_1)\,d\tau',$$
$$\int p(m)\,P^{(s)}(m)\left(\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,P^{(s-1)}(m_1)\,d\tau'\right)d\tau=\int p(m)\,P^{(s)}(m)\,U(m)\,d\tau,$$

on trouve

$$\int p(m)\,[P^{(s-1)}(m)]^2\,d\tau=0,$$

d'où

$$P^{(s-1)}(m)=0,$$

car $p(m)$ reste positif dans (D).

et intégrons le résultat obtenu; on trouve

$$(45) \qquad \int p(m)\,U_1(m)\left(\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,U_1(m_1)\,d\tau'\right)d\tau + \int p(m)\,U_2(m)\left(\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,U_2(m_1)\,d\tau'\right)d\tau = 0,$$

car

$$(46) \qquad \int p(m)\,U_2(m)\left(\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,U_1(m_1)\,d\tau'\right)d\tau = \int p(m)\,U_1(m)\left(\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,U_2(m_1)\,d\tau'\right)d\tau.$$

Multipliant maintenant (43) et (44) respectivement par $p(m)\,U_1(m)\,d\tau$ et $p(m)\,U_2(m)\,d\tau$, additionnant et intégrant le résultat, on trouve, eu égard à (45) et (46),

$$\int p(m)[U_1^2(m) + U_2^2(m)]\,d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$U_1(m) = U_2(m) = V'(m) = 0,$$

ce qui est impossible.

Donc, *tous les pôles de la fonction* $V(m)$ *sont réels.*

18. On peut maintenant énoncer ce théorème général :

Théorème. — *Soit* (S) *une surface fermée, à laquelle s'applique le principe de Neumann* ([1]). *Soit* $p(m)$ *une fonction du point* $m(x, y, z)$ *continue positive et ne s'annulant pas dans le domaine* (D), *limité par la surface* (S).

Supposons encore que la fonction $p(m)$ *soit choisie de façon que le potentiel newtonien*

$$\int \frac{p(m)\,\varphi(m)}{r}\,d\tau'$$

admette les dérivées des deux premiers ordres dans (D), *quelle que soit la fonction* $\varphi(m)$ *continue avec ses dérivées du premier ordre* ([2]).

Soit $f(m)$ *une fonction du point* m, *continue* ([3]) *dans* (D).

([1]) Il suffit de supposer que (S) satisfasse aux conditions 1°, 2° et 3° du n° 1.

([2]) Il suffit de supposer que $p(m)$ reste continue avec ses dérivées du premier ordre à l'intérieur de (D). Quant aux conditions plus générales, *voir* O. Hölder, *Beiträge zur Potentialtheorie,* Stuttgart, 1882.

([3]) Remarquons que cette restriction n'a rien d'essentiel; il suffit de supposer que $f(m)$ soit bornée et intégrable, mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

Soit enfin $H(m, m_1)$ *une fonction de deux points* $m(x, y, z)$ *et* $m_1(\xi, \eta, \zeta)$, symétrique *en* m *et* m_1 *et continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans le domaine* (D) *tout entier* [*les points de la surface* (S) *y compris*].

Posons

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{r},$$

μ *désignant une constante, r la distance de deux points m et* m_1.

Ces conditions étant remplies, l'équation fonctionnelle

$$V(m) = \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V(m_1)\, d\tau' + f(m),$$

λ *étant un paramètre, admet toujours une solution* $V(m)$ *qui se représente sous la forme de la série procédant suivant les puissances croissantes de* λ *et absolument et uniformément convergente dans* (D), *pourvu que le module de* λ *ne surpasse pas un certain nombre* l_1, *positif et différent de zéro.*

Cette solution $V(m)$, *considérée, en général, comme une fonction du paramètre* λ, *est une fonction méromorphe en* λ *n'ayant que des pôles simples et réels.*

FONCTIONS FONDAMENTALES.

19. Des recherches précédentes il résulte immédiatement que le nombre positif l_1 représente un pôle de la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (4).

Le point

$$\lambda = -l_1$$

peut aussi présenter un pôle de la fonction $V(m)$.

Il existe donc au moins un nombre λ_1 dont la valeur numérique est égale à l_1, et une fonction $V_1(m)$, bien déterminée, différente de zéro et telle qu'on ait

$$V_1(m) = \lambda_1 \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_1(m_1)\, d\tau'.$$

Reprenons maintenant l'équation (4) en y remplaçant $f(m)$ par une autre fonction $f_1(m)$.

D'après le théorème du n° 14 on peut choisir $f_1(m)$ de façon que le rayon de convergence de la série

$$v_0(m) + \lambda\, v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \ldots + \lambda^k v_k(m) + \ldots, \tag{47}$$

où

$$v_0(m) = f_1(m), \qquad v_k(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, v_{k-1}(m_1)\, d\tau',$$

sera égal à un nombre l_2 plus grand que l_1.

Appliquant au cas considéré les raisonnements précédents, nous nous assurerons que le nombre l_2 sera un pôle de la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation

$$V(m) = \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V(m_1)\, d\tau' + f_1(m)$$

et que le point

$$\lambda = -l_2$$

peut aussi présenter un pôle de la fonction $V(m)$.

Il existe donc au moins un nombre λ_2, dont la valeur numérique est égale à $l_2 > l_1$, et une autre fonction $V_2(m)$, différente de zéro et vérifiant l'équation

$$V_2(m) = \lambda_2 \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_2(m_1)\, d\tau'.$$

Remplaçant ensuite dans (4) $f(m)$ par $f_2(m)$ et choisissant la fonction $f_2(m)$ de façon que le rayon de convergence de la série (47), où il faut poser maintenant

$$v_0(m) = f_2(m),$$

soit égal à $l_3 > l_2$, nous obtiendrons, comme précédemment, un nombre λ_3, dont le module est égal à l_3, et une troisième fonction $V_3(m)$ satisfaisant à l'équation

$$V_3(m) = \lambda_3 \int p(m_1)\, G(m, m_1) V_3(m_1)\, d\tau'.$$

Continuant ainsi, nous démontrerons successivement l'existence d'une suite de nombres

$$(48) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots$$

et de fonctions correspondantes

$$(49) \qquad V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_k, \quad \ldots,$$

vérifiant les équations

$$(50) \qquad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1)\, G(m, m_1) V_k(m_1)\, d\tau' \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

La suite (48) peut être, en général, *limitée* ou *illimitée*.

20. Revenons à la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation

$$(51) \qquad V(m) = \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1) V(m_1)\, d\tau' + f(m).$$

Nous avons vu (n° 18) que $V(m)$ est une fonction méromorphe en λ se représentant sous la forme suivante

$$V(m) = \frac{P(m)}{D(\lambda)} \tag{52}$$

et n'ayant que des pôles simples et réels.

Il est évident que ces pôles dépendent du choix de la fonction $f(m)$ dans l'équation (51).

En entendant dans (51) par $f(m)$ une fonction choisie d'une manière quelconque bien déterminée, désignons par

$$\lambda_{11}, \quad \lambda_{12}, \quad \lambda_{13}, \quad \ldots, \quad \lambda_{1k}, \quad \ldots \tag{53}$$

la suite de nombres représentant les pôles de la fonction correspondante $V(m)$.

Supposons que les nombres (53) soient rangés par l'ordre croissant de grandeur de leurs modules.

Chacun des nombres $\lambda_{1k} (k = 1, 2, \ldots)$ représente en même temps une racine simple de polynome $D(\lambda)$.

Si nous posons dans (52) $\lambda = \lambda_{1k}$, la fonction $P(m)$ se réduira à une fonction $U_{1k}(m)$, bien déterminée différente de zéro et satisfaisant à l'équation

$$U_{1k}(m) = \lambda_{1k} \int p(m_1) G(m, m_1) U_{1k}(m_1) d\tau'.$$

Nous obtiendrons ainsi une suite de fonctions

$$U_{11}, \quad U_{12}, \quad U_{13}, \quad \ldots, \quad U_{1k}, \quad \ldots \tag{54}$$

correspondant aux nombres (53).

Remplaçons dans (51) $f(m)$ par une autre fonction $f_1(m)$. Nous trouverons une autre suite de nombres

$$\lambda_{21}, \quad \lambda_{22}, \quad \lambda_{23}, \quad \ldots, \quad \lambda_{2k}, \quad \ldots \tag{55}$$

et de fonctions correspondantes

$$U_{21}, \quad U_{22}, \quad U_{23}, \quad \ldots, \quad U_{2k}, \quad \ldots. \tag{56}$$

Les suites (53) et (55) ne sont pas, en général, identiques, mais elles peuvent contenir des nombres égaux.

Il est aisé de voir qu'*une seule fonction ne peut correspondre à deux nombres inégaux*.

Soit, en effet, $U(m)$ une fonction correspondant à deux nombres différents λ_1 et λ_2.

On doit avoir à la fois

$$U(m) = \lambda_1 \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, U(m_1)\, d\tau',$$

$$U(m) = \lambda_2 \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, U(m_1)\, d\tau',$$

ce qui est impossible, si $\lambda_1 \gtrless \lambda_2$ (¹).

Or, *à un seul nombre λ_k peuvent, en général, correspondre plusieurs fonctions, linéairement indépendantes.*

Choisissant les fonctions $f(m)$ dans (51) de toutes les manières possibles, nous trouverons toutes les suites possibles de nombres

$$\lambda_{j1}, \quad \lambda_{j2}, \quad \lambda_{j3}, \quad \ldots, \quad \lambda_{jk}, \quad \ldots$$

et de fonctions correspondantes

$$U_{j1}, \quad U_{j2}, \quad U_{j3}, \quad \ldots, \quad U_{jk}, \quad \ldots.$$

Disposons tous les nombres λ par l'ordre de grandeur croissante de leurs modules et désignons ces nombres successivement par

(57) $$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots.$$

Les fonctions correspondantes U_{jk}, nous les désignerons maintenant par

(58) $$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_k, \quad \ldots;$$

j'appellerai ces fonctions $V_k(m)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, dont nous avons établi l'existence, *fonctions* FONDAMENTALES *appartenant au domaine donné* (D) *et correspondant à la fonction* GÉNÉRATRICE $G(m, m_1)$ *et à la fonction* CARACTÉRISTIQUE $p(m)$.

Quant aux nombres λ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, je les appellerai *nombres caractéristiques* pour les fonctions fondamentales $V_k(m)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

21. Soient V_r et V_s deux fonctions fondamentales correspondant aux nombres caractéristiques λ_r et λ_s.

Supposons que

(59) $$\lambda_r \gtrless \lambda_s.$$

(¹) La fonction $U(m)$ n'est pas égale identiquement à zéro.

On a

(60) $$V_r(m) = \lambda_r \int p(m_1)\,G(m, m_1)\,V_r(m)\,d\tau',$$

(60₁) $$V_s(m) = \lambda_s \int p(m_1)\,G(m, m_1)\,V_s(m_1)\,d\tau'.$$

Ces égalités donnent

$$\int p(m)V_r(m)V_s(m)\,d\tau = \lambda_r \int p(m)V_s(m)\left(\int p(m_1)\,G(m, m_1)V_r(m_1)\,d\tau'\right)d\tau$$
$$= \frac{\lambda_r}{\lambda_s}\int p(m_1)V_r(m_1)V_s(m_1)\,d\tau' = \frac{\lambda_r}{\lambda_s}\int p(m)V_r(m)V_s(m)\,d\tau,$$

d'où, en vertu de (59),

(61) $$\int p(m)V_r(m)V_s(m)\,d\tau = 0.$$

Soit $V_r(m)$ une fonction quelconque satisfaisant à l'équation (60). Il est évident que toute fonction
$$C_r V_r(m),$$
C_r étant une constante arbitraire, satisfait à la même équation.

On peut toujours choisir C_r de façon que l'on ait

$$C_r^2 \int p(m)V_r^2(m)\,d\tau = 1,$$

et prendre pour les fonctions fondamentales $V_k(m)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ celles qui satisfont aux conditions

(62) $$\int p(m)V_k^2(m)\,d\tau = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

22. Cela posé, désignons par l_k le module d'un nombre quelconque λ_k. Nous obtiendrons ainsi une suite de nombres positifs l_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ correspondant à la suite (57) de nombres λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ et satisfaisant aux conditions

(63) $$l_1 \leqq l_2 \leqq l_3 \leqq l_4 \leqq \ldots \leqq l_k \leqq \ldots.$$

La suite (57) *et,* par conséquent, (58) *et* (59) *peuvent être limitées ou illimitées.*

Supposons que la suite (63) soit *illimitée.*

Démontrons que *dans ce cas les nombres l_k croissent indéfiniment avec l'indice k.*

Soit

$$\lambda_{q_1}, \quad \lambda_{q_2}, \quad \lambda_{q_3}, \quad \ldots, \quad \lambda_{q_n}, \tag{64}$$

q_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ étant des entiers quelconques, une suite de nombres caractéristiques.

Formons la suite correspondante de nombres positifs l_{q_s} et supposons que λ_{q_s} soient choisis de façon que l'on ait

$$l_{q_1} < l_{q_2} < l_{q_3} < \ldots < l_{q_n}. \tag{64_1}$$

Formons la fonction

$$U = \alpha_1 V_{q_1} + \alpha_2 V_{q_2} + \ldots + \alpha_n V_{q_n},$$

α_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ étant des constantes indéterminées, V_{q_s} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ étant les fonctions fondamentales correspondant aux nombres caractéristiques (64).

Il est aisé de s'assurer, en tenant compte de (60), que U satisfait à l'équation

$$U(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, W(m_1)\, d\tau', \tag{65}$$

où l'on a posé

$$W(m) = \alpha_1 \lambda_1 V_{q_1}(m) + \alpha_2 \lambda_{q_2} V_{q_2}(m) + \ldots + \alpha_n \lambda_{q_n} V_{q_n}(m).$$

Appliquant à l'équation (65) les raisonnements du n° 12, nous obtiendrons l'inégalité

$$\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dT < N \int p(m)\, W^2(m)\, d\tau,$$

N désignant un nombre fixe (*voir* n° 12).

Or, en vertu de (61) et (62),

$$\begin{aligned} \int p(m)\, W^2(m)\, d\tau &= \alpha_1^2 \lambda_{q_1}^2 + \alpha_2^2 \lambda_{q_2}^2 + \ldots + \alpha_n^2 \lambda_{q_n}^2 \\ &= \alpha_1^2 l_{q_1}^2 + \alpha_2^2 l_{q_2}^2 + \ldots + \alpha_n^2 l_{q_n}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dT < N(\alpha_1^2 l_{q_1}^2 + \alpha_2^2 l_{q_2}^2 + \ldots + \alpha_n^2 l_n^2). \tag{66}$$

Envisageons maintenant le rapport

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dT}{\int U^2\, d\tau}.$$

On a évidemment

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < K < \beta \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int p U^2 d\tau},$$

β désignant le maximum de $p(m)$ dans (D).

Par conséquent, en vertu de (66),

$$(66_1) \qquad \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < N\beta \frac{\alpha_1^2 l_{q_1}^2 + \alpha_2^2 l_{q_2}^2 + \ldots + \alpha_n^2 l_{q_n}^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2},$$

car, en vertu de (61) et (62),

$$\int p U^2 d\tau = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2.$$

De l'inégalité précédente on tire, en tenant compte de (64_1),

$$(67) \qquad \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < N\beta l_{q_n}^2.$$

Cette inégalité a lieu quels que soient les nombres α_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Prenons maintenant dans la suite (63) n premiers nombres successifs inégaux correspondant aux nombres caractéristiques λ_k inégaux.

Appliquons l'inégalité (67) à la fonction

$$U = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n,$$

V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ étant les fonctions fondamentales linéairement indépendantes correspondant aux nombres λ_k.

On trouve

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < N\beta l_n^2.$$

Or, les fonctions V_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ étant linéairement indépendantes, on peut disposer les constantes α_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ de façon que l'on ait (lemme fondamental de M. H. Poincaré)

$$L_n < \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < N\beta l_n^2.$$

En se rappelant que le nombre L_n tend vers l'infini en même temps que l'indice n, on en conclut *que l_n tend vers l'infini, lorsque n croît indéfiniment.*

C. Q. F. D.

23. Nous avons déjà dit (n° 20) qu'à un seul nombre caractéristique λ_k peuvent correspondre plusieurs fonctions fondamentales linéairement indépendantes.

Montrons qu'*à un seul nombre λ_k ne peut correspondre qu'un nombre fini de ces fonctions.*

Soient

$$V_{1k}, \quad V_{2k}, \quad V_{3k}, \quad \ldots, \quad V_{nk}$$

n fonctions fondamentales linéairement indépendantes et correspondantes au nombre λ_k.

Il est évident que toute combinaison linéaire de fonctions fondamentales, correspondant à un nombre quelconque λ_k, représente aussi une fonction fondamentale correspondant au même nombre.

Posons

$$U_{sk} = \alpha_{s1} V_{1k} + \alpha_{s2} V_{2k} + \ldots + \alpha_{sn} V_{nk} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{68}$$

α_{sj} $(s, j = 1, 2, \ldots, n)$ étant des constantes.

Nous obtiendrons un groupe de n fonctions

$$U_{1k}, \quad U_{2k}, \quad \ldots, \quad U_{nk} \tag{69}$$

linéairement indépendantes et correspondantes au nombre λ_k.

Choisissons maintenant les constantes α_s, qui restent indéterminées, de façon que l'on ait

$$\int p U_{ks}^2 \, d\tau = 1, \qquad \int p U_{ks} U_{kr} \, d\tau = 0 \quad \text{pour} \quad s \gtrless r, \tag{70}$$

ce qui est toujours possible; il suffit de supposer, en effet, que la transformation linéaire (68) représente une transformation linéaire orthogonale.

Prenons les fonctions (69) ainsi définies pour les fonctions fondamentales correspondant au nombre λ_k; posons, comme au numéro précédent,

$$U = \alpha_1 U_{1k} + \alpha_2 U_{2k} + \ldots + \alpha_n U_{nk},$$

α_k étant des constantes arbitraires, et appliquons à la fonction U l'inégalité (66_1), ce qui est évidemment possible, en vertu de (70).

En remarquant que dans le cas considéré

$$l_{q_1} = l_{q_2} = \ldots = l_{q_k} = l_k,$$

on retrouve, comme au numéro précédent,

(71) $$L_n < N\beta l_k.$$

Supposons que le nombre λ_k se trouve dans un intervalle quelconque $(-A, +A)$, A étant un nombre positif, donné à l'avance. On a

(72) $$l_k < A.$$

Si le nombre des fonctions fondamentales correspondant au nombre λ_k était infini, nous pourrions choisir le nombre n de façon que l'on ait

$$L_n > AN\beta,$$

c'est-à-dire, en vertu de (71),

$$l_k > A,$$

ce qui est impossible, car, d'après l'hypothèse faite, l_k est plus petit que A.

Donc, le nombre n *ne surpasse pas une certaine limite fixe.*

C. Q. F. D.

M. H. Poincaré a montré que (*Rendiconti di Palermo,* 1894)

$$L_n > an^{\frac{2}{3}},$$

a étant une constante positive, ne dépendant pas de n.

On a donc, eu égard à (71) et (72),

$$an^{\frac{2}{3}} < N\beta A,$$

d'où

$$n < \left(\frac{N\beta A}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Il s'ensuit que *le nombre des fonctions fondamentales linéairement indépendantes correspondant à un nombre caractéristique dont le module est plus petit que* A *reste inférieur à*

$$E\left(\frac{N\beta A}{a}\right)^{\frac{3}{2}},$$

E *désignant le plus grand nombre entier contenu dans le nombre*

$$\left(\frac{N\beta A}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

24. Désignons maintenant par q_k le nombre des fonctions fondamentales

linéairement indépendantes correspondant au nombre λ_k ($k = 1, 2, \ldots$), par

$$V_{k1},\quad V_{k2},\quad V_{k3},\quad \ldots,\quad V_{kq_k}$$

la suite de ces fonctions, en les choisissant de façon que l'on ait (n° 23)

$$\int p V_{ks}^2\, d\tau = 1, \quad \int p V_{kr} V_{ks}\, d\tau = 0 \quad \text{pour} \quad r \gtrless s \qquad (s = 1, 2, \ldots, q_k).$$

On obtient ainsi une suite de nombres

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \ldots,\quad \lambda_k,\quad \ldots$$

et une suite de groupes des fonctions fondamentales

$$(73)\qquad (V_{11}, V_{12}, \ldots, V_{1q_1}),\quad (V_{21}, V_{22}, \ldots, V_{2q_2}),\quad \ldots,\quad (V_{k1}, V_{k2}, \ldots, V_{kq_k}),\quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions

$$\int p V_{rs}^2\, d\tau = 1$$

et

$$\int p V_{sq} V_{rp}\, d\tau = 0,$$

dont la dernière a lieu toujours, pourvu que

$$r \gtrless s.$$

Nous pouvons maintenant échanger les notations de la manière suivante :

Désignons les fonctions (73) successivement par la lettre V avec un seul indice k, en donnant à k consécutivement toutes les valeurs entières à partir de $k = 1$, et faisons correspondre une seule fonction fondamentale V_k à chaque nombre caractéristique λ_k.

Employant ces notations nous pouvons énoncer ce théorème général, qui résulte immédiatement des recherches précédentes :

Théorème. — *Toute surface fermée* (S) *jouissant des propriétés* 1°, 2° *et* 3° *du n°* 1 *donne lieu à une suite de nombres*

$$(74)\qquad \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \ldots,\quad \lambda_k,\quad \ldots$$

dont les modules l_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *satisfont aux conditions*

$$(74_1)\qquad l_1 \leqq l_2 \leqq l_3 \leqq \ldots \leqq l_k \leqq \ldots,$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_k, \quad \ldots,$$

linéairement indépendantes et satisfaisant aux conditions

$$(75) \qquad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_k(m_1)\, d\tau',$$

$$(76) \qquad \int p(m)\, V_k^2(m)\, d\tau = 1,$$

$$(77) \qquad \int p(m)\, V_r(m)\, V_s(m)\, d\tau = 0 \quad \text{pour} \quad r \gtrless s,$$

où $p(m)$ *et* $G(m, m_1)$ *sont des fonctions données satisfaisant aux conditions du théorème du n°* 18.

Certains d'entre les nombres λ_k, *pris successivement dans la suite* (74), *peuvent être égaux les uns aux autres; les groupes de ces nombres égaux se séparent par des nombres inégaux, les modules de ces nombres satisfont aux conditions* (74_1), *où, entre deux nombres inégaux ne peut se trouver aucun nombre intermédiaire représentant le module d'un nombre caractéristique, auquel pourrait correspondre une fonction fondamentale différente de zéro.*

La suite (74) *peut être limitée ou illimitée; dans le second cas les nombres* l_k *croissent indéfiniment, lorsque l'indice* k *tend vers l'infini.*

Remarquons enfin que *les fonctions* V_k, *quelles que soient les fonctions données* $p(m)$ *et* $G(m, m_1)$ (jouissant des propriétés indiquées plus haut), *restent continues avec les dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur du domaine donné* (D).

REMARQUE SUR LE CALCUL DES FONCTIONS FONDAMENTALES ET DES NOMBRES CARACTÉRISTIQUES, LORSQUE CES DERNIERS SONT TOUS POSITIFS.

25. Soit $\varphi(m)$ une fonction quelconque, continue avec ses dérivées du premier ordre dans le domaine (D).

Envisageons l'intégrale

$$K = \int p(m)\, \varphi(m) \left(\int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau' \right) d\tau,$$

où $G(m, m_1)$ désigne une fonction génératrice ayant les propriétés indiquées plus haut.

L'intégrale K représente une constante qui peut être positive ou négative, selon le choix des fonctions $\varphi(m)$ et $G(m, m_1)$.

Supposons que la fonction $G(m, m_1)$ jouisse de la propriété suivante :

L'intégrale K *reste toujours positive indépendamment du choix de la fonction* $\varphi(m)$.

Il est aisé de voir que *les nombres caractéristiques des fonctions fondamentales* V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *correspondant à la fonction génératrice* $G(m, m_1)$, *qui satisfait à la condition tout à l'heure énoncée, sont tous positifs.*

Posant, en effet, dans K,

$$\varphi(m) = V_k(m),$$

on trouve, eu égard à (75) et (76),

$$K = \int p(m)\, V_k(m) \left(\int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_k(m_1)\, d\tau' \right) d\tau = \frac{1}{\lambda_k},$$

d'où, en vertu de l'hypothèse faite sur K,

$$\lambda_k > 0,$$

quel que soit l'indice k.

Nous verrons plus loin que, dans la plupart des applications, les fonctions fondamentales appartiennent à une classe de fonctions n'admettant que des nombres caractéristiques positifs et méritent, par conséquent, une attention particulière.

Dans ce cas, nous pouvons indiquer une méthode générale pour calcul approché des fonctions fondamentales V_k et des nombres caractéristiques λ_k, qui peut être considérée en même temps comme une méthode de la démonstration de l'existence des fonctions fondamentales correspondant à une fonction génératrice $G(m, m_1)$ satisfaisant à la condition

$$(78) \qquad \int p(m)\, \varphi(m) \left(\int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau' \right) d\tau > 0,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

26. Revenons à la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (4).

Nous avons vu que $V(m)$ reste holomorphe en λ, pourvu que $|\lambda|$ ne surpasse pas une certaine limite que nous désignerons maintenant par λ_1; elle est, en général, une fonction méromorphe du paramètre λ, n'ayant que des pôles réels;

On en tire, eu égard à (79) [si l'on y remplace $V'(m)$ par $V_1(m)$],

$$\begin{aligned}&\int p(m)\,V_1(m)\,P(m)\,d\tau\\ &=\lambda\int p(m)\,V_1(m)\left(\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,P(m_1)\,d\tau'\right)d\tau+D(\lambda)\int f(m)\,p(m)\,V_1(m)\,d\tau\\ &=\frac{\lambda}{\lambda_1}\int p(m_1)\,P(m_1)\,V_1(m_1)\,d\tau'+D(\lambda)\,A_k,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$A_k=\int p(m)\,f(m)\,V_1(m)\,d\tau.$$

Supposant que λ tend vers λ_1 et en passant à la limite, on trouve, eu égard à (80), (81) et (84),

$$K=C\lambda_1 A_k,$$

car $P(m)$ se réduit à $V'(m)$ pour $\lambda=\lambda_1$.

On a donc, en vertu de (83),

$$P'(\lambda_1)=A_1 V_1. \tag{85}$$

27. La fonction $P'(\lambda)$ se représente, pour les valeurs de λ dont le module ne surpasse pas λ_2, sous la forme de la série

$$P'=P_0+\lambda P_1+\lambda^2 P_2+\ldots+\lambda^k P_k+\ldots, \tag{86}$$

P_k $(k=0,1,2,\ldots)$ étant des fonctions du point m.

Substituant cette expression de P' dans (82), il viendra

$$V=P_0+\lambda\left(P_1+\frac{P_0}{\lambda_1}\right)+\lambda^2\left(P_2+\frac{P_1}{\lambda_1}+\frac{P_0}{\lambda_1^2}\right)+\ldots+\lambda^k\left(P_k+\frac{P_{k-1}}{\lambda_1}+\ldots+\frac{P_0}{\lambda_1^k}\right)+\ldots.$$

La série du second membre converge uniformément dans (D), pourvu que

$$|\lambda|<\lambda_1.$$

La comparaison de ce développement avec (5) donne

$$v_0=P_0,$$

$$v_k=P_k+\frac{P_{k-1}}{\lambda_1}+\ldots+\frac{P_0}{\lambda_1^k}\qquad(k=1,2,3,\ldots),$$

d'où

$$P_k=v_k-\frac{v_{k-1}}{\lambda_1}, \tag{87}$$

l'équation qui restera vraie pour toutes les valeurs de l'indice k, à partir de $k = 0$, si nous supposons que

$$v_{-1} = 0.$$

Les fonctions v_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sont connues [*voir* les égalités (6) et (6_1)].

Quant au nombre λ_1, on peut le considérer aussi comme connu, car

$$\lambda_1 = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{\int p v_k^2 \, d\tau}}{\sqrt{\int p v_{k+1}^2 \, d\tau}} = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k+1}}}. \tag{88}$$

Les relations (87) déterminent successivement les fonctions P_k.

Posant dans (86) $\lambda = \lambda_1$, on trouve l'expression de $P'(\lambda_1)$ sous la forme de la série

$$P'(\lambda_1) = P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_1^2 P_2 + \ldots + \lambda_1^k P_k + \ldots,$$

où tous les éléments sont connus.

Substituant dans $P'(\lambda_1)$ les expressions de P_k (87) et en tenant compte de (85), on obtient

$$P'(\lambda_1) = A_1 V_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k \left(v_k - \frac{v_{k-1}}{\lambda_1} \right) = \lim_{k=\infty} \lambda_1^k v_k,$$

l'expression analytique de la fonction

$$U_1(m) = A_1 V_1$$

vérifiant l'équation

$$U_1(m) = \lambda_1 \int p(m_1) \, G(m, m_1) \, U_1(m_1) \, d\tau'. \tag{89}$$

Nous avons ainsi trouvé le premier nombre caractéristique $\lambda_1 > 0$ *et la fonction fondamentale correspondante* $U_1(m)$ [les formules (88) et (89)].

28. On peut poser maintenant, en tenant compte de (82) et (85)

$$V = \frac{A_1 V_1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} + Q_0 + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \ldots + \lambda^k Q_k + \ldots,$$

où la série du second membre converge uniformément dans (D), pourvu que $|\lambda|$ soit plus petit qu'un nombre positif λ_2, plus grand que λ_1.

La comparaison du développement, qui résulte de cette dernière expression

de V, avec (5) donne

$$Q_k = v_k - \frac{A_1 V_1}{\lambda_1^k} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

De cette égalité on tire, eu égard à (6_1) et (79) [où il faut remplacer $V'(m)$ par $V_1(m)$],

$$\begin{aligned}&\int p(m_1)\, G(m, m_1)\, Q_k(m_1)\, d\tau' \\ &= \int p(m_1)\, G(m, m_1)\; v_k(m_1)\, d\tau' \\ &\quad - \frac{A_1}{\lambda_1^k}\int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_1(m_1)\, d\tau' = v_{k+1} - \frac{A_1 V_1}{\lambda_1^{k+1}} = Q_{k+1}.\end{aligned}$$

On en conclut que la série

$$Q = Q_0 + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \ldots + \lambda^k Q_k + \ldots \tag{90}$$

représente une fonction du point m vérifiant l'équation

$$\begin{aligned}Q(m) &= \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, Q(m_1)\, d\tau' + Q_0 \\ &= \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, Q(m_1)\, d\tau' + f(m) - A_1 V_1(m),\end{aligned} \tag{91}$$

car

$$Q_0 = v_0 - A_1 V_1, \qquad v_0 = f.$$

29. Désignons maintenant par J'_k l'intégrale

$$J'_k = \int p(m)\, Q_k^2(m)\, d\tau.$$

Appliquant à l'équation (91) les raisonnements des nos 5-18, on s'assure, comme précédemment, que la série (90) converge absolument et uniformément dans (D), pourvu que

$$|\lambda| < \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J'_k}}{\sqrt{J'_{k+1}}} = \lambda_2,$$

et que $\lambda_2 (> \lambda_1)$ est un pôle simple de la fonction Q; le résidu correspondant à ce pôle est égal à

$$A_2 V_2,$$

où

$$A_2 = \int p(m)\, [f(m) - A_1\, V_1(m)]\, V_2(m)\, d\tau, \tag{92}$$

V_2 est une fonction différente de zéro et vérifiant l'équation

(93) $$V_2(m) = \lambda_2 \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_2(m_1)\, d\tau',$$

jointe à la condition

$$\int p(m)\, V_2^2(m)\, d\tau = 1.$$

L'équation

(94) $$\lambda_2 = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J'_k}}{\sqrt{J'_{k+1}}}$$

détermine un second nombre caractéristique $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, *auquel correspond une fonction fondamentale* $V_2(m)$.

Les équations (79) et (93) fournissent la relation suivante

$$\int p(m)\, V_1(m)\, V_2(m)\, d\tau = 0,$$

et l'égalité (92) se réduit à

$$A_2 = \int p(m)\, f(m)\, V_2(m)\, d\tau.$$

30. Formons maintenant une expression analytique de la fonction fondamentale correspondant au nombre caractéristique λ_2.

Posons, comme au n° **26**,

$$Q = \frac{P''}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}},$$

où

(95) $$P'' = P'_0 + \lambda P'_1 + \lambda^2 P'_2 + \ldots + \lambda^k P'_k + \ldots$$

est une série absolument et uniformément convergente dans (D), pourvu que

$$|\lambda| < \lambda_3 > \lambda_2.$$

On trouve, en répétant les raisonnements du n° **27**,

(96) $$P'_k = Q_k - \frac{Q_{k-1}}{\lambda_2}, \quad Q_{-1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si l'on pose

$$\lambda = \lambda_2,$$

on aura

$$P''(\lambda_2) = A_2 V_2$$

et, en vertu de (95) et (96),

$$U_2 = A_2 V_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_2^k \left(Q_k - \frac{Q_{k-1}}{\lambda_2} \right) = \lim_{k=\infty} \lambda_2^k Q_k,$$

où Q_k et λ_2 sont connus.

On obtient ainsi une expression analytique de la fonction $U_2(m)$ *satisfaisant à l'équation*

$$U_2(m) = \lambda_2 \int p(m_1) G(m, m_1) U_2(m_1) d\tau',$$

c'est-à-dire de *la fonction fondamentale correspondant au nombre* λ_2, *défini par l'équation* (94).

31. Posons ensuite

$$Q = \frac{A_2 V_2}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}} + Q'_0 + \lambda Q'_1 + \lambda^2 Q'_2 + \ldots.$$

Répétant presque textuellement les raisonnements précédents, on trouve

$$Q'_k = Q_k - \frac{A_2 V_2}{\lambda_2^k}.$$

Ces équations déterminent successivement les fonctions Q'_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), car Q_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), $A_2 V_2$ et λ_2 sont déjà connus.

Si nous posons

$$J''_k = \int p(m) [Q'_k(m)]^2 d\tau,$$

nous obtiendrons un troisième nombre positif

(97) $$\lambda_3 = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J''_k}}{\sqrt{J''_{k+1}}} > \lambda_2,$$

qui représentera un pôle simple de la fonction

$$Q' = \frac{P'''}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_3}},$$

où P''' est une fonction qui se réduit pour $\lambda = \lambda_3$ à une fonction $U_3(m)$ vérifiant

l'équation

$$U_3(m) = \lambda_3 \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, U_3(m_1)\, d\tau'.$$

Donc, $U_3(m)$ est une fonction fondamentale correspondant au nombre caractéristique λ_3.

La fonction P''' se représente sous la forme de la série

$$P'' = P''_0 + \lambda P''_1 + \lambda^2 P''_2 + \ldots + \lambda^k P''_k + \ldots,$$

absolument et uniformément convergente dans (D), pourvu que

$$|\lambda| < \lambda_4 > \lambda_3.$$

Les fonctions P''_k s'expriment à l'aide des fonctions connues Q'_k comme il suit :

$$P''_k = Q'_k - \frac{Q'_{k-1}}{\lambda_3}, \qquad Q'_{-1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

La fonction U_3 se représente sous la forme suivante

$$U_3 = A_3 V_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_3^k \left(Q'_k - \frac{Q'_{k-1}}{\lambda_3} \right) = \lim_{k=\infty} \lambda_3^k Q'_k, \tag{98}$$

où

$$A_3 = \int p f V_3\, d\tau,$$

V_3 étant une fonction vérifiant l'équation

$$V_3(m) = \lambda_3 \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_3(m_1)\, d\tau',$$

jointe à la condition

$$\int p V_3^2\, d\tau = 1.$$

L'égalité (97) *détermine un troisième nombre caractéristique* λ_3; *l'égalité* (98) *donne une expression analytique d'une troisième fonction fondamentale correspondant au nombre* λ_3.

En continuant ainsi nous déterminerons successivement une suite de nombres positifs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots,$$

et de fonctions fondamentales correspondantes

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots, \quad U_k, \quad \ldots$$

vérifiant les équations

$$U_k(m) = \lambda_k \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, U_k(m_1)\, d\tau' \quad (^1).$$

32. Les expressions analytiques des fonctions $U_k(m)$ étant trouvées, il est aisé de déterminer les fonctions $V_k(m)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfaisant aux conditions

$$(99) \qquad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_k(m_1)\, d\tau',$$

$$(100) \qquad \int p(m)\, V_k^2(m)\, d\tau = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pour cela, il suffit, évidemment, de calculer les constantes

$$A_k = \int p f V_k\, d\tau.$$

Remarquant que la série

$$U_k = A_k V_k = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_k^s \left(Q_s^{(k-2)} - \frac{Q_{s-1}^{(k-2)}}{\lambda_k} \right) = \sum_{s=0}^{n} \lambda_k^s \left(Q_s^{(k-2)} - \frac{Q_{s-1}^{(k-2)}}{\lambda_k} \right) + r_n,$$

$Q_s^{(k-2)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ étant des fonctions connues, converge uniformément, on peut trouver un nombre ν tel qu'on ait

$$(101) \qquad |r_n| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \gtreqless \nu,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

De l'égalité

$$A_k V_k = U_k = \sum_{s=0}^{n} \lambda_k^s \left(Q_s^{(k-2)} - \frac{Q_{s-1}^{(k-2)}}{\lambda_k} \right) + r_n = \lambda_k^n Q_n^{(k-2)} + r_n,$$

on tire, eu égard à (100),

$$(102) \qquad A_k^2 = \lambda_k^{2n} \int p [Q_n^{(k-2)}]^2\, d\tau + 2 \lambda_k^n \int p r_n Q_n^{(k-2)}\, d\tau + \int p r_n^2\, d\tau.$$

Posons

$$J_n^{(k-1)} = \int p [Q_n^{(k-2)}]^2\, d\tau, \qquad \rho_n = \int p r_n^2\, d\tau + 2 \lambda_k^n \int p r_n Q_n^{(k-2)}\, d\tau.$$

L'égalité (102) se réduit à

$$A_k^2 = \lambda_k^{2n} J_n^{(k-1)} + \rho_n.$$

---

(1) *Voir* E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 125.

Supposons que n croisse indéfiniment et passons à la limite; on trouve

$$A_k^2 = \lim_{n=\infty} \lambda_k^{2n} J_n^{(k-1)} + \lim_{n=\infty} \rho_n.$$

Or,

$$|\rho_n| < \int p r_n^2 \, d\tau + 2\lambda_k^n \sqrt{\int p r_n^2 \, d\tau} \sqrt{J_n^{(k-1)}} = \sqrt{\int p r_n^2 \, d\tau} \left(2\lambda_k^n \sqrt{J_n^{(k-1)}} + \sqrt{\int p r_n^2 \, d\tau} \right).$$

D'autre part, on sait que

$$\frac{J_1^{(k-1)}}{J_0^{(k-1)}} < \frac{J_2^{(k-1)}}{J_1^{(k-1)}} < \ldots < \frac{J_n^{(k-1)}}{J_{n-1}^{(k-1)}} < \ldots \leqq \frac{1}{\lambda_k^2},$$

$$\lambda_k = \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{J_n^{(k-1)}}}{\sqrt{J_{n+1}^{(k-1)}}}.$$

On a donc

$$\lambda_k^n \sqrt{J_n^{(k-1)}} < \sqrt{J_0^{(k-1)}}.$$

Par conséquent,

$$|\rho_n| < A \sqrt{\int p r_n^2 \, d\tau},$$

A étant un nombre fixe ne dépendant pas de n.

Or, en vertu de (101),

$$\int p r_n^2 \, d\tau < \varepsilon^2 \int p \, d\tau \quad \text{pour} \quad n \gtreqless \nu,$$

d'où l'on conclut que

$$\lim_{n=\infty} \int p r_n^2 \, d\tau = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = 0$$

et

$$A_k^2 = \lim_{n=\infty} \lambda_k^{2n} J_n^{(k-1)}.$$

On peut donc écrire

$$A_k = \pm \lim_{n=\infty} \lambda_k^n \sqrt{J_n^{(k-1)}}.$$

D'autre part,

$$U_k = A_k V_k = \lim_{n=\infty} \lambda_k^n Q_n^{(k-1)}.$$

On trouve donc

$$V_k = \frac{U_k}{A_k} = \pm \frac{\lim\limits_{n=\infty} \lambda_k^n Q_n^{(k-1)}}{\lim\limits_{n=\infty} \lambda_k^n \sqrt{J_n^{(k-1)}}} = \pm \lim_{n=\infty} \frac{Q_n^{(k-1)}}{\sqrt{J_n^{(k-1)}}}.$$

On peut prendre à volonté le signe + ou —, car la fonction $-V_k$ satisfait aux mêmes conditions (99) et (100) que la fonction $+V_k$.

CHAPITRE II.

CERTAINES ÉGALITÉS GÉNÉRALES COMMUNES A TOUTES LES FONCTIONS FONDAMENTALES.

1. Revenons au cas général, où les nombres caractéristiques correspondant au domaine donné (D) et aux fonctions données $p(m)$ et $G(m, m_1)$ peuvent être aussi bien négatifs que positifs.

Nous désignerons tous les nombres caractéristiques successivement par

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots, \tag{1}$$

et nous supposerons, dans ce qui va suivre, qu'ils soient arrangés de façon que l'on ait

$$l_1 \leqq l_2 \leqq l_3 \leqq \ldots \leqq l_k \leqq \ldots,$$

l_k désignant la valeur numérique du nombre λ_k.

Les fonctions fondamentales correspondant aux nombres λ_k, nous les désignerons, comme précédemment, par $V_k(m)$ (ou simplement V_k) ($k = 1, 2, 3, \ldots$) en supposant toujours qu'elles satisfassent aux conditions

$$\int p(m)\, V_k^2(m)\, d\tau = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

2. Supposons que la fonction $f(m)$ dans l'équation

$$V(m) = \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V(m_1)\, d\tau' + f(m) \tag{2}$$

satisfasse à la condition

$$\int p(m) f(m)\, V_k(m)\, d\tau = 0. \tag{3}$$

L'équation (2) donne, eu égard à (75) (Chapitre précédent),

$$\int p(m)\, V(m)\, V_k(m)\, d\tau = \lambda \int p(m)\, V_k(m) \left(\int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V(m)\, d\tau' \right) d\tau$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda_k} \int p(m_1)\, V(m_1)\, V_k(m_1)\, d\tau'$$

ou

$$(\lambda_k - \lambda) \int p(m)\, V(m)\, V_k(m)\, d\tau = 0,$$

et, en vertu de (32) (Chapitre I, n° 15),

$$\frac{\lambda - \lambda_k}{D(\lambda)} \int p(m)\, V_k(m)\, P(m)\, d\tau = 0.$$

Supposant que λ tend vers λ_k et en passant à la limite, on trouve, en se rappelant que $P(m)$ se réduit à $V_k(m)$ pour $\lambda = \lambda_k$,

$$\lim_{\lambda=\lambda_k} \frac{\lambda - \lambda_k}{D(\lambda)} \int p(m)\, V_k^2(m)\, d\tau = 0,$$

ce qui est impossible.

Donc λ_k *est un point simple de la fonction* $V(m)$, *si* $f(m)$ *satisfait à la condition* (3).

3. Supposons que $f(m)$ satisfasse à n conditions

(4) $$\int p(m) f(m)\, V_k(m)\, d\tau = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

V_k étant les fonctions fondamentales correspondant aux nombres (1).

Le théorème du numéro précédent montre que dans le cas considéré tous les points $\lambda_k (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ sont les points simples de la fonction $V(m)$. Il s'ensuit que la fonction $V(m)$ ne peut admettre aucun pôle dont le module est plus petit ou égal à l_k.

Donc, *si la fonction* $f(m)$ *satisfait à* n *conditions* (4), *la fonction* $V(m)$ *reste holomorphe en* λ, *pourvu que* $|\lambda| < l_{n+1}$.

4. Désignons par $\varphi(m)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (D), et posons

(5) $$\varphi(m) = A_1 V_1(m) + A_2 V_2(m) + \ldots + A_n V_n(m) + R_n,$$

où n est un entier,

$$A_k = \int p(m)\, \varphi(m)\, V_k(m)\, d\tau \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

L'égalité (5) donne, en vertu de (76) et (77) (Chapitre I, n° 24),

$$S_n = \int p(m)\, R_n^2(m)\, d\tau = \int p(m)\, \varphi^2(m)\, d\tau - A_1^2 - A_2^2 - \ldots - A_n^2.$$

On en conclut que S_n *décroît, lorsque n croît indéfiniment* et que *la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$

converge toujours, pourvu que la fonction $\varphi(m)$ *reste bornée et intégrable dans* (D).

5. Envisageons maintenant l'équation suivante :

$$V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + R_n. \tag{6}$$

Il est aisé de s'assurer que R_n satisfait à n conditions,

$$\int p(m) R_n(m) V_k(m) d\tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6_1}$$

On en conclut, en tenant compte du théorème du n° 3, que le plus petit des modules des pôles de la fonction $V(m)$, satisfaisant à l'équation (6), est plus grand ou égal à l_{n+1}.

Par conséquent (Chapitre I, n° 10),

$$\lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k+1}}} \geqq l_{n+1}.$$

On en tire, eu égard à (11) (Chapitre I, n° 7),

$$\frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} > l_{n+1}, \tag{7}$$

où

$$J_0 = \int p(m) v_0^2(m) d\tau = \int p(m) R_n^2(m) d\tau, \tag{8}$$

$$J_1 = \int p(m) v_1^2(m) d\tau = \int p(m) \left(\int p(m) G(m, m_1) R_n(m_1) d\tau' \right)^2 d\tau. \tag{9}$$

6. Supposons d'abord que la suite de nombres caractéristiques soit limitée et contienne n nombres.

Dans ce cas, la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (6) sera holomorphe dans le plan de la variable λ tout entier, ce qui donne

$$\lim_{k=\infty} \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k+1}}} = \infty$$

et, *a fortiori*,

$$\frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} = \infty.$$

Il s'ensuit que

$$J_1 = \int p(m) \left(\int p(m) \, G(m, m_1) \, R_n(m_1) \, d\tau' \right)^2 d\tau = 0,$$

car J_0 ne surpasse pas une certaine limite fixe.

Posons

$$(10) \qquad T_n(m) = \int p(m_1) \, G(m, m_1) \, R_n(m_1) \, d\tau'.$$

Il est évident que $T_n(m)$ reste continue dans (D).

Par conséquent,

$$T_n(m) = \int p(m_1) \, G(m, m_1) \, R_n(m_1) \, d\tau' = 0$$

dans (D).

Or,

$$R_n(m) = \varphi(m) - A_1 V_1(m) - A_2 V_2(m) - \ldots - A_n V_n(m).$$

On a donc, eu égard à (75) du Chapitre précédent,

$$\int p(m_1) \, G(m, m_1) \, \varphi(m_1) \, d\tau = \frac{A_1}{\lambda_1} V_1(m) + \frac{A_2}{\lambda_2} V_2(m) + \ldots + \frac{A_n}{\lambda_n} V_n(m).$$

Cette égalité a lieu, quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ *bornée et intégrable dans* (D).

Le résultat analogue est indiqué aussi par M. D. Hilbert dans son Mémoire récent : *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Heft I, 1904).

7. Soit m_1 un point quelconque du domaine (D).

Décrivons autour de m_1 comme centre, une sphère (σ) de rayon ρ assez petit, et posons

$$\varphi(m) = 0 \qquad \text{à l'extérieur de } (\sigma),$$

$$\varphi(m) = \frac{1}{p(m)} \qquad \text{à l'intérieur de } (\sigma).$$

Désignant par $d\tau_0$ l'élément de volume de (σ), on trouve

$$\int G(m, m_1)\, d\tau_0 = \frac{V_1(m)}{\lambda_1}\int V_1(m_1)\, d\tau_0 + \frac{V_2(m)}{\lambda_2}\int V_2(m_1)\, d\tau_0 + \ldots + \frac{V_n(m)}{\lambda_n}\int V_n(m_1)\, d\tau_0.$$

Cette égalité a lieu quelque petit que soit ρ.

On en conclut, en se rappelant que $G(m, m_1)$ et $V_k(m)\,(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ restent continues dans (D), que

$$G(m, m_1) = \frac{V_1(m)\,V_1(m_1)}{\lambda_1} + \frac{V_2(m)\,V_2(m_1)}{\lambda_2} + \ldots + \frac{V_n(m)\,V_n(m_1)}{\lambda_n},$$

condition nécessaire, à laquelle doit satisfaire la fonction génératrice pour que la suite de nombres caractéristiques, appartenant au domaine donné (D), soit limitée (¹).

8. Passons maintenant au cas le plus intéressant, où la suite de nombres caractéristiques est illimitée.

L'inégalité (7) a lieu toujours, quel que soit le nombre n.

Supposons que n croisse indéfiniment et passons à la limite.

En se rappelant que l_{n+1} tend vers l'infini et que J_0 ne surpasse pas une certaine limite fixe, lorsque n croît indéfiniment, on obtient

$$\lim_{n=\infty} J_1 = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (9) et (10),

$$\lim_{n=\infty}\int p(m)\, T_n^2\, d\tau = 0. \tag{11}$$

Remarquons que cette égalité représente une simple généralisation d'une égalité analogue que j'ai établie, dans un Article inséré, il y a 8 ans, dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkow* (en 1896) (²), par une méthode tout à fait identique à celle que je viens d'exposer.

Remplaçons maintenant dans (5) m par m_1, multiplions le résultat par

---

(¹) *Voir* M. D. Hilbert, *loc. cit.*, p. 72.

(²) W. Stekloff, *Sur le développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions harmoniques* [*Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 1896 (en russe)].

$p(m_1)\,G(m, m_1)\,d\tau'$ et intégrons; il viendra, en vertu de (99),

$$f(m)=\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau=\frac{A_1}{\lambda_1}V_1(m)+\frac{A_2}{\lambda_2}V_2(m)+\ldots+\frac{A_n}{\lambda_n}V_n(m)+T_n,$$

d'où l'on tire aisément, eu égard à (6_1) et (10),

$$\int p(m)f^2(m)\,d\tau=\frac{A_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{A_2^2}{\lambda_2^2}+\ldots+\frac{A_n^2}{\lambda_n^2}+\int p(m)\,T_n^2\,d\tau,$$

et, en vertu de (11),

$$\int p(m)f^2(m)\,d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k^2}{\lambda_k^2}.$$

Posons

$$B_k=\int p(m)f(m)\,V_k(m)\,d\tau.$$

De l'égalité

$$f(m)=\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau',$$

on tire

$$B_k=\frac{A_k}{\lambda_k}\qquad(k=1, 2, 3, \ldots).$$

Par conséquent,

$$\int p(m)f^2(m)\,d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}B_k^2,\qquad B_k=\int p(m)f(m)\,V_k(m)\,d\tau,$$

ce qui exprime le théorème suivant :

Quelle que soit la fonction $f(m)$ se représentant à l'intérieur de (D) *sous la forme de l'intégrale*

$$f(m)=\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau', \tag{12}$$

φ étant une fonction bornée et intégrable, on a toujours, pour toutes les fonctions fondamentales, le développement suivant :

$$\int p(m)f^2(m)\,d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}B_k^2,\qquad B_k=\int p(m)f(m)\,V_k(m)\,d\tau.$$

9. Dans une Note, insérée aux *Comptes rendus* du 4 juillet 1904, j'ai énoncé un théorème plus général; or, il est aisé de remarquer que j'y ai fait une hypothèse particulière sur la fonction génératrice $G(m, m_1)$, comme le montre la méthode

même de la démonstration. J'ai choisi, en effet, de toutes les fonctions fondamentales celles qui correspondent à un groupe de fonctions génératrices satisfaisant aux conditions suivantes :

1° La fonction $H(m, m_1)$, qui figure dans l'expression (3) (Chapitre I) de $G(m, m_1)$, reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation de Laplace à l'extérieur de (S).

2° La constante μ, dans l'expression de $G(m, m_1)$, satisfait à l'inégalité

$$4\pi\mu > L\sqrt{\frac{D\beta}{\alpha}}.$$

Nous allons établir, dans ce qui va suivre, certaines propositions plus générales, en employant une autre méthode de la démonstration, un peu plus simple.

Il faut remarquer, en général, qu'à tout groupe de fonctions génératrices, satisfaisant à telles ou telles conditions particulières, correspond un groupe de fonctions $f(m)$ dont chacune peut se représenter sous la forme de l'intégrale (12).

Ce groupe se caractérise par certaines conditions, auxquelles doit satisfaire chaque fonction $f(m)$, appartenant au groupe considéré, pour que l'équation (12) soit satisfaite.

On peut partager ces conditions, en général, en deux catégories : les unes, auxquelles doivent satisfaire les fonctions $f(m)$ à l'intérieur du domaine (D) (conditions intérieures) ; les autres, auxquelles ces fonctions doivent satisfaire aux points de la surface (S) qui limite le domaine (D) (conditions aux limites).

Ces conditions peuvent se varier d'une infinité de manières, mais dans la plupart des applications les conditions intérieures supposent la continuité de la fonction primitive $f(m)$ et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre k, les conditions aux limites imposent certaines restrictions sur les valeurs de $f(m)$, ou sur celles de ces dérivées, ou donnent certaines relations entre la fonction $f(m)$ et ses dérivées pour les points de (S).

Soit maintenant $f(m)$ l'une des fonctions satisfaisant à un ensemble déterminé (a) des conditions intérieures de l'espèce tout à l'heure indiquée ainsi qu'à un ensemble analogue (b) des conditions aux limites.

Rassemblons en un seul groupe (A) toutes les fonctions $G(m, m_1)$, pour lesquelles l'égalité (12) a lieu toujours, quelle que soit la fonction $f(m)$ satisfaisant aux conditions (a) et (b).

Le théorème du n° 8 montre que l'*égalité*

$$(13) \qquad \int p(m) f^2(m)\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \qquad B_k = \int p(m) f(m) V_k(m)\, d\tau$$

et

$$\int (f-P)^2 d\tau_0 < M^2 \int d\tau_0 < M^2 S\,\delta,$$

δ désignant la grandeur de la surface (S), M le maximum de module de $(f-P)$.

Par conséquent,

$$(16)\qquad \int (f-P)^2 d\tau < \varepsilon_1^2 D + M^2 S\,\delta = \varepsilon^2.$$

Le théorème énoncé à la fin du numéro précédent s'applique à la fonction P, car elle satisfait aux conditions (a) et (b).

On a donc

$$\int p P^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \qquad B_k = \int p P V_k d\tau.$$

Écrivons cette égalité sous la forme suivante

$$\int p f^2 d\tau + 2\int p f(P-f)\,d\tau + \int p(P-f)^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + C_k)^2,$$

en y posant

$$A_k = \int p f V_k d\tau, \qquad C_k = \int p(P-f) V_k d\tau.$$

L'égalité précédente donne

$$(17)\qquad \int p f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k - \int p(P-f)^2 d\tau - 2\int p f(P-f)\,d\tau.$$

Soient maintenant

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,$$
$$b_1,\quad b_2,\quad \ldots,\quad b_n$$

deux suites de nombres arbitraires, n étant un entier quelconque. On a toujours

$$(18)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

quels que soient les nombres a_k et b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Si les séries

$$\sum_{k=}^{\infty} a_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

convergent, on aura

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| < \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}.$$

Appliquons cette inégalité générale au cas de

$$a_k = A_k, \qquad b_k = C_k.$$

En se rappelant que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

convergent (*voir* n° 4), on trouve

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k\right| < \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \leqq \int p f^2\, d\tau, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leqq \int p (P - f)^2\, d\tau$$

et

$$\left|\int p f (P - f)\, d\tau\right| \leqq \left(\int p f^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int p (P - f)^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc, eu égard à (16),

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \beta\varepsilon^2, \qquad \left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k\right| < \varepsilon\sqrt{\beta}\sqrt{\int p f^2\, d\tau},$$

$$\left|\int p f (P - f)\, d\tau\right| < \varepsilon\sqrt{\beta}\sqrt{\int p f^2\, d\tau}.$$

Ces inégalités et l'égalité (17) montrent que

$$\left|\int p f^2\, d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2\right| < \varepsilon N,$$

où

$$N = \left(2\beta\varepsilon + 4\sqrt{\beta}\sqrt{\int p f^2\, d\tau}\right)$$

est un nombre fini positif.

L'inégalité précédente démontre le théorème suivant :

Quelle que soit la fonction $f(m)$ continue avec ses dérivées jusqu'à un certain ordre k dans (D) [*conditions* (*a*) *du* n° 9], *on a toujours*

$$\int p(m) f^2(m)\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int p(m) f(m) V_k(m)\, d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A) (¹).

11. Soit maintenant $f(m)$ une fonction quelconque qui n'est que continue dans (D).

Quelle que soit la fonction f, continue dans le domaine (D), *on peut toujours construire un polynome* P *tel que l'on ait pour tous les points du domaine* (D)

$$|f - P| < \varepsilon_1,$$

ε_1 *étant un nombre positif, donné à l'avance.*

C'est le théorème connu de Weierstrass.

Le polynome P admet les dérivées de tous les ordres dans (D), et satisfait, évidemment, à la condition

$$\int (f - P)^2\, d\tau < \varepsilon_1^2 D = \varepsilon^2.$$

En répétant textuellement les raisonnements du numéro précédent en y entendant par P le polynome, défini de la manière tout à l'heure indiquée, nous démontrerons le théorème suivant :

Quelle que soit la fonction $f(m)$ continue dans (D), *on a toujours*

$$\int p f^2\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int p f V_k\, d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A).

12. Supposons enfin que $f(m)$ n'est que *bornée* et *intégrable* dans (D).

Décomposons le domaine (D) en domaines élémentaires

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_q,$$

q étant un nombre entier quelconque.

(¹) Compar. W. Stekloff, *Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions, etc.* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1904, p. 7, etc.) (présenté le 26 novembre 1903).

Désignons par e_k ceux de ces domaines, où l'oscillation O_k de la fonction f est plus petite qu'un nombre ε, donné à l'avance, par e_i ceux où l'oscillation O_i de f surpasse ε.

Comme f est intégrable dans (D), on peut choisir une décomposition convenable telle que l'on ait

$$\sum e_i < \varepsilon, \tag{18$_1$}$$

la somme étant étendue à tous les éléments e_i, où l'oscillation est plus grande que ε.

Le nombre ε étant fixé d'une manière convenable, formons une fonction ψ, *continue* dans le domaine (D) tout entier, et telle que l'on ait, en tout point de chacun des éléments e_k,

$$\psi = f + \eta, \tag{19}$$

où

$$|\eta| < \varepsilon, \tag{20}$$

ce qui est toujours possible.

Posons maintenant

$$f = \sum_{k=1}^{n} A_k V_k + R_n, \qquad A_k = \int p f V_k \, d\tau, \tag{21}$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} B_k V_k + R'_n, \qquad B_k = \int p \psi V_k \, d\tau, \tag{22}$$

$$S_n = \int p R_n^2 \, d\tau, \qquad S'_n = \int p R'^2_n \, d\tau.$$

Il est aisé de voir que la fonction R_n satisfait aux conditions

$$\int p R_n V_k \, d\tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Par conséquent,

$$S_n = \int p f R_n \, d\tau. \tag{23}$$

Multiplions maintenant (21) par $p\psi \, d\tau$, (22) par $pf \, d\tau$, intégrons et retranchons les résultats ainsi obtenus.

On trouve

$$\int p \psi R_n \, d\tau = \int p f R'_n \, d\tau. \tag{24}$$

Désignons, d'une manière générale, par le symbole

$$\int_{e_s} \mathrm{F}\, d\tau$$

l'intégrale étendue au domaine e_s $(s = 1, 2, 3, \ldots, q)$.

On peut écrire

$$\int p\psi \mathrm{R}_n\, d\tau = \sum \int_{e_k} p\psi \mathrm{R}_n\, d\tau + \sum \int_{e_i} p\psi \mathrm{R}_n\, d\tau,$$

d'où, en vertu de (19),

$$\int p\psi \mathrm{R}_n\, d\tau = \sum \int_{e_k} p(f+\eta) \mathrm{R}_n\, d\tau + \sum \int_{e_i} p\psi \mathrm{R}_n\, d\tau$$

$$= \int pf \mathrm{R}_n\, d\tau + \int_{e_k} p\eta \mathrm{R}_n\, d\tau + \sum \int_{e_i} p(\psi - f) \mathrm{R}_n\, d\tau,$$

ou, en vertu de (23) et (24),

$$\mathrm{S}_n = \int pf \mathrm{R}'_n\, d\tau - \sum \int_{e_k} p\eta \mathrm{R}_n\, d\tau + \sum \int_{e_i} p(f - \psi) \mathrm{R}_n\, d\tau.$$

Cette égalité donne

(25) $$\mathrm{S}_n \leqq \left| \int pf \mathrm{R}'_n\, d\tau \right| + \left| \sum \int_{e_k} p\eta \mathrm{R}_n\, d\tau \right| + \left| \sum \int_{e_i} p(f - \psi) \mathrm{R}_n\, d\tau \right|.$$

Or,

(26) $$\left| \int pf \mathrm{R}'_n\, d\tau \right| \leqq \mathrm{Q} \sqrt{\mathrm{S}'_n},$$

où

$$\mathrm{Q}^2 = \int pf^2\, d\tau$$

est un nombre fixe, ne dépendant pas de n.

D'autre part, en vertu de (20),

(27) $$\left| \sum \int_{e_k} p\eta \mathrm{R}_n\, d\tau \right| < \varepsilon \sum \int_{e_k} p \mid \mathrm{R}_n \mid d\tau < \varepsilon \int p \mid \mathrm{R}_n \mid d\tau$$

$$< \varepsilon \sqrt{\int p\, d\tau} \sqrt{\mathrm{S}_n} < \varepsilon \mathrm{Q} \sqrt{\beta \mathrm{D}},$$

car

$$\mathrm{S}_n \leqq \int pf^2\, d\tau = \mathrm{Q}^2.$$

On peut donc énoncer ce théorème général :

Théorème. — *Quelle que soit la fonction $f(m)$, bornée et intégrable dans le domaine* (D), *on a toujours*

$$(29) \qquad \int p(m) f^2(m)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int p(m) f(m) V_k(m)\,d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A).

13. Signalons encore un théorème plus général contenant comme un cas particulier le théorème que nous venons d'énoncer.

Désignons, comme précédemment (n° 10), par (D_i) un domaine quelconque intérieur à (D).

Soit f une fonction bornée et intégrable dans (D), soit φ une autre fonction pouvant devenir infinie aux environs de certains points isolés du domaine (D_i), mais telle que les intégrales

$$\int_{D_i} p f \varphi\,d\tau, \quad \int_{D_i} p \varphi V_k\,d\tau, \quad \int_{D_i} p \varphi^2\,d\tau,$$

étendues au domaine (D_i), aient un sens bien déterminé.

Multiplions l'égalité (21) par $p\varphi\,d\tau$ et intégrons-la, en étendant l'intégration au domaine (D_i).

On trouve

$$\int_{D_i} p f \varphi\,d\tau = \sum_{k=1}^{n} A_k B_k + \int_{D_i} p \varphi R_n\,d\tau,$$

où l'on a posé

$$B_k = \int_{D_i} p \varphi V_k\,d\tau \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Or,

$$\left| \int_{D_i} p \varphi R_n\,d\tau \right| \leqq \left(\int_{D_i} p \varphi^2\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D_i} p R_n^2\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}} < Q\sqrt{S_n},$$

où

$$Q^2 = \int p \varphi^2\,d\tau$$

est un nombre fixe, ne dépendant pas de n.

Supposons que l'indice n croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve, eu égard à (28),

$$\lim_{n=\infty} \int_{D_i} p \varphi R_n\,d\tau = 0,$$

Remarquons que cette dernière condition peut être remplacée par une autre plus générale.

Il est aisé de s'assurer, en effet, que *l'égalité* (29) *aura lieu toutes les fois qu'on pourra, la fonction $f(m)$ étant donnée, trouver une autre fonction $\varphi(m)$ telle qu'on ait*

$$\int\left(f(m)-\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau'\right)^2 d\tau < \varepsilon^2,$$

ε *étant un nombre positif, donné à l'avance.*

Pour cela, il suffit de poser

$$P(m)=\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau'$$

et appliquer au cas considéré les raisonnements du n° 10.

Remarquons qu'une proposition analogue est signalée aussi par M. D. Hilbert dans sa Communication, présentée à la Société scientifique à Göttingen le 5 mars 1904 (*voir* son Mémoire : *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*).

Or, on voit, par ce qui précède, que ce théorème ainsi que tous les autres, établis plus haut (n° 10, etc.), ne représentent que de simples conséquences de mes recherches antérieures qui ont été présentées à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg le 26 novembre 1903 (*voir* mon Mémoire : *Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries des fonctions, etc.*).

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION DONNÉE EN SÉRIES PROCÉDANT SUIVANT LES FONCTIONS FONDAMENTALES.

15. Supposons que la fonction donnée $f(m)$ se représente dans (D) sous la forme de l'intégrale

$$f(m)=\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau' \quad \text{dans (D)}, \tag{30}$$

où $\varphi(m)$ est une certaine fonction du point m, bornée et intégrable dans (D). Posons

$$\varphi = B_1 V_1 + B_2 V_2 + \ldots + B_n V_n + r_n, \tag{31}$$

où

$$B_k=\int p\varphi V_k\,d\tau \qquad (k=1, 2, 3, \ldots, n).$$

Multiplions l'égalité (31) par $p(m_1)\,G(m, m_1)\,d\tau'$ et intégrons-la.

Supposons encore que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k$$

converge uniformément dans (D).

Dans ce cas, la fonction R_n dans (32) tend vers une fonction R, continue dans (D), lorsque n croît indéfiniment.

On a donc

$$\lim_{n=\infty} \int p R_n^2 \, d\tau = \int p \lim_{n=\infty} R_n^2 \, d\tau = \int p R^2 \, d\tau = 0,$$

d'où

$$R = 0$$

et

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \qquad A_k = \int p f V_k \, d\tau,$$

ce qui démontre le théorème suivant :

Théorème. — *La série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \qquad A_k = \int p f V_k \, d\tau$$

représente le développement d'une fonction donnée $f(m)$, *continue dans* (D), *en série procédant suivant les fonctions fondamentales appartenant au groupe* (A) *toutes les fois qu'elle converge uniformément dans* (D).

17. Supposons enfin que la fonction $f(m)$ satisfasse à l'équation (30), et reprenons l'inégalité (33) qui a lieu pour toutes les fonctions fondamentales.

Si ces fonctions appartiennent au groupe (A), on trouve, d'après le théorème du n° **12**,

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \int p r_n^2 \, d\tau = 0,$$

car, d'après l'hypothèse faite, φ reste bornée et intégrable dans (D).

On a donc

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k \quad \text{dans (D)}.$$

Il est aisé de s'assurer que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k$$

converge uniformément dans (D).

Le théorème du n° 12 montre qu'on peut toujours assigner un nombre ν tel qu'on ait

$$S_n < \varepsilon^2 \quad \text{pour} \quad n \geqq \nu.$$

Le nombre ν étant choisi de la manière indiquée, on aura, eu égard à (32) et (33),

$$\left| f - \sum_{k=1}^{n} A_k V_k \right| < Q\varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{pour} \quad n \geqq \nu,$$

ε_1 étant un nombre positif donné à l'avance.

Cette inégalité démontre le théorème suivant :

Théorème. — *Toute fonction donnée $f(m)$ se représentant dans* (D) *sous la forme de l'intégrale*

$$f(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau',$$

$\varphi(m)$ *étant une fonction quelconque, bornée et intégrable dans* (D), *se développe en série uniformément convergente procédant suivant les fonctions fondamentales appartenant au groupe* (A).

18. Indiquons encore une propriété intéressante de toutes les séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \qquad A_k = \int p f V_k\, d\tau,$$

où V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) sont les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A).

Écrivons l'égalité (29_1) du n° 13 sous cette forme

$$\int_{D_i} p\varphi \left(f - \sum_{k=1}^{n} A_k V_k \right) d\tau = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k B_k = r'_n$$

et posons

$$\varphi = \frac{1}{p} \quad (^1).$$

(¹) Rappelons que p ne s'annule pas dans (D).

On aura

$$K = \int_{D_i} \left(f - \sum_{k=1}^{n} A_k V_k \right) d\tau = r_n,$$

où r_n désigne la valeur de r'_n pour $\varphi = \frac{1}{p}$.

D'après le théorème du n° 13, on peut toujours trouver un nombre ν tel qu'on ait

$$(34) \qquad |K| < \varepsilon D_i,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance, D_i désignant le volume du domaine (D_i).

Remarquons que cette inégalité a lieu, quel que soit le domaine (D_i), intérieur au domaine donné (D).

Supposons que la fonction $f(m)$ reste continue dans (D); la fonction

$$\psi = f - \sum_{k=1}^{\nu} A_k V_k$$

le sera aussi.

D'après le théorème de la moyenne, on peut trouver un point m, intérieur au domaine (D_i) [1], tel qu'on ait

$$K = D_i \left(f(m) - \sum_{k=1}^{\nu} A_k V_k(m) \right).$$

On aura donc, eu égard à (34),

$$\left| f(m) - \sum_{k=1}^{\nu} A_k V_k(m) \right| < \varepsilon,$$

ce qui nous conduit au théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout domaine* (D_i), *intérieur au domaine donné* (D), *il existe au moins un point m, où la série*

$$\sum_{k=1}^{\nu} A_k V_k, \qquad A_k = \int p f V_k \, d\tau,$$

ν étant un entier convenablement choisi, V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *étant les fonctions fondamentales appartenant au groupe* (A), *représente la valeur de la fonction f en ce point avec l'approximation donnée à l'avance* ε, *pourvu que la fonction donnée f reste continue dans le domaine* (D_i).

---

[1] Remarquons que la position du point m dépend, en général, du choix du nombre ν.

Cette inégalité donne

(43) $$J_k < q^{2k} J_0.$$

On en conclut que la série

$$|\psi_0(m)| + \lambda\left[\sqrt{J_0} + \lambda\sqrt{J_1} + \lambda^2\sqrt{J_2} + \ldots + \lambda^k\sqrt{J_k} + \ldots\right]$$

converge pour toutes les valeurs positives de λ, pourvu que

$$\lambda q < 1,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda < \frac{1}{q} = \frac{\mu}{L\sqrt{D}} \quad (^1).$$

Il en est de même de la série (41).

On en conclut que, si la constante μ satisfait à l'inégalité

(44) $$\mu^2 > DL^2,$$

la série (41) converge pour $\lambda = 1$ et représente une fonction $\psi(m)$, bien déterminée, continue dans (D) et vérifiant l'équation

(39) $$\psi(m) = \frac{1}{\mu}\int Q(m, m_1)\,\psi(m_1)\,d\tau' + \Theta(m).$$

21. Supposons maintenant que les fonctions

$$\Delta f(m) \qquad \text{et} \qquad Q(m, m_1) = \Delta H(m, m_1)$$

satisfassent aux conditions

(45) $$|\Delta f(m') - \Delta f(m'')| < a\rho^\beta,$$

(45_1) $$|Q(m', m_1) - Q(m'', m_1| < a\rho^\beta,$$

a et $\beta < 1$ étant des nombres positifs ne dépendant pas du choix des points m', m'', m_1 dans le domaine (D), ρ désignant la distance $m'm''$.

Ces conditions étant remplies, on aura

$$|\psi(m') - \psi(m'')| < A\rho^\beta,$$

(1) Nous supposons que $\mu > 0$.

A étant un nombre positif ne dépendant pas de la position des points m' et m'' dans (D).

On trouve, en effet,

$$(46) \qquad |\psi(m') - \psi(m'')| < \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k |\psi_k(m') - \psi_k(m'')|.$$

Or, en vertu de (42), (43), (45) et (45_1),

$$[\psi_k(m') - \psi_k(m'')]^2 < \frac{J_{k-1}}{\mu^2} \int [Q(m', m_1) - Q(m'', m_1)]^2 d\tau'$$
$$< \frac{a^2 \rho^{2\beta} D}{\mu^2} J_{k-1} < \frac{a^2 \rho^{2\beta} D}{\mu^2} q^{2(k-1)} J_0.$$

Par conséquent, en vertu de (46),

$$|\psi(m') - \psi(m'')| < \frac{a}{\mu} [1 + \lambda D J_0 (1 + \lambda q + \lambda^2 q^2 + \ldots + \lambda^k q^k + \ldots)] \rho^\beta.$$

Supposant maintenant que μ satisfasse à l'inégalité (44) et posant $\lambda = 1$, on trouve

$$|\psi(m') - \psi(m'')| < \frac{a}{\mu} \left(1 + \frac{DJ_0}{1-q}\right) \rho^\beta = A \rho^\beta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On en conclut, d'après le théorème de M. Hölder ([1]), que *le théorème de Poisson s'applique au potentiel*

$$\int \frac{\psi(m_1)}{r} d\tau' = \int \frac{p(m_1)\varphi(m_1)}{r} d\tau',$$

pourvu que les fonctions $f(m)$ *et* $H(m, m_1)$ *satisfassent aux inégalités* (45) *et* (45_1).

22. Revenons à l'équation

$$(47) \qquad u(m) = f(m) - \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'.$$

Supposons que les conditions (44), (45) et (45_1) soient satisfaites et que $\varphi(m)$ dans (47) soit égale à

$$\frac{\psi(m)}{p(m)},$$

où $\psi(m)$ est la fonction vérifiant l'équation (39).

([1]) O. Hölder, *Beiträge zur Potentialtheorie*. Stuttgart, 1882, p. 10.

ordres dans (D), *satisfaisant à la condition*

(52) $$|\Delta f(m') - \Delta f(m'')| < \alpha\rho^\beta$$

[*conditions intérieures* (*a*) *du n*° 9] *et s'annulant sur* (S) [*conditions* (*b*) *aux limites du n*° 9].

23. Supposons maintenant que la fonction $H(m, m_1)$ satisfasse aux conditions (48) et (49) du théorème précédent et à la suivante :

$$\frac{\partial H_i}{\partial n} + \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S).}$$

Soit $f(m)$ une fonction vérifiant l'inégalité (52) et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S).}$$

Ces conditions étant remplies, nous obtiendrons, comme au n° 22, la fonction

$$U(m) = f(m) - \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau'$$

assujettie aux conditions

$$\Delta U(m) = 0 \quad \text{dans (D),}$$

$$\frac{\partial U_i(m)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S),}$$

ce qui donne

$$U(m) = \text{const.} \quad \text{dans (D).}$$

On a donc

$$f_1(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau',$$

où l'on a posé

$$f_1(m) = f(m) + C,$$

C étant une constante.

On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème. — *Toute fonction*

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $H(m, m_1)$ *est une fonction satisfaisant aux conditions* (48) *et* (49) *du*

numéro précédent et à la suivante

$$\frac{\partial G_i(m, m_1)}{\partial n} = 0,$$

μ *est une constante satisfaisant à l'inégalité* (51), *appartient au groupe* (A), *c'est-à-dire à toute fonction* $f(m)$, *satisfaisant à la condition* (52) *et à la suivante*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0,$$

correspond une fonction $\varphi(m)$, *bien déterminée dans* (D) *et telle qu'on ait*

$$f(m) + C = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau' \quad \textit{dans } (D),$$

C *étant une constante.*

24. Supposons encore que $G(m, m_1)$ satisfasse à toutes les conditions du théorème du n° **22**, sauf à la condition (50), qui se remplace par la suivante

$$\frac{\partial G_i}{\partial n} + h\, G_i = 0 \quad \text{sur } (S),$$

h étant une constante positive, différente de zéro.

Soit $f(m)$ une fonction, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + h f_i = 0 \quad \text{sur } (S).$$

Sous ces conditions, la fonction

$$U(m) = f(m) - \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau',$$

où

$$\varphi(m) = \frac{\psi(m)}{p(m)},$$

$\psi(m)$ désignant la fonction vérifiant l'équation (39) [1], représente une fonction satisfaisant à l'équation

$$\Delta\, U(m) = 0 \quad \text{dans } (D),$$

jointe à la condition

$$\frac{\partial U_i(m)}{\partial n} + h\, U_i(m) = 0 \quad \text{sur } (S).$$

---

[1] Rappelons que $\psi(m)$ se représente sous la forme de la série

$$\psi(m) = \psi_0(m) + \psi_1(m) + \psi_2(m) + \ldots + \psi_k(m) + \ldots,$$

absolument et uniformément convergente dans (D) (n° 20).

On a donc

$$f(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau' \quad \text{dans } (D).$$

On peut donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Toute fonction*

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}$$

satisfaisant aux conditions (48), (49) *et* (51) *et à la suivante*

$$\frac{\partial G_i}{\partial n} + h G_i = 0 \quad \textit{sur } (S),$$

h étant une constante positive, différente de zéro, appartient au groupe (A), *c'est-à-dire à toute fonction $f(m)$, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans* (D) *et satisfaisant à l'inégalité* (52) [*conditions intérieures* (*a*) *du n°* 9] *ainsi qu'à la condition*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + h f_i = 0 \quad \textit{sur } (S)$$

[*conditions* (*b*) *aux limites du n°* 9], *correspond une fonction $\varphi(m)$, bien déterminée et telle qu'on ait*

$$f(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau' \quad \textit{dans } (D).$$

25. Faisons enfin l'hypothèse suivante sur $H(m, m_1)$:

La fonction $H(m, m_1)$, considérée comme une fonction du point m, le point m_1 étant situé à l'intérieur de (D), *reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admet les dérivées du second ordre dans* (D) *et* (D'), *se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation*

$$\Delta H(m, m_1) = 0 \quad \textit{dans } (D').$$

Formons, comme précédemment, la fonction

$$U(m) = f(m) - \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau',$$

en supposant que $f(m)$ jouisse des mêmes propriétés que $H(m, m_1)$ et que $\varphi(m)$

$\psi(m)$ est la fonction se représentant sous la forme de la série

$$\psi(m)=\psi_0(m)+\psi_1(m)+\psi_2(m)+\ldots+\psi_k(m)+\ldots,$$

où

$$\psi_0(m)=-\frac{\Delta f(m)}{\mu}, \qquad \psi_k(m)=\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,\psi_{k-1}(m_1)\,d\tau',$$

absolument et uniformément convergente dans (D).

26. Considérons maintenant le cas plus général :

Supposons seulement que la fonction

$$G(m,m_1)=H(m,m_1)+\frac{\mu}{4\pi r}$$

soit symétrique en m et m_1 et appartienne au groupe (A), c'est-à-dire qu'à toute fonction $f(m)$, satisfaisant à certaines conditions intérieures (a) et à certaines conditions (b) aux limites, correspond une fonction $\varphi(m)$ telle qu'on ait

$$(53)\qquad f(m)=\int p(m_1)\,G(m,m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau' \quad \text{dans (D)}.$$

Appliquons le théorème général du n° 13 à la solution de cette équation.

Remplaçons dans (29_1) φ par $\frac{1}{p}$, f par la fonction cherchée $\varphi(m)$.

On trouve

$$\int_{D_i}\varphi\,d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\int_{D_i}V_k\,d\tau=\sum_{k=1}^{n}B_k\int_{D_i}V_k\,d\tau+s_n,$$

où l'on a posé

$$B_k=\int p\varphi V_k\,d\tau, \qquad s_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}B_k\int_{D_i}V_k\,d\tau,$$

V_k ($k=1, 2, 3, \ldots$) désignant les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $G(m, m_1)$.

D'après le théorème du n° 13, on peut trouver un nombre ν tel qu'on ait

$$|s_n|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad n\geqq\nu,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

On peut donc écrire

$$(54)\qquad \left|\int_{D_i}\varphi\,d\tau-\sum_{k=1}^{n}B_k\int_{D_i}V_k\,d\tau\right|<\varepsilon D_i \quad \text{pour} \quad n\geqq\nu,$$

D_i désignant le volume du domaine (D_i).

Supposons que $\varphi(m)$ reste continue dans (D).

Soit m un point quelconque du domaine donné (D).

Écrivons autour de m, comme centre, une sphère (σ) de rayon ρ, suffisamment petit.

Choisissant convenablement ρ, on aura

$$\varphi = \varphi(m) + \eta \quad \text{à l'intérieur de } (\sigma)$$

où

$$|\eta| < \varepsilon,$$

pour tous les points intérieurs à (σ).

On aura donc

$$\int_{D_i} \varphi\, d\tau = \varphi(m) D_i + \int_{D_i} \eta\, d\tau,$$

d'où

$$\left| \int_{D_i} \varphi\, d\tau - \varphi(m) D_i \right| < \varepsilon D_i.$$

Par conséquent, en vertu de (54),

$$\left| \varphi(m) - \frac{1}{D_i} \sum_{k=1}^{n} B_k \int_{D_i} V_k\, d\tau \right| < 2\varepsilon.$$

Or, l'équation (53) donne

$$B_k = \lambda_k A_k, \tag{55}$$

où l'on a posé

$$A_k = \int p f V_k\, d\tau.$$

On trouve donc finalement

$$\left| \varphi(m) - \frac{1}{D_i} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k \int_{D_i} V_k\, d\tau \right| < 2\varepsilon.$$

Cette inégalité permet de calculer la valeur de la fonction cherchée $\varphi(m)$ *en tout point* m *du domaine* (D) *avec l'approximation donnée à l'avance* 2ε, *si nous supposons seulement que* $\varphi(m)$ *reste continue dans* (D).

Dans le cas plus général, où $\varphi(m)$ n'est que *bornée* et *intégrable* dans (D), nous obtiendrons, en tenant compte de (54) et (55),

$$\left| \frac{1}{D_i} \int_{D_i} \varphi\, d\tau - \frac{1}{D_i} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k \int_{D_i} V_k\, d\tau \right| < \varepsilon,$$

l'inégalité qui permet de calculer la valeur moyenne de la fonction cherchée $\varphi(m)$ *dans tout domaine* (D_i), *intérieur à* (D), *avec l'approximation donnée à l'avance* ε.

27. Faisons encore une remarque sur le problème suivant :

Soit $\varphi(m)$ *une fonction vérifiant l'équation* (53), *où* $f(m)$ *est une fonction donnée; trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int_{D_i} \varphi\psi\, d\tau,$$

où ψ *est une autre fonction donnée, bornée et intégrable dans* (D).

Supposant, comme précédemment, que $G(m, m_1)$ appartient au groupe (A), on trouve

$$\int_{D_i} \varphi\psi\, d\tau = \int_{D_i} p\varphi \frac{\psi}{p}\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k C_k,$$

où l'on a posé

$$B_k = \int p\varphi V_k\, d\tau, \qquad C_k = \int \psi V_k\, d\tau.$$

C_k sont les constantes connues; il ne reste qu'à trouver les valeurs de B_k.

Or, nous avons vu que [l'égalité (55)]

$$B_k = \lambda_k \int p f V_k\, d\tau.$$

On a donc

$$\int_{D_i} \varphi\psi\, d\tau = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int p f V_k\, d\tau \int \psi V_k\, d\tau + r_n,$$

où

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k C_k.$$

Choisissant convenablement le nombre n, nous aurons approximativement

$$\int_{D_i} \varphi\psi\, d\tau = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int p f V_k\, d\tau \int \psi V_k\, d\tau,$$

avec l'approximation donnée à l'avance ε, car on peut toujours choisir un nombre ν

de façon que l'on ait

$$|r_n| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \overline{\gtrless} \nu.$$

Le problème proposé est donc résolu.

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA THÉORIE GÉNÉRALE A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

1. Les résultats généraux des recherches précédentes peuvent avoir plusieurs applications dans l'Analyse ainsi que dans la Physique mathématique.

Ces applications sont si nombreuses qu'il est presque impossible d'en donner un aperçu détaillé et complet.

Il suffit de se borner aux exemples les plus simples et les plus importants qui permettent de faire comprendre le mieux la portée de la théorie générale développée plus haut.

2. Prenons pour la fonction génératrice la fonction de Green.

On sait que

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{1}{4\pi r},$$

où $H(m, m_1)$ est une fonction satisfaisant aux conditions (a), (b), (c) du n° **4** du Chapitre I ainsi qu'à l'inégalité (19), car

$$\Delta H = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (D).}$$

Donc, la solution de l'équation

$$V(m) = \lambda \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V(m_1)\, d\tau' + f(m), \tag{1}$$

où $G(m, m_1)$ désigne maintenant la fonction de Green, se représente sous la forme de la série

$$v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \ldots + \lambda^k v_k + \ldots,$$

où v_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sont les fonctions du point m s'annulant sur (S), car

$$v_k = \int p(m_1)\, G(m, m_1) v_{k-1}(m_1)\, d\tau'$$

et $G(m, m_1)$ s'annule sur (S).

On a donc dans le cas considéré

$$\int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n}\, ds = 0$$

[comparer la formule (19_2) du n° **12** du Chapitre I].

La théorie générale du Chapitre I s'applique immédiatement au cas particulier qui nous intéresse et conduit au théorème suivant :

La fonction $V(m)$ *vérifiant l'équation* (1), *où* $G(m, m_1)$ *désigne la fonction de Green, est une fonction méromorphe en* λ, *n'ayant que des pôles simples et réels*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots$$

dont les résidus correspondants sont les fonctions fondamentales ayant pour fonction génératrice la fonction de Green.

Ces fonctions fondamentales V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *satisfont aux équations*

$$V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_k(m_1)\, d\tau', \tag{2}$$

ou aux équations

$$\Delta V_k + \lambda_k p V_k = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (D), \tag{3}$$

$$V_k = 0 \quad \textit{sur } (S). \tag{4}$$

Il est aisé de s'assurer que la fonction de Green appartient à la classe de fonctions génératrices, auxquelles correspondent les fonctions fondamentales n'ayant que des nombres caractéristiques positifs (*voir* n° **25** du Chapitre I).

Soit, en effet, φ une fonction quelconque, continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

Posons

$$u = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau'.$$

La fonction u reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) et satisfait aux conditions

$$\Delta u + p\varphi = 0 \quad \text{dans (D)},$$
$$u = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

On a donc

$$K = \int p(m)\,\varphi(m)\left(\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau'\right)d\tau$$
$$= -\int u\,\Delta u\,d\tau = \int \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\tau > 0,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

La condition (78) du n° **25** du Chapitre I est satisfaite.

Donc, *tous les nombres caractéristiques* λ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *sont positifs.*

L'existence des fonctions V_k satisfaisant aux conditions (3) et (4) est donc démontrée (*comparer* H. Poincaré, *Rendiconti di Palermo,* 1894).

3. Montrons maintenant que la fonction $G(m, m_1)$ de Green appartient au groupe (A).

La fonction de Green se représente sous la forme

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $\mu = 1$, $H(m, m_1)$ est une fonction vérifiant l'équation

$$\Delta H(m, m_1) = 0 \qquad \text{dans (D).}$$

D'autre part, $G(m, m_1)$ s'annule sur (S).

Il est évident que la fonction de Green satisfait à toutes les conditions du théorème du n° **22** du Chapitre précédent.

Dans ce cas, l'équation (39) se réduit à

$$\psi = -\Delta f,$$

d'où

$$\varphi = -\frac{\Delta f}{p}.$$

On trouve donc, moyennant le théorème du n° **22** du Chapitre précédent,

$$(5) \qquad f(m) = -\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)}\,d\tau' \quad \text{dans (D),}$$

quelle que soit la fonction $f(m)$, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) et satisfaisant à la condition

$$(5_{21}) \qquad |\Delta f(m') - \Delta f(m'')| < a\rho^\beta,$$

a et $\beta < 1$ étant des nombres fixes ne dépendant pas de la position des points m' et m'' dans (D), ρ désignant la distance $m'm''$.

Donc, *la fonction* $G(m, m_1)$ *de Green appartient au groupe* (A).

4. Nous pouvons appliquer au cas considéré la théorie générale du Chapitre II et en déduire le théorème suivant :

Soient $f(m)$ *une fonction bornée et intégrable dans* (D), $\varphi(m)$ *une autre fonction qui peut devenir infinie en certains points isolés intérieurs à* (D) *mais telle que les intégrales*

$$\int_{D_i} p\varphi^2\,d\tau,\quad \int_{D_i} p\varphi V_k\,d\tau,\quad \int_{D_i} pf\varphi\,d\tau$$

aient un sens bien déterminé.

Ces conditions étant remplies, on a toujours

$$\int_{D_i} p\varphi f\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k, \tag{6}$$

$$A_k = \int pfV_k\,d\tau,\qquad B_k = \int_{D_i} p\varphi V_k\,d\tau,$$

où $V_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ *sont les fonctions satisfaisant aux conditions* (3) *et* (4).

5. Supposons maintenant que la fonction $f(m)$ s'annulant sur (S) n'admette que les dérivées *des deux premiers ordres* et que les dérivées du second ordre restent bornées et intégrables à l'intérieur de (D).

Appliquons le théorème précédent à la fonction

$$u = f(m) + \int p(m_1)\,G(m, m_1)\frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)}\,d\tau',$$

en posant dans (6)

$$(D_i) = (D),\qquad \varphi = f = u.$$

On trouve

$$\int pu^2\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} B_k = \int puV_k\,d\tau &= \int p(m)\left(f(m) + \int p(m_1)\,G(m, m_1)\frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)}\,d\tau'\right)V_k(m)\,d\tau \\ &= A_k + \int p(m)\left(\int p(m_1)\,G(m, m_1)\frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)}\,d\tau'\right)V_k\,d\tau, \end{aligned}$$

et

$$A_k = \int p f V_k \, d\tau.$$

Or, en vertu de (2),

$$\int p(m) V_k(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) \frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)} d\tau' \right) d\tau$$
$$= \int \Delta f(m_1) \left(\int p(m) G(m, m_1) V_k(m) \, d\tau' \right) d\tau = \frac{1}{\lambda_k} \int \Delta f(m) V_k(m) \, d\tau.$$

D'autre part, d'après les hypothèses faites sur la fonction $f(m)$, on trouve, eu égard à (3) et (4),

$$\int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} d\tau = -\int f \Delta V_k \, d\tau = -\int V_k \Delta f \, d\tau = +\lambda_k \int p f V_k \, d\tau = +\lambda_k A_k.$$

Par conséquent,

$$\int p(m) V_k(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) \frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)} d\tau' \right) d\tau = -A_k$$

et

$$B_k = 0.$$

On trouve donc

$$\int p u^2 \, d\tau = 0,$$

d'où

$$u = f(m) + \int G(m, m_1) \Delta f(m_1) \, d\tau' = 0 \quad \text{dans (D)},$$

car la fonction u reste continue, la fonction $p(m)$ continue et positive dans (D).

Donc, *l'équation* (5) *a lieu toutes les fois que la fonction* $f(m)$ *reste continue, admet les dérivées des deux premiers ordres dans* (D) *et s'annule sur* (S).

6. Appliquons maintenant le théorème général du n° **17** aux fonctions fondamentales satisfaisant aux équations (3) et (4).

On obtient immédiatement ce théorème :

Toute fonction f continue admettant les dérivées des DEUX *premiers ordres dans* (D) *et s'annulant sur* (S) *se développe dans* (D) *en série uniformément convergente procédant suivant les fonctions* V_k, *définies par les équations* (3) *et* (4),

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \qquad A_k = \int p f V_k \, d\tau.$$

Les théorèmes que nous venons de signaler permettent de résoudre le problème suivant de la théorie de la chaleur :

Trouver une fonction U *dépendant du temps* t *et de coordonnées* x, y, z, *vérifiant l'équation*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K\,\Delta U \quad \textit{à l'intérieur du domaine } (D),$$

K *désignant le coefficient de conductibilité, et aux conditions*

$$U = 0 \quad \textit{sur } (S),$$
$$U = f(x, y, z) \quad \textit{pour } t = 0.$$

Nous avons déjà exposé les principes de la méthode dans l'Introduction à ce Mémoire.

7. Prenons maintenant pour fonction génératrice la fonction suivante :

$$G(m, m_1) = J(m, m_1),$$

où

$$J(m, m_1) = J_1(m, m_1) + \frac{1}{4\pi r},$$

$J_1(m, m_1)$ étant une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

Elle reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de (D);

Elle satisfait à l'équation

$$\Delta J_1 = \frac{1}{D} \quad \text{à l'intérieur de } (D), \tag{7}$$

D désignant le volume de (D);

Elle satisfait à la condition

$$\frac{\partial J_{1i}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} \quad \text{sur } (S), \tag{8}$$

où φ désigne l'angle que fait la droite, dirigée du point m_1 du domaine (D) vers un point m de (S), avec la normale n à (S) en m.

Soit J_{10} une fonction quelconque satisfaisant à ces conditions. Il est évident que toute fonction

$$J_1 = J_{10} + C(m_1),$$

$C(m_1)$ désignant une fonction arbitraire du point m_1, satisfera aux mêmes conditions.

Choisissons $C(m_1)$ de façon que l'on ait

$$(9) \qquad \int J_1(m, m_1)\, d\tau = \int [J_{10} + C(m_1)]\, d\tau = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\, d\tau.$$

Nous obtiendrons une fonction $J_1(m, m_1)$ bien déterminée et satisfaisant aux conditions (7), (8) et (9).

J'ai établi l'existence d'une telle fonction dans mon travail : *Sur les équations différentielles de la Physique mathématique,* publié en 1896 dans le *Recueil mathématique de Moscou* [1] (en russe). J'y ai montré que $J_1(m, m_1)$, ainsi définie, est symétrique en m et m_1 [condition (a) du n° 4 du Chapitre I].

Il est aisé de s'assurer ensuite que $J_1(m, m_1)$ satisfait aux conditions (b) et (c) du n° 4 du Chapitre I.

Il est évident enfin que

$$\int (\Delta J_1)^2\, d\tau' < L^2,$$

car, en vertu de (7),

$$\int (\Delta J_1)^2\, d\tau' = \frac{1}{D}.$$

Quant à la fonction $J(m, m_1)$, elle satisfait à la première des inégalités (19) du n° 11 du Chapitre I, ainsi qu'aux conditions suivantes

$$(10) \qquad \frac{\partial J_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad (S),$$

$$(11) \qquad \int J(m, m_1)\, d\tau = 0.$$

8. Formons maintenant l'équation fonctionnelle

$$(11) \qquad V(m) = \lambda \int p(m_1)\, J(m, m_1)\, V(m_1)\, d\tau' + f(m)$$

et la série correspondante

$$V(m) = v_0(m) + \lambda\, v_1(m_1) + \ldots + \lambda^k\, v_k(m) + \ldots,$$

où

$$v_k = \int p(m_1)\, J(m, m_1)\, v_{k-1}(m_1)\, d\tau'.$$

---

[1] *Voir* aussi W. STEKLOFF, *Sur les problèmes fondamentaux, etc.* (*Annales de l'École normale,* 1902, p. 258).

On a donc, eu égard à (10),

$$\int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

[*voir* la formule (19_2) du Chapitre I].

On voit, par ce qui précède, que la théorie générale du Chapitre I s'applique au cas considéré, où la fonction génératrice $G(m, m_1)$ se réduit à $J(m, m_1)$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

La solution de l'équation (11) *représente une fonction méromorphe en* λ *n'ayant que des pôles simples et réels*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots,$$

dont les résidus correspondants sont les fonctions fondamentales vérifiant les équations

$$V_k(m) = \lambda_k \int p(m)\, J(m, m_1)\, V_k(m_1)\, d\tau' \tag{12}$$

ou

$$\Delta V_k + \lambda_k p V_k - \int p V_k \, d\tau = 0 \quad \textit{à l'intérieur de } (D), \tag{13}$$

$$\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = 0 \quad \textit{sur } (S), \tag{14}$$

$$\int V_k \, d\tau = 0. \tag{15}$$

L'existence des fonctions fondamentales, correspondant à la fonction génératrice $J(m, m_1)$, est donc démontrée.

Il importe de remarquer que *ces fonctions n'admettent que des nombres caractéristiques positifs.*

Soit φ une fonction quelconque, continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

La fonction

$$u = \int p(m_1)\, J(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau'$$

satisfait aux conditions

$$\Delta u = -p\varphi + \frac{1}{D} \int p \varphi \, d\tau \quad \text{dans (D)},$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

On a donc, eu égard à (11),

$$\int p(m)\varphi(m)\left(\int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau'\right)d\tau = -\int u\,\Delta u\,d\tau > 0.$$

Donc, *tous les nombres* λ_k *sont positifs* (n° **25** du Chapitre I).

9. Montrons que la fonction $J(m, m_1)$ et, par suite, les fonctions fondamentales correspondantes appartiennent au groupe (A).

La fonction $J(m, m_1)$ se représente sous la forme

$$J(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où

$$\mu = 1, \qquad H(m, m_1) = J_1(m, m_1);$$

d'où, eu égard à (7),

$$\Delta H(m, m_1) = \Delta J_1(m, m_1) = \frac{1}{D}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial J_i}{\partial n} = 0.$$

Il est évident que $J(m, m_1)$ ne représente qu'un cas particulier des fonctions $G(m, m_1)$, définies au n° **23** du Chapitre précédent.

L'équation (39) du Chapitre précédent se réduit à

$$\psi(m) = \frac{1}{D}\int \psi(m)\,d\tau - \Delta f(m) = -\Delta f(m) + C_1,$$

C_1 désignant une constante.

Le théorème du n° **23** s'applique donc à la fonction $J(m, m_1)$.

Soit $f(m)$ une fonction continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D), vérifiant l'inégalité (52_1) et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0.$$

Le théorème du n° **23** conduit à l'équation

$$(16) \qquad C + f(m) = -\int J(m, m_1)\,\Delta f(m_1)\,d\tau' + C_1\int J(m, m_1)\,d\tau$$
$$= -\int J(m, m_1)\,\Delta f(m_1)\,d\tau',$$

car

$$\int J(m, m_1)\, d\tau' = \int J(m, m_1)\, d\tau = 0.$$

L'équation (16) donne

$$CD + \int f(m)\, d\tau = 0.$$

Posant

$$f_1(m) = f(m) - \frac{1}{D}\int f(m)\, d\tau,$$

on aura

$$u = f_1(m) + \int J(m, m_1)\, \Delta f_1(m_1)\, d\tau' = 0. \tag{17}$$

Donc, $J(m, m_1)$ *appartient au groupe* (A).

Le nombre k dans les conditions intérieures (a) (*voir* n° 9, Chapitre II) se réduit à $k = 2$, les conditions aux limites (b) se réduisent à

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0.$$

10. Appliquant au cas considéré la théorie générale du Chapitre précédent, on obtient le théorème suivant :

Soit f une fonction bornée et intégrable dans (D). *Posons*

$$f_1 = f + C,$$

et choisissons la constante C *de façon que l'on ait*

$$\int (f + C)\, d\tau = 0. \tag{18}$$

Soit φ une autre fonction qui peut devenir infinie en certains points isolés d'un domaine quelconque (D_i), *intérieur au domaine donné* (D), *mais telle que les intégrales*

$$\int_{D_i} p\varphi f_1\, d\tau, \quad \int_{D_i} p\varphi^2\, d\tau, \quad \int_{D_i} p\varphi V_k\, d\tau,$$

$V_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ *étant les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice* $J(m, m_1)$, *aient un sens bien déterminé.*

Ces conditions étant remplies, on aura

$$\int_{D_i} p\varphi f_1\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k, \tag{19}$$

$$A_k = \int p f_1 V_k\, d\tau, \qquad B_k = \int_{D_i} p\varphi V_k\, d\tau.$$

11. Considérons le cas le plus simple

$$p(m) = 1.$$

On aura, eu égard à (12), (13), (14) et (15),

$$(12_1) \qquad V_k(m) = \lambda_k \int J(m, m_1) V_k(m_1)\, d\tau',$$

$$(13_1) \qquad \Delta V_k + \lambda_k V_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de (D)},$$

$$(14_1) \qquad \frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)},$$

$$(15_1) \qquad \int V_k\, d\tau = 0.$$

Démontrons que l'équation (17) a lieu toujours, pourvu que la fonction f reste continue avec ses dérivées du premier ordre et admette les dérivées du second ordre, bornées et intégrables dans (D).

Posons, dans (19),

$$p = 1, \qquad \varphi = f_1 = u, \qquad (D_i) = (D).$$

On trouve

$$\int u^2\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \qquad B_k = \int u V_k\, d\tau.$$

Or, en vertu de (12_1),

$$\int u V_k\, d\tau = \int f_1(m) V_k(m)\, d\tau + \int V_k(m) \left(\int J(m, m_1) \Delta f(m_1)\, d\tau' \right) d\tau$$
$$= A_k + \frac{1}{\lambda_k} \int \Delta f(m) V_k(m)\, d\tau,$$

où l'on peut poser, eu égard à (15_1),

$$A_k = \int f V_k\, d\tau.$$

D'autre part, en vertu de (13_1) et (14_1),

$$\int \Delta f(m) V_k(m)\, d\tau = -\lambda_k \int f V_k\, d\tau.$$

Par conséquent,

$$u = 0 \quad \text{dans (D)}.$$

L'équation (17) *a donc lieu toutes les fois que la fonction f*, **continue avec ses dérivées du premier ordre et admettant les dérivées du second ordre,**

bornées et intégrables dans (D), *satisfait à la condition*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0.$$

12. De cette proposition nous déduirons immédiatement, à l'aide du théorème général du n° **17** du Chapitre précédent, le théorème suivant :

Toute fonction f, continue dans (D), *avec ses dérivées du premier ordre, admettant les dérivées du second ordre, bornées et intégrables dans* (D), *et satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0,$$

se développe dans (D) *en série uniformément convergente, de la forme*

$$f = \frac{1}{D}\int f\,d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \qquad A_k = \int f V_k\,d\tau,$$

V_k étant les fonctions fondamentales, définies par les équations (13_1) et (14_1).

Les théorèmes que nous venons de démontrer permettent de résoudre le problème suivant :

Trouver une fonction U *du temps t et de coordonnées x, y, z satisfaisant à l'équation*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = K\,\Delta U, \qquad K > 0,$$

jointe aux conditions

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = 0 \quad sur\ (S),$$

$$U = f(x, y, z), \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \varphi(x, y, z) \quad pour\ t = 0,$$

f et φ étant des fonctions données satisfaisant aux conditions énoncées au début de ce numéro.

Le lecteur trouvera les indications nécessaires sur ce sujet au n° **2** de l'Introduction de ce Mémoire.

13. Considérons encore la fonction $H(m, m_1)$, dont nous avons déjà parlé au n° 3 de l'Introduction.

C'est une fonction se représentant sous la forme suivante

$$H(m, m_1) = H_1(m, m_1) + \frac{1}{4\pi r},$$

où $H_1(m, m_1)$ est une fonction satisfaisant aux conditions

$$\Delta H_1 = \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans (D)},$$

$$\frac{\partial H_{1i}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{h}{4\pi r} - h H_1 \quad \text{sur (S)},$$

h étant une constante positive, différente de zéro. L'existence de cette fonction est établie dans mon Mémoire : *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (*Annales de l'École normale,* juillet 1902, p. 248 et suiv.).

Il est aisé de démontrer, par la méthode connue de Riemann, que $H(m, m_1)$ et, par suite, $H_1(m, m_1)$ sont symétriques en $m(x, y, z)$ et $m(\xi, \eta, \zeta)$.

Moyennant l'expression analytique de la fonction $H_1(m, m_1)$ que fournit la méthode de Neumann, appliquée à la détermination de $H_1(m, m_1)$, on peut s'assurer que $H_1(m, m_1)$ satisfait aux conditions (b) et (c) du n° 4 du Chapitre I.

Il est évident ensuite que [inégalité (19) du Chapitre I]

$$\int [\Delta H_1(m, m_1)]^2 d\tau' < L^2,$$

car

$$\Delta H_1(m, m_1) = 0 \quad \text{dans (D)}.$$

Quant à la fonction $H(m, m_1)$, elle satisfait aux conditions

$$\Delta H(m, m_1) = 0 \quad \text{dans (D)}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial n} + h H_i = 0 \quad \text{sur (S)} \tag{21}$$

et

$$\int H^2(m, m_1)\, d\tau < A_i^2$$

pour tous les points de tout domaine (D_i), intérieur à (D), A_i étant un nombre fixe ne dépendant que de (D_i) [*comparez* l'inégalité (22) du Chapitre I].

14. Prenons cette fonction $H(m, m_1)$ pour fonction génératrice et envisageons l'équation (n° 5, Chapitre I)

$$V(m) = \lambda \int p(m_1) H(m, m_1) V(m_1)\, d\tau' + f(m). \tag{22}$$

On a, comme au n° 5 du Chapitre I,

$$V(m) = v_0(m) + \lambda v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \ldots + \lambda^k v_k(m) + \ldots,$$

où

$$v_k(m) = \int p(m_1) H(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau'.$$

On trouve, eu égard à (21),

$$\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} + h v_k = 0 \quad \text{sur (S)}$$

et, par suite,

$$\int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds = -h \int v_{ki}^2 ds < 0.$$

La condition (19_2) du n° 12 du Chapitre I est donc satisfaite.

15. On voit, par ce qui précède, que la théorie générale, exposée dans le Chapitre I, s'applique à l'équation (22) et conduit immédiatement au résultat suivant :

La fonction $V(m)$ *vérifiant l'équation* (22) *est une fonction méromorphe en* λ, *n'ayant que des pôles simples et réels*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots,$$

dont les résidus correspondants sont les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $H(m, m_1)$ *qui vérifie les équations* (20) *et* (21).

Ces fonctions fondamentales V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *satisfont aux équations*

$$V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1) H(m, m_1) V_k(m_1) d\tau'$$

ou

$$\Delta V_k + \lambda_k p V_k = 0 \quad \textit{dans (D)}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} + h V_{ki} = 0 \quad \textit{sur (S)}. \tag{24}$$

Il est aisé de s'assurer que *tous les nombres caractéristiques* λ_k *des fonctions fondamentales correspondant à la fonction* $H(m, m_1)$ *sont positifs.*

Posons, en effet,

$$u = \int p(m_1) H(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

$\varphi(m)$ étant une fonction quelconque, continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

La fonction u satisfait aux conditions

$$\Delta u = -p\varphi \quad \text{dans (D)},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + hu_i = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

On a donc

$$\int p(m)\,\varphi(m)\left(\int p(m_1)\,\mathrm{H}(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau'\right)d\tau$$
$$= -\int u\,\Delta u\,d\tau = \int \sum \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)^2 d\tau + h\int u^2\,ds > 0,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(m)$.

Donc, *tous les nombres* λ_k *sont positifs* (*voir* n° **25** du Chapitre I).

16. Montrons que $\mathrm{H}(m, m_1)$ appartient au groupe (A).

La fonction $\mathrm{H}(m, m_1)$ se représente sous la forme

$$\mathrm{H}(m, m_1) = \mathrm{H}_1(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $\mu = 1$, $\mathrm{H}_1(m, m_1)$ est une fonction vérifiant l'équation

$$\Delta\,\mathrm{H}_1(m, m_1) = 0.$$

D'autre part, $\mathrm{H}(m, m_1)$ satisfait à la condition

$$\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial n} + h\mathrm{H}_i = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

La fonction $\mathrm{H}(m, m_1)$ ne représente qu'un cas particulier des fonctions $\mathrm{G}(m, m_1)$ que nous avons considérées au n° **24** du Chapitre précédent.

L'équation (39) (Chapitre II) se réduit à

$$\psi(m) = -\Delta f(m).$$

Soit $f(m)$ une fonction continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) satisfaisant à l'inégalité (52_1) ainsi qu'à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + hf_i = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Appliquant le théorème du n° **24** du Chapitre précédent au cas considéré, on obtient l'équation

$$f(m) = -\int \mathrm{H}(m, m_1)\,\Delta f(m_1)\,d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

ayant lieu quelle que soit la fonction $f(m)$ satisfaisant aux conditions tout à l'heure indiquées.

Donc, $H(m, m_1)$ *appartient au groupe* (A).

17. Appliquant au cas considéré la théorie générale (Chapitre II), on obtient ce théorème :

Soit f une fonction bornée et intégrable dans (D), *soit φ une autre fonction pouvant devenir infinie en certains points isolés d'un domaine quelconque* (D_i), *intérieur au domaine donné* (D), *mais telle que les intégrales*

$$\int_{D_i} p\varphi^2\,d\tau,\quad \int_{D_i} pf\varphi\,d\tau,\quad \int_{D_i} p\varphi V_k\,d\tau$$

aient un sens bien déterminé.

Ces conditions étant remplies, on a

$$\int_{D_i} p\varphi f\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k, \tag{25}$$

$$A_k = \int pfV_k\,d\tau, \qquad B_k = \int_{D_i} p\varphi V_k\,d\tau,$$

où V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *sont les fonctions fondamentales satisfaisant aux équations* (23) *et* (24).

18. Posant dans (25)

$$\varphi = f = u, \qquad (D_i) = (D),$$

$$u = f(m) + \int H(m, m_1)\,\Delta f(m_1)\,d\tau',$$

et répétant presque textuellement les raisonnements du n° 5 (ou du n° 11), on s'assure que *l'équation*

$$f(m) + \int H(m, m_1)\,\Delta f(m_1)\,d\tau' = 0$$

a lieu toutes les fois que la fonction f, continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D), *admet les dérivées du second ordre, bornées et intégrables dans* (D), *et satisfait à la condition*

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + hf_i = 0 \quad \textit{sur } (S). \tag{26}$$

19. Cette proposition étant établie, on en conclut immédiatement, moyennant le théorème général du n° **17** du Chapitre précédent, que *toute fonction f continue avec ses dérivées du premier ordre dans* (D), *admettant les dérivées du second ordre, bornées et intégrables dans* (D), *et satisfaisant à la condition* (26), *se développe dans* (D) *en série uniformément convergente*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \qquad A_k = \int p f V_k \, d\tau,$$

où V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *sont les fonctions fondamentales, définies par les équations* (23) *et* (24).

20. Les théorèmes établis aux n^{os} **16** et **19** permettent de résoudre ce problème général de la théorie de la chaleur :

Trouver une fonction U *de variables* t (*temps*) *et* x, y, z (*coordonnées*) *satisfaisant à l'équation*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K \, \Delta U,$$

où K *est une fonction positive et ne s'annulant pas dans le domaine donné* (D), *jointe aux conditions*

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} + h U_i = 0 \quad sur \ (S),$$

h étant une constante positive, différente de zéro,

$$U = f(x, y, z) \quad pour \ t = 0,$$

f étant une fonction satisfaisant aux conditions du théorème du numéro précédent. (Comparer l'Introduction, n° **2**.)

21. Considérons enfin le cas le plus simple, en posant

$$H(m, m_1) = 0, \qquad \mu = 1$$

dans l'expression générale

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}$$

de la fonction génératrice [*voir* n° 3 du Chapitre I, l'égalité (3)].

La fonction $G(m, m_1)$ se réduit à

$$G(m, m_1) = \frac{1}{4\pi r};$$

l'équation (4) du n° 5 du Chapitre I se réduit à la suivante :

$$V(m) = \frac{\lambda}{4\pi}\int p(m_1)\frac{1}{r}V(m_1)\,d\tau' + f(m). \tag{27}$$

Les fonctions v_k dans la série

$$V(m) = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \ldots + \lambda^k v_k + \ldots$$

se représentent sous la forme du potentiel newtonien et satisfont à la condition (19_3) du n° 12 du Chapitre I.

Il est évident que la théorie générale s'applique immédiatement au cas considéré et conduit au théorème suivant :

La fonction $V(m)$ *vérifiant l'équation* (27) *est une fonction méromorphe en* λ *admettant une infinité de pôles simples et réels*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots,$$

dont les résidus correspondants sont les fonctions fondamentales $V_k(m)$ *satisfaisant aux équations*

$$V_k(m) = \frac{\lambda_k}{4\pi}\int p(m_1)\frac{1}{r}V_k(m_1)\,d\tau' \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ces équations montrent que les fonctions V_k ainsi définies restent continues avec leurs dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admettent les dérivées du second ordre, continues dans (D) et dans (D') [dans l'espace, extérieur à (D)], se comportent à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfont aux équations

$$\Delta V_k + \lambda_k p V_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de (D)}, \tag{28}$$

$$\Delta V_k = 0 \quad \text{à l'extérieur de (D) [dans (D')]}. \tag{29}$$

L'existence des fonctions appelées, par M. A. Korn, *fonctions universelles*, est donc établie.

On voit que ces fonctions ne représentent qu'un cas très particulier des fonctions fondamentales générales dont nous avons démontré l'existence dans le Chapitre I de ce Mémoire.

Il est aisé de s'assurer que la fonction

$$G(m, m_1) = \frac{1}{4\pi r}$$

appartient à la classe des fonctions génératrices qui n'admettent que les nombres caractéristiques positifs (n° 25 du Chapitre I).

La fonction

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{p(m_1)\,\varphi(m_1)}{r}\,d\tau'$$

satisfait aux conditions

$$\Delta U + p\varphi = 0 \quad \text{dans } (D),$$
$$\Delta U = 0 \quad \text{dans } (D'),$$

quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D), et reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier.

On a donc

$$\int p(m)\,\varphi(m)\left(\frac{1}{4\pi}\int \frac{p(m_1)\,\varphi(m_1)}{r}\,d\tau'\right)d\tau$$
$$= -\int u\,\Delta u\,d\tau = -\int u\,\Delta u\,dT = \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dT > 0.$$

Donc, *tous les nombres caractéristiques de fonctions universelles sont positifs*.

22. On peut démontrer que la fonction $\frac{1}{4\pi r}$ appartient au groupe (A), de sorte que le théorème général du n° **13** du Chapitre II s'applique aux fonctions V_k satisfaisant aux conditions (28) et (29).

Or, nous pouvons démontrer un théorème analogue directement, par une autre méthode, qui s'applique toutes les fois que la fonction $H(m, m_1)$, dans l'expression générale de la fonction génératrice, satisfait aux conditions suivantes (comparer n° **25** du Chapitre précédent) :

La fonction $H(m, m_1)$, *considérée comme une fonction du point* m, *le point* m_1 *étant situé à l'intérieur du domaine* (D), *reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, elle admet les dérivées du second ordre, continues dans* (D) *et* (D'), *se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation*

$$\Delta H(m, m_1) = 0 \quad \textit{dans } (D').$$

Nous allons reproduire cette démonstration dont j'ai déjà exposé les principes dans ma Note, insérée aux *Comptes rendus* du 4 juillet 1904.

23. Soit $f(m)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (D).

Posons

$$(30)\qquad f = A_1V_1 + A_2V_2 + \ldots + A_nV_n + R_n,$$

$$A_k = \int p f V_k \, d\tau \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

où V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

$H(m, m_1)$ étant une fonction jouissant des propriétés que nous venons d'énoncer (numéro précédent).

Les fonctions V_k satisfont aux équations

$$(31)\qquad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, V_k(m_1)\, d\tau',$$

restent continues avec leurs dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admettent les dérivées du second ordre, continues dans (D), se comportent à l'infini comme un potentiel newtonien et vérifient l'équation

$$(32)\qquad \Delta V_k(m) = 0 \quad \text{à l'extérieur de (D)}.$$

Reprenons maintenant l'inégalité (7) du n° 5 du Chapitre précédent

$$(33)\qquad \frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} > l_{n+1},$$

où

$$J_0 = \int p(m)\, v_0^2(m)\, d\tau = \int p R_n^2 \, d\tau,$$

$$J_1 = \int p(m)\, v_1^2(m)\, d\tau,$$

$$(34)\qquad v_1(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, v_0(m_1)\, d\tau' = \int p G R_n \, d\tau'.$$

Cette expression de $v_1(m)$ montre que la fonction v_1 reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et vérifie l'équation

$$(35)\qquad \Delta v_1(m) = 0 \quad \text{à l'extérieur de (D) [dans D']}.$$

On a donc

$$(36)\qquad \frac{\partial v_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial v_{1e}}{\partial n}, \qquad v_{1i} = v_{1e} \quad \text{sur (S)}.$$

24. Supposons maintenant que f reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier et se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien.

Il en sera de même de la fonction R_n, comme le montre l'équation (30).

Ces conditions étant remplies, on trouve, d'après le théorème de Green [*voir* les égalités (35) et (36)],

$$\int \sum \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial R_n}{\partial x} dT = -\int R_n \, \Delta v_1 \, d\tau,$$

où, en vertu de (34),

$$(37) \qquad \Delta v_1 = -\mu p R_n + \int p(m_1) \, \Delta H(m, m_1) \, R_n(m_1) \, d\tau'.$$

On a donc

$$\mu \int p R_n^2 \, d\tau = \mu J_0 = \int \sum \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial R_n}{\partial x} dT + \int R_n \left(\int p \, \Delta H \, R_n \, d\tau' \right) d\tau.$$

L'inégalité de Schwarz donne

$$(38) \qquad P^2 = \left(\int \sum \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial R_n}{\partial x} dT \right)^2 \leqq \int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dT \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT,$$

$$(39) \qquad Q^2 = \left[\int R_n \left(\int p \, \Delta H \, R_n \, d\tau' \right) d\tau \right]^2 \leqq \int R_n^2 \, d\tau \int \left(\int p \, \Delta H \, R_n \, d\tau' \right)^2 d\tau.$$

Or, en vertu de (37),

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dT = -\int v_1 \, \Delta v_1 \, d\tau = \mu \int p v_1 R_n \, d\tau - \int v_1 \left(\int p \, \Delta H \, R_n \, d\tau' \right) d\tau,$$

d'où, en répétant les raisonnements du n° 12 du Chapitre I,

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dT < \left(\sqrt{\mu} + L \sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}} \right) \sqrt{J_0} \sqrt{J_1}.$$

D'autre part,

$$Q^2 = \left[\int R_n \left(\int p \, \Delta H \, R_n \, d\tau' \right) d\tau \right]^2 < L^2 \frac{\beta D}{\alpha} J_0^2.$$

Par conséquent,

$$P^2 + Q^2 < L^2 \frac{\beta D}{\alpha} J_0^2 + \left(\sqrt{\mu} + L \sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}} \right) \sqrt{J_0} \sqrt{J_1} \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT.$$

Or,

$$\mu^2 J_0^2 < 2(P^2 + Q^2).$$

On a donc

$$\left(\mu^2 - 2L^2\frac{\beta D}{\alpha}\right)J_0^2 < 2\left(\sqrt{\mu} + L\sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}}\right)\sqrt{J_0}\sqrt{J_1}\int\sum\left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT.$$

Faisons maintenant une seule supposition que la constante μ satisfasse à l'inégalité

$$(40)\qquad \mu^2 > 2L^2\frac{\beta D}{\alpha},$$

et posons

$$\frac{2\left(\sqrt{\mu} + L\sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}}\right)}{\mu^2 - 2L^2\frac{\beta D}{\alpha}} = N,$$

N désignant un nombre fixe positif ne dépendant pas de n.

On aura

$$J_0^2 < N\sqrt{J_0}\sqrt{J_1}\int\sum\left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} < N\frac{\int\sum\left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT}{J_0}.$$

Cette inégalité et (33) conduisent à la suivante :

$$(41)\qquad \int p R_n^2\, d\tau = J_0 < \frac{N\int\sum\left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT}{l_{n+1}}.$$

25. Supposons enfin que la fonction, jouissant des propriétés indiquées plus haut, satisfait encore à la condition

$$(42)\qquad f(m) = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

$\varphi(m)$ étant une certaine fonction du point m, bornée et intégrable dans (D).

Dans ce cas, on trouve, eu égard à (31),

$$R_n = \int p(m_1)\, G(m, m_1)\, U_n(m_1)\, d\tau',$$

où l'on a posé

$$U_n = \varphi(m_1) - \lambda_1 A_1 V_1(m_1) - \lambda_2 A_2 V_2(m_1) - \ldots - \lambda_n A_n V_n(m_1).$$

On trouve donc, comme au n° **22** du Chapitre I (*voir* aussi n° **12**, Chap. I),

$$\int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT < N \int p(m)\, U_n^2(m)\, d\tau. \tag{43}$$

Or, il est aisé de s'assurer que l'intégrale

$$\int p(m)\, U_n^2(m)\, d\tau$$

décroît, lorsque n croît indéfiniment, de sorte qu'elle ne surpasse pas un certain nombre fixe A, ne dépendant pas de n.

En effet, l'égalité (42) donne, en vertu de (31),

$$\lambda_k A_k = B_k = \int p \varphi V_k\, d\tau.$$

On a donc

$$\int p U_n^2\, d\tau = \int p \varphi^2\, d\tau - \sum_{k=1}^{n} B_k^2 < \int p \varphi^2\, d\tau,$$

car

$$\int p V_k^2\, d\tau = 1, \quad \int p V_n V_m\, d\tau = 0 \qquad \text{pour} \quad n \gtrless m.$$

L'inégalité (43) montre que

$$\int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT < Q = N \int p \varphi^2\, d\tau, \tag{44}$$

Q étant un nombre fixe ne dépendant pas de n.

26. Cela posé, revenons à l'inégalité (41) ayant lieu quel que soit le nombre n. Cette inégalité donne, en vertu de (44),

$$\int p R_n^2\, d\tau < \frac{NQ}{l_{n+1}}.$$

Supposant que n croisse indéfiniment et en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{n=\infty} \int p R_n^2\, d\tau = 0,$$

car l_n croît indéfiniment avec l'indice n.

Le théorème suivant est donc établi :

Théorème. — *Quelle que soit la fonction $f(m)$ continue avec ses dérivées du*

premier ordre dans l'espace tout entier, se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien et se représentant sous la forme de l'intégrale

$$f(m) = \int p(m_1)\,G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau' \quad \textit{dans}\ (D),$$

on a toujours

$$\int pf^2\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int pf\,V_k\,d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales qui correspondent à la fonction génératrice

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}, \tag{45}$$

où $H(m, m_1)$ *satisfait aux conditions, énoncées au n°* **2** (¹), *et la constante* μ *satisfait à l'inégalité* (40).

Remarquons que ce théorème peut être exprimé d'une manière un peu plus générale.

En effet, il est évident qu'*il sera vrai toutes les fois que l'inégalité* (44) *aura lieu.*

27. Supposons maintenant que $f(m)$ admette les dérivées du second ordre dans (D) et (D') et vérifie l'équation

$$\Delta f(m) = 0 \quad \text{dans } (D').$$

Supposons encore que $f(m)$ et $H(m, m_1)$ satisfont aux conditions

$$|\Delta f(m') - \Delta f(m'')| < a\rho^{\beta}, \tag{46}$$

$$|\Delta H(m', m_1) - \Delta H(m'', m_1)| < a\rho^{\beta}, \tag{46$_1$}$$

quelle que soit la position des points m' et m'' dans (D).

Ces conditions étant remplies, on aura, eu égard au théorème du n° **25** du Chapitre précédent,

$$f(m) = \int \psi(m_1)\,G(m, m_1)\,d\tau' \quad \text{dans } (D),$$

(¹) *Voir* W. Stekloff, *Sur une égalité générale commune, etc.* (*Comptes rendus*, 4 juillet 1904).

où $\psi(m)$ est une fonction, bien déterminée dans (D), se représentant sous la forme de la série (41) du Chapitre précédent.

Rappelons que l'égalité précédente a lieu toujours, pourvu que la fonction $H(m, m_1)$ dans l'expression

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}$$

jouisse des propriétés du potentiel newtonien et satisfasse à l'inégalité (46_1), et la constante μ satisfasse à l'inégalité

$$\mu^2 > DL^2.$$

28. Supposons maintenant que μ satisfasse à l'inégalité (40) qui entraîne l'inégalité (50), car

$$2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} > 1.$$

Dans ce cas, le théorème du n° **26** s'applique à toute fonction f, ayant les propriétés indiquées au numéro précédent, et conduit immédiatement à ce théorème :

Quelle que soit la fonction f, jouissant des propriétés du potentiel newtonien et satisfaisant à la condition (46), *on a toujours*

$$\int pf^2\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int pf\, V_k\, d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $H(m, m_1)$, *considérée comme une fonction du point m, a les mêmes propriétés que f, et la constante μ vérifie l'inégalité* (40).

29. Il est aisé de généraliser le résultat obtenu.

Soit $f(m)$ une fonction quelconque assujettie à une seule condition qu'elle reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D).

Posons

$$\psi(m) = \int \frac{\varphi(m_1)}{r}\, d\tau',$$

$\varphi(m)$ étant une fonction quelconque, et formons une fonction $f_1(m)$, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de (D) et satisfaisant

sur (S) aux conditions suivantes

$$f_{1i} = \psi_i,$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_i,$$

et ainsi de suite pour y et z.

Il existe une infinité de telles fonctions.

Soit (S_i) une surface parallèle à la surface donnée (S), soit δ la distance de deux points correspondants de (S_i) et (S) (*voir* n° 10).

Choisissons $f_1(m)$ de façon que l'on ait

$$f_1 = f + \eta \quad \text{dans } (D_i),$$

où

$$|\eta| < \varepsilon,$$

pour tous les points du domaine (D_i), limité par (S_i).

Ces conditions étant remplies, on aura, en choisissant convenablement le nombre δ,

$$\int (f - f_1)^2 \, d\tau < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

Prenons maintenant la fonction $P(m)$ satisfaisant aux conditions

$$P = \psi \quad \text{à l'extérieur de } (D),$$

$$P = f_1 \quad \text{à l'intérieur de } (D).$$

Il est évident que la fonction P, ainsi définie, reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien, admet les dérivées du second ordre dans (D) et satisfait à l'équation de Laplace à l'extérieur de (D) [dans le domaine (D')] [1].

Donc le théorème précédent s'applique à la fonction $P(m)$.

D'autre part, $P(m)$ satisfait à l'inégalité

$$\int (f - P)^2 \, d\tau < \varepsilon.$$

Répétant presque textuellement les raisonnements du n° 10 du Chapitre II, on

---

[1] Remarquons que la condition restrictive (46) n'a aucune influence sur l'exactitude des raisonnements que nous employons ici.

s'assure que l'égalité

$$\int pf^2\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int pf\,V_k\,d\tau$$

a lieu pour toute fonction f qui reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D).

Cette proposition étant établie, on démontre ensuite, comme aux nᵒˢ 11 et 12 du Chapitre II, le théorème suivant :

Théorème. — *Quelle que soit la fonction f, bornée et intégrable dans le domaine donné* (D), *on a toujours*

$$\int pf^2\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int pf\,V_k\,d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $H(m, m_1)$, *considérée comme une fonction du point m* [1], *est une fonction ayant les propriétés du potentiel newtonien, μ est une constante satisfaisant à l'inégalité*

$$\mu^2 > 2L^2\frac{D\beta}{\alpha},$$

D *désignant le volume de* (D), β *et* α *le maximum et le minimum de la fonction positive* $p(m)$ *dans* (D), L^2 *la constante qui figure dans l'inégalité*

$$\int [\Delta H(m, m_1)]^2\,d\tau' < L^2.$$

30. De ce théorème résulte presque immédiatement un théorème plus général, analogue à celui du nº 13 du Chapitre II, qui conduit de son côté (*voir* nº 27) au théorème suivant :

Théorème. — *Toute fonction $f(m)$, jouissant des propriétés du potentiel newtonien jointes à la condition* (46), *se développe dans* (D) *en série uniformément convergente procédant suivant les fonctions fondamentales satisfaisant aux conditions du théorème du numéro précédent.*

---

[1] Rappelons que le point m_1 reste toujours à l'intérieur de (D).

31. Revenons au cas où la fonction génératrice se réduit à

$$\frac{1}{4\pi r}.$$

Il est évident que cette fonction satisfait à toutes les conditions des n^{os} **26** et **27**.

On obtient donc immédiatement les propositions suivantes :

A. *Quelle que soit la fonction f, bornée et intégrable dans* (D), *on a le développement*

$$\int pf^2\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int pf\,V_k\,d\tau,$$

où V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *sont les fonctions universelles de M. A. Korn.*

B. *Toute fonction se représentant sous la forme du potentiel newtonien se développe dans* (D) *en série uniformément convergente procédant suivant les fonctions universelles de M. A. Korn* ([1]).

32. Les théorèmes énoncés résultent comme des cas particuliers des théorèmes plus généraux, établis plus haut.

Si nous appliquons les raisonnements des n^{os} **23**, **24** et **25** de ce Chapitre immédiatement aux fonctions de M. Korn, la démonstration se simplifiera essentiellement, comme nous le verrons tout de suite.

Les fonctions V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ de M. Korn satisfont aux conditions

$$\Delta V_k + \lambda_k p V_k = 0 \quad \text{dans (D)}; \tag{47}$$

$$\Delta V_k = 0 \quad \text{dans (D')}; \tag{48}$$

$$\int p V_n V_m\,d\tau = 0, \qquad n \gtrless m. \tag{49}$$

On peut poser encore

$$\int p V_k^2\,d\tau = 1. \tag{50}$$

Posons, comme au n° **23**,

$$f = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots + A_n V_n + R_n, \tag{51}$$

f désignant une fonction, continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier et se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien.

([1]) *Voir* A. Korn, *Le problème mathématique des vibrations universelles.* (Communications de la Société mathématique de Kharkow, 1903.)

Reprenons l'inégalité

$$(52)\qquad \frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} > l_{n+1} = \lambda_{n+1} \quad (^1),$$

en conservant les notations du n° 23.

On trouve

$$\int \sum \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial R_n}{\partial x}\, dT = -\int R_n\, \Delta v_1\, d\tau = \int p R_n^2\, d\tau = J_0,$$

car dans le cas considéré

$$v_1(m) = \int \frac{p R_n}{r}\, d\tau'.$$

Par conséquent,

$$J_0^2 \leqq \int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 dT \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT.$$

D'autre part,

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 dT = -\int v_1\, \Delta v_1\, d\tau = \int p v_1 R_n\, d\tau \leqq \sqrt{J_0}\sqrt{J_1}.$$

On a donc

$$\frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} \leqq \frac{\int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT}{J_0},$$

d'où, en vertu de (52),

$$(53)\qquad J_0 < \frac{\int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT}{\lambda_{n+1}}.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$K_n = \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 dT.$$

On trouve, eu égard à (51),

$$K_n = \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dT - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int \sum \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V_k}{\partial x}\, dT$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \int \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x}\right)^2 dT + 2\sum A_n A_m \int \sum \frac{\partial V_n}{\partial x}\frac{\partial V_m}{\partial x}\, dT.$$

---

(1) Rappelons que dans le cas considéré $\lambda_k = l_k\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Or, en vertu de (47), (48), (49) et (50),

$$\int \sum \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}_k}{\partial x}d\mathrm{T} = -\int f\Delta \mathrm{V}_k\, d\tau = \lambda_k \mathrm{A}_k,$$

$$\int \sum \left(\frac{\partial \mathrm{V}_k}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T} = -\int \mathrm{V}_k \Delta \mathrm{V}_k\, d\tau = \lambda_k,$$

$$\int \sum \frac{\partial \mathrm{V}_n}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}_m}{\partial x}d\mathrm{T} = -\int \mathrm{V}_n \Delta \mathrm{V}_m\, d\tau = 0 \quad \text{pour} \quad n \gtrless m.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{K}_n = \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{A}_k^2,$$

d'où

$$\mathrm{K}_n < \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\mathrm{T} = \mathrm{Q}.$$

On trouve donc, eu égard à (53),

$$\mathrm{J}_0 < \frac{\mathrm{Q}}{\lambda_{n+1}},$$

d'où l'on conclut que

$$\lim_{n=\infty} \int p \mathrm{R}_n^2\, d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int p f^2\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k^2, \qquad \mathrm{A}_k = \int p f \mathrm{V}_k\, d\tau,$$

quelle que soit la fonction f continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier et se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien.

La généralisation de cette proposition ne présente aucune difficulté et conduit au théorème du n° 31.

Le théorème B n'est qu'une simple conséquence de la proposition tout à l'heure démontrée.

33. J'ai déjà indiqué l'application du théorème A à la démonstration du théorème de Poisson, classique dans la théorie d'attraction, ainsi qu'à la solution du problème inverse d'attraction, dans mon Mémoire : *Sur certaines égalités communes à plusieurs, etc.* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* mars 1904, p. 25 et suiv.).

Je me permets de ne pas reproduire l'analyse en renvoyant au Mémoire cité.

Ici, je me bornerai à la remarque suivante :

Soit $f(m)$ une fonction continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien, admettant les dérivées de trois premiers ordres, continues dans le domaine (D), et vérifiant l'équation

$$\Delta f(m) = 0 \quad \text{dans (D')}.$$

Ces conditions étant remplies, on a identiquement

$$f + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta f(m_1)}{r}\, d\tau' = 0$$

pour tous les points de l'espace.

Le théorème A permet de généraliser cette proposition, bien connue.

Démontrons que la condition de la continuité des dérivées de trois premiers ordres de la fonction $f(m)$ n'a rien d'essentiel et que l'*identité précédente a lieu toujours, pourvu que $f(m)$ admette les dérivées des deux premiers ordres, bornées et intégrables dans* (D), et satisfasse à toutes les autres conditions indiquées plus haut.

Appliquons le théorème A à la fonction

$$u = f(m) + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta f(m_1)}{r}\, d\tau',$$

qui reste continue dans (D).

On trouve, en posant $p(m) = 1$,

$$\int u^2\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2,$$

où

$$B_k = \int \left(f(m) + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta f(m_1)}{r}\, d\tau' \right) V_k\, d\tau$$

$$= A_k + \frac{1}{4\pi}\int V_k \left(\int \frac{\Delta f(m_1)}{r}\, d\tau' \right) d\tau.$$

Or,

$$\int V_k \left(\int \frac{\Delta f(m_1)}{r}\, d\tau' \right) d\tau = \int \Delta f(m_1) \left(\int \frac{V_k(m)}{r}\, d\tau \right) d\tau'$$

$$= \frac{1}{\lambda_k}\int V_k(m_1)\, \Delta f(m_1)\, d\tau'$$

$$= \frac{1}{\lambda_k}\int V_k(m)\ \Delta f(m)\, dT;$$

car, d'après l'hypothèse faite sur $f(m)$,

$$\Delta f(m) = 0 \quad \text{dans } (D').$$

Or, le théorème de Green donne

$$\int V_k(m)\Delta f(m)\, dT = \int f(m)\Delta V_k(m)\, dT$$
$$= \int f(m)\Delta V_k(m)\, d\tau = -\lambda_k \int f(m) V_k(m)\, d\tau = -\lambda_k A_k,$$

car V_k satisfait aux équations

$$\Delta V_k + \lambda_k V_k = 0 \quad \text{dans } (D),$$
$$\Delta V_k = 0 \quad \text{dans } (D').$$

On a donc, quel que soit l'indice k,

$$B_k = 0$$

et, par suite,

$$\int u^2\, d\tau = 0,$$

d'où l'on conclut, en se rappelant que u reste continue dans (D),

$$u = f(m) + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta f(m_1)}{r}\, d\tau' = 0.$$

Cette identité conduit au théorème suivant :

Théorème. — *S'il existe une fonction $f(m)$ telle que la densité $\varphi(m)$ du potentiel newtonien*

$$\int \frac{\varphi(m_1)}{r}\, d\tau'$$

se représente sous la forme

$$\varphi(m) = \frac{\partial^2 f(m)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(m)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(m)}{\partial z^2}, \tag{54}$$

on a toujours

$$\Delta \int \frac{\varphi(m_1)}{r}\, d\tau' = -4\pi\, \varphi(m)$$

sous la seule supposition que la fonction $\varphi(m)$, assujettie à la condition (54), *reste bornée et intégrable dans* (D).

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS FONDAMENTALES A LA SOLUTION DE CERTAINS PROBLÈMES DES MINIMA.

34. Soit $G(m, m_1)$ une fonction appartenant à la classe de fonctions génératrices, auxquelles correspondent les fonctions fondamentales n'ayant que des nombres caractéristiques positifs (*voir* n° **25** du Chapitre I).

Soit $\varphi(m)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (D).

Supposons que l'intégrale

$$\int G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau'$$

soit différente de zéro et posons

$$f(m) = \int G(m, m_1)\,\varphi(m_1)\,d\tau'.$$

On obtient une fonction $f(m)$ continue dans (D) et différente de zéro.

Désignons par V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) les fonctions fondamentales définies par les relations

$$V_k(m) = \lambda_k \int G(m, m_1)\,V_k(m_1)\,d\tau',$$

en supposant, pour plus de simplicité, que la fonction caractéristique $p(m) = 1$.

Appliquons le théorème du n° **13** du Chapitre précédent à l'intégrale

$$\int \varphi f\,d\tau. \tag{55}$$

On trouve

$$\int \varphi f\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2, \tag{56}$$

car

$$B_k = \int \varphi V_k\,d\tau = \lambda_k \int f V_k\,d\tau = \lambda_k A_k.$$

Il s'ensuit que *l'intégrale* (55) *reste toujours positive et différente de zéro, quelle que soit la fonction* $\varphi(m)$.

Si l'on pose, en effet,

$$\int \varphi f\,d\tau = 0, \tag{57}$$

on aura, eu égard à (56),

$$A_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

car tous les λ_k sont positifs.

Or, d'après le théorème du n° 8 du Chapitre I, on a toujours

$$\int f^2\, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2. \tag{58}$$

On en conclut que la condition (57) entraîne la suivante

$$\int f^2\, d\tau = 0,$$

d'où

$$f = 0, \tag{59}$$

car f reste continue dans (D).

La condition (59) est incompatible avec l'hypothèse faite sur φ.

Donc, *l'intégrale* (55) *est différente de zéro.*

Le rapport

$$\frac{\int f \varphi\, d\tau}{\int f^2\, d\tau}$$

admet donc un minimum.

La théorie des fonctions fondamentales permet de résoudre le problème suivant :

Soit $G(m, m_1)$ *une fonction appartenant à la classe de fonctions génératrices, auxquelles correspondent les fonctions fondamentales n'ayant que des nombres caractéristiques positifs; soit* $\varphi(m)$ *une fonction quelconque, bornée et intégrable dans le domaine donné* (D) *et telle que l'intégrale*

$$f(m) = \int G(m, m_1)\, \varphi(m_1)\, d\tau'$$

soit différente de zéro.

Trouver la limite inférieure précise du rapport

$$K = \frac{\int \varphi f\, d\tau}{\int f^2\, d\tau}.$$

Les égalités (56) et (58) donnent

$$K = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2},$$

d'où l'on tire immédiatement, en supposant que les nombres $\lambda_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ soient rangés dans l'ordre croissant de grandeur,

(60) $$K \geqq \lambda_1,$$

λ_1 désignant le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $G(m, m_1)$ et à la fonction caractéristique $p(m) = 1$.

Il est évident que λ_1 *représente la limite inférieure précise du rapport* K.

Posant, en effet,

$$\varphi(m) = V_1(m),$$

on obtient

$$K = \lambda_1.$$

35. Considérons quelques cas particuliers.

Prenons pour $G(m, m_1)$ la fonction

$$G(m, m_1) = \frac{1}{4\pi r}.$$

Soit $f(m)$ une fonction quelconque jouissant des propriétés du potentiel newtonien.

Le théorème du n° **33** donne

$$f(m) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta f(m_1)}{r} d\tau'.$$

Posons, dans le rapport K,

$$\varphi = -\Delta f(m).$$

On trouve

$$K = \frac{-\int f \Delta f \, d\tau}{\int f^2 \, d\tau} = \frac{-\int f \Delta f \, dT}{\int f^2 \, d\tau},$$

car, d'après l'hypothèse faite sur f,

$$\Delta f = 0 \quad \text{dans } (D').$$

On a donc

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int f^2 \, d\tau} \geqq \lambda_1,$$

où λ_1 est le plus petit des nombres caractéristiques correspondant aux fonctions fondamentales de M. Korn.

Donc : *Le rapport*

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int f^2 \, d\tau},$$

où f est un potentiel newtonien, reste toujours supérieur ou au moins égal au plus petit des nombres caractéristiques correspondant aux fonctions universelles appartenant au domaine donné (D) [sous la supposition que $p(m) = 1$].

36. Désignons maintenant par $G(m, m_1)$ la fonction de Green, par V_k les fonctions fondamentales satisfaisant aux conditions

$$V_k(m) = \lambda_k \int G(m, m_1) V_k(m_1) \, d\tau'.$$

Soit $f(m)$ une fonction quelconque continue, admettant les dérivées des deux premiers ordres dans (D) et s'annulant sur (S).

On peut écrire, eu égard au théorème du n° 5,

$$f = -\int G(m, m_1) \, \Delta f(m_1) \, d\tau'.$$

Posons, dans le rapport K,

$$\varphi = -\Delta f.$$

On trouve

$$K = \frac{-\int f \Delta f \, d\tau}{\int f^2 \, d\tau} = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int f^2 \, d\tau}.$$

L'inégalité générale (60), appliquée au cas considéré, donne

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int f^2 \, d\tau} \geqq \lambda_1,$$

ce qui démontre la proposition suivante :

Le rapport

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int f^2\, d\tau}$$

reste toujours supérieur ou au moins égal à λ_1, λ_1 *étant le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions fondamentales correspondant à la fonction de Green et à la fonction caractéristique* $p(m) = 1$, *quelle que soit la fonction* $f(m)$ *continue, admettant les dérivées des deux premiers ordres dans* (D) *et s'annulant sur* (S).

37. Il est aisé de s'assurer que l'existence des dérivées du second ordre de la fonction $f(m)$ n'a rien d'essentiel : *Le théorème précédent reste vrai toujours, pourvu que la fonction continue* $f(m)$ *s'annule sur* (S) *et admette les dérivées du premier ordre dans* (D).

Pour s'en assurer, posons

$$f = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots + A_n V_n + R_n,$$

d'où l'on tire

$$(61)\quad \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 d\tau = \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int \sum \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial V_k}{\partial x}\, d\tau$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \int \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x}\right)^2 d\tau + 2\sum A_n A_m \int \sum \frac{\partial V_n}{\partial x}\,\frac{\partial V_m}{\partial x}\, d\tau.$$

Cette égalité donne

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2.$$

On a donc

$$K \geqq \lambda_1,$$

quelle que soit la fonction $f(m)$ ayant les propriétés indiquées au début de ce numéro.

38. Entendons enfin par V_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $J(m, m_1)$ du n° 7 et à la fonction caractéristique $p(m) = 1$.

Soit $f(m)$ une fonction quelconque continue et admettant les dérivées du premier ordre dans (D).

Reprenons l'égalité (61) du numéro précédent.

En se rappelant que V_k satisfont aux conditions

$$\Delta V_k + \lambda_k V_k = 0 \quad \text{dans} \quad (D),$$

$$\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad (S),$$

on trouve, comme au numéro précédent,

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2.$$

D'autre part, appliquant à la fonction $f(m)$ le théorème du n° 10, on obtient

$$\int f^2 \, d\tau = \frac{1}{D}\left(\int f \, d\tau\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Par suite,

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 d\tau}{\int f^2 \, d\tau} \geqq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 + \frac{1}{D}\left(\int f \, d\tau\right)^2}.$$

En supposant que

$$\int f \, d\tau = 0,$$

on aura

$$K \geqq \lambda_1,$$

ce qui démontre la proposition suivante :

Le rapport

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int f^2 \, d\tau}$$

reste toujours supérieur ou au moins égal au plus petit des nombres caractéristiques correspondant à la fonction génératrice $J(m, m_1)$ *et à la fonction caractéristique* $p(m) = 1$, *quelle que soit la fonction* $f(m)$ *continue, admettant les dérivées du premier ordre et satisfaisant à la condition*

$$\int f \, d\tau = 0.$$

C'est un lemme analogue au lemme fondamental de M. H. Poincaré que nous

avons pris pour le point de départ de nos recherches ; il importe de remarquer seulement que *le lemme que nous venons d'établir assigne une limite inférieure* précise *du rapport* K ([1]).

39. La méthode, analogue à celle que nous avons employée dans les recherches précédentes, s'applique aussi à la démonstration des fonctions fondamentales $W_k(m)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ d'une autre espèce, définies par les équations

$$W_k(m) = \mu_k \int q(m_1)\, J(m, m_1)\, W_k(m_1)\, ds',$$

où l'intégrale, prise par rapport aux variables $m_1(\xi, \eta, \zeta)$, s'étend à la surface donnée (S) tout entière, $q(m)$ et $J(m, m_1)$ sont les fonctions analogues aux fonctions $p(m)$ et $G(m, m_1)$, μ_k sont des constantes caractéristiques des fonctions fondamentales $W_k(m)$.

Nous allons exposer la théorie générale de ces fonctions dans la seconde Partie de ce Mémoire.

([1]) Comparer mon Mémoire : *Sur le développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions harmoniques* (*Communications de la Société mathématique de Kharkow,* Kharkow, 1897).

TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA

AU TOME CINQUIÈME DE LA DEUXIÈME SÉRIE.

Page 459, dans les deux titres et en Note, *au lieu de* Mlodziciowski, *lire* Mlodziejowski.
Page 460, ligne 26, *au lieu de* Jazikov, *lire* Iazikov.
Page 460, ligne 27, *au lieu de* Bobinine, *lire* Bobynine.
Page 460, ligne 30, *au lieu de* lithuanienne, *lire* lettonne.
Page 462, ligne 15, *au lieu de* registre, *lire* procès-verbal.
Page 462, ligne 24, *au lieu de* devint, *lire* vint en qualité de.
Page 462, ligne 24, *au lieu de* distinguée, *lire* occupant une haute situation.
Page 462, ligne 35, *au lieu de* avait été attaché, *lire* avait des attaches avec.
Page 462, ligne 37, *au lieu de* il s'y rencontra, *lire* c'est là qu'il se rencontra.
Page 462, ligne 38, *au lieu de* proposèrent, *lire* résolurent.
Page 463, ligne 18, *au lieu de* поверхностяхъ, *lire* поверхностяхъ.
Page 463, ligne 20, *au lieu de* изгибании, *lire* изгибании.
Page 463, ligne 32, *après* Russie, *ajouter* à Odessa.
Page 464, ligne 16, *au lieu de* Cette proposition... fondamentale, *lire* Malgré toute sa simplicité, cette proposition est fondamentale.

Page 465, ligne 9, *au lieu de* normales, *lire* parallèles.
Page 465, lignes 17 et 26, *au lieu de* avec des variables *et au lieu de* à variables, *lire* en variables.
Page 465, à la Note, *ajouter* (Communication de M. Stäckel).
Page 467, ligne 30, *au lieu de* la signification, *lire* l'importance.
Page 467, à la Note, *ajouter* (Communication de M. Stäckel).
Page 468, lignes 5 et 6, *au lieu de* les relations... est-elle portée, *lire* les relations étudiées le plus en détail sont celles de parallélisme et de perspective, l'attention est surtout portée.
Page 469, ligne 10, *au lieu de* Levy, *lire* Lévy.
Page 470, ligne 2, *au lieu de* ses propriétés, *lire* la propriété.
Page 470, ligne 2, *supprimer* et qui fut.
Page 470, ligne 3, *au lieu de* A ce sujet, *lire* En même temps.
Page 470, ligne 15, *au lieu de* appliqua, *lire* applique.
Page 470, lignes 29 et 30, *au lieu de* Comme ses... *Recueil mathématique, lire* Comme il contient presque en entier les deux premiers Mémoires du *Recueil mathématique*.
Page 471, lignes 2 et 3, la lettre *h* doit être remplacée par un *h* droit, et indique que l'on a affaire à des sinus et cosinus hyperboliques.
Page 474, ligne 8, *au lieu de* le sens, *lire* l'idée.
Page 474, lignes 12 et 13, *au lieu de* et qu'elles ne donnent lieu... possible, *lire* et que partout où cela est possible, elles cèdent la place à des considérations purement géométriques, toujours remarquablement élégantes.
Page 474, lignes 28 et 29, *au lieu de* Ces Mémoires, qui s'élèvent au dessus de, *lire* Ces Mémoires, de préférence à.
Page 475, ligne 22, *au lieu de* l'équation conditionnelle, *lire* une équation conditionnelle et *au lieu de* la condition, *lire* une condition.
Page 479, ligne 14, *au lieu de* mais, en outre, d'un argument, *lire* mais, d'un seul argument.
Page 479, lignes 17 et 18, *au lieu de* les résultats donnés... sont presque tous connus maintenant, *lire* l'auteur a obtenu presque tous les résultats sur l'intégration des équations aux dérivées partielles connus maintenant.
Page 479, ligne 18, *au lieu de* mais, *lire* de plus.
Page 479, ligne 22, *supprimer* heureuse.
Page 479, ligne 23, *au lieu de* qu'il a réunis, et, *lire* et ingénieusement composés.

FIN DU TOME SIXIÈME DE LA DEUXIÈME SÉRIE.

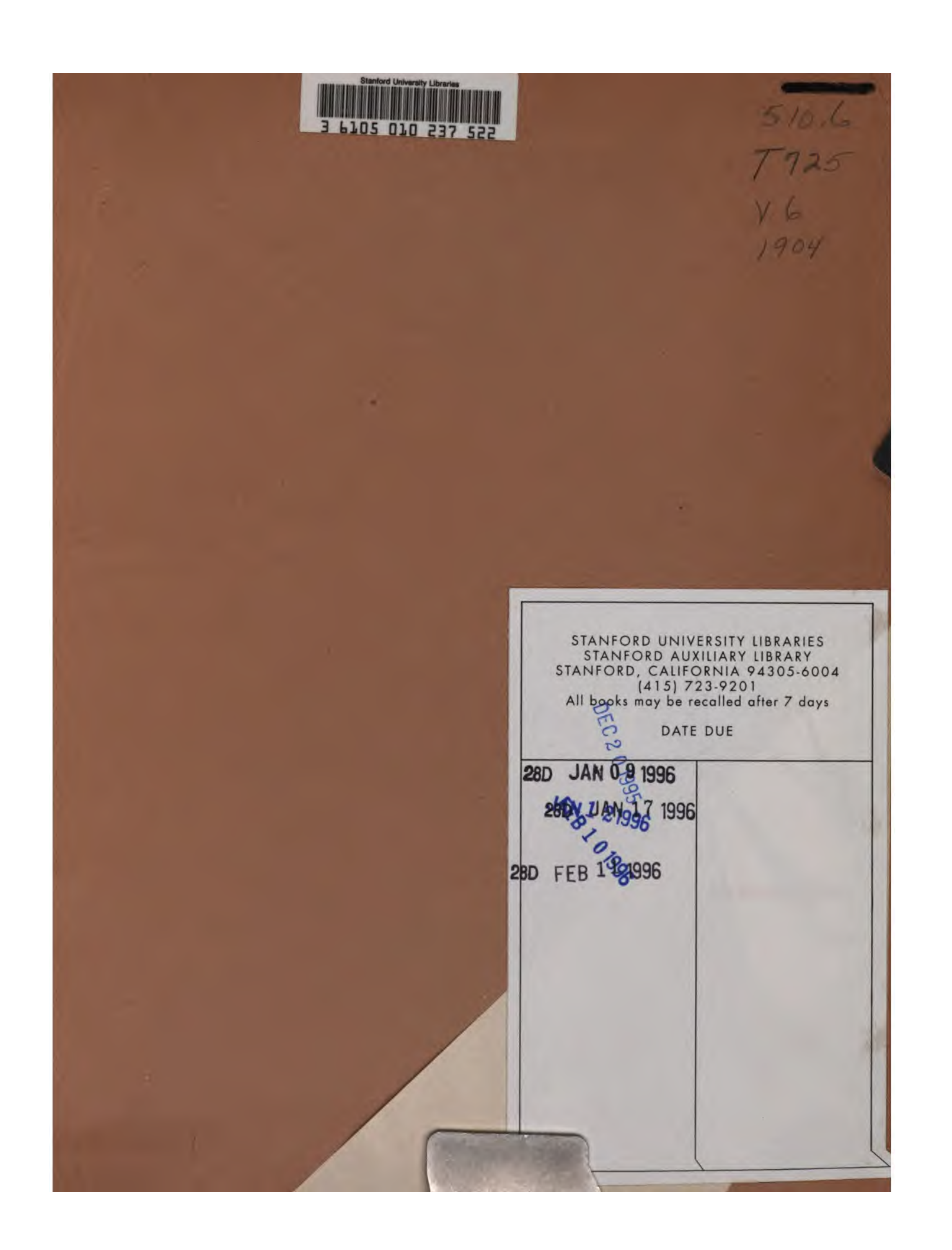
34813 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

TABLE DES MATIÈRES (Fascicule N° 4, 1904).

34913 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-V[...]




Stanford University Libraries
3 6105 010 237 522
510.6
T725
V.6
1904
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days
DATE DUE
28D JAN 09 1996
28D JAN 17 1996
28D FEB 1 1996

